INEGALITATEA Cauchy-Schwartz-Buniakowski
VARIANTA INTEGRALA

Prof. Rîcu Ileana
Grup Şcolar Agricol Roşiori

Teorema **(Hölder)**

Fie f ,g :[a,b]→ $\mathbb{R}$ două funcții integrabile şi p,q ≥1 cu $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Atunci avem:

$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstrație

Dacă $\int_a^b |f(x)|^p\, dx = 0$ sau $\int_a^b |g(x)|^q\, dx = 0$ se obține că f este nulă aproape peste tot sau g este nulă aproape peste tot,deci fg este nulă aproape peste tot $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$ şi se obține egalitatea.

Presupunem că $u=\int_a^b |f(x)|^p\, dx \succ 0$ şi $v=\int_a^b |g(x)|^q\, dx \succ 0$

Se arată(cu ajutorul derivatelor) că dacă $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şi $\alpha+\beta\succ 0$,atunci $\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}\ge \alpha\beta\,(1)$

Luând $\alpha=\frac{|f(x)|}{u^{\frac{1}{p}}} si \beta=\frac{|g(x)|}{v^{\frac{1}{q}}}$ din relația (1) se obține inegalitatea

$$\frac{|f(x)|^p}{pu}+\frac{|g(x)|^q}{qv}\ge \frac{|f(x)\cdot g(x)|}{u^{\frac{1}{p}}\cdot v^{\frac{1}{q}}}$$

Aplicând procedeul de integrare se obține inegalitatea lui Hőlder.

Teorema **(Cauchy-Schwartz-Buniakowski)**

Fie f ,g :[a,b]→ $\mathbb{R}$ două funcții integrabile. Atunci avem:

$$\left(\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx\right)^2 \le \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^2\, dx\right)$$

Demonstratie

În inegalitatea integrală a lui Hölder punem p=q=2

APLICATIA 1. Fie f:[a,b] → **R** o funcție integrabilă.Să se arate că:

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\cos x dx\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\cdot\sin x dx\right]^2\le(b-a)\cdot\int_a^b f^2(x)dx$$

Soluție:Aplicăm **inegalitatea Cauchy-Schwartz-Buniakowski**

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\cos x dx\right]^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \cos^2 x dx\right)$$ şi

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\sin x dx\right]^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \sin^2 x dx\right)$$

Prin adunare rezultă:

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\cos x dx\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\cdot\sin x dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\left(\int_a^b \sin^2 x dx+\int_a^b \cos^2 x dx\right)$$

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\cos x dx\right]^2+\left[\int_a^b f(x)\cdot\sin x dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\left(\int_a^b\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx\right)=$$

$$\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b 1dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx$$

APLICATIA 2. Fie f :[0,1]→ **R** o funcție derivabilă cu derivata continuă pe [0,1] astfel că f(0)=f(1)=0.Să se arate că: $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^4\le\frac{\sqrt{3}}{144}\int_0^1\left(f'(x)\right)^4\cdot\cos^2 x dx$

(Concursul „Gheorghe Lazăr”,Editia VII,Sibiu)

Soluție: Folosind ipoteza rezultă că: $\int_0^1 f'(x)dx=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)=0$ şi

$\int_0^1 f(x)dx=\left(f(x)\cdot x\right)\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot f'(x)dx=-\int_0^1 x\cdot f'(x)dx$,de unde avem:

$$\int_0^1 (1-2x) f'(x)\,dx = \left((1-2x) f(x)\right)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{şi}$$

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x) f'(x)\,dx\right]^2 \le \frac{1}{4}\left(\int_0^1 (1-2x)^2\,dx\right)\left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(x - 2x^2 - 4\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \cdot \left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right) = \frac{1}{12}\left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right) \quad (1)$$

Am folosit **inegalitatea Cauchy-Schwartz-Buniakowski**

Mai mult,din aceeaşi inegalitate C.S.B.sub formă integrală avem:

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}\,dx \qquad \Rightarrow$$

$$\left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^2 \le \int_0^1 \left(f'(x)\right)^4 \cos^2 x dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x} dx = (tgx)\Big|_0^1 \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^4 \cdot \cos^2 x \cdot dx =$$

$$= tg1 \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^4 \cos^2 x dx \prec \sqrt{3} \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^4 \cos^2 x dx \,(2)$$

Din (1) şi (2) avem: $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^4 \le \frac{1}{12}\left[\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right]^2 \le \frac{1}{144}\cdot\int_0^1 \left(f'(x)\right)^4 \cos^2 x dx$

q.e.d.

APLICATIA 3. Pentru functia f: [2,3] $\to (0,+\infty)$, $f(x) = \sqrt[2n]{x^2+1}$, $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$,sa se arate ca

$$\left(\int_2^3 f(x)\sin x dx\right)^2 + \left(\int_2^3 f(x)\cos x dx\right)^2 \le \int_2^3 \sqrt[n]{x^2+1}\,dx$$

Olimpiada de matematica-faza locala-Giurgiu-2006

Solutie:

Aplicand inegalitatea **Cauchy—Schartz-Buniakowski** avem:

$$\left(\int_2^3 f(x)\sin x dx\right)^2 \le \int_2^3 f^2(x)dx \cdot \int_2^3 \sin^2 x dx \,(1)$$

$$\left(\int_2^3 f(x)\cos x dx\right)^2 \le \int_2^3 f^2(x)\,dx \cdot \int_2^3 \cos^2 x dx \,(2)$$

Relatiile (1) si (2) se aduna membru cu membru si obtinem:

$$\left(\int_2^3 f(x)\sin x dx\right)^2 + \left(\int_2^3 f(x)\cos x dx\right)^2 \le \int_2^3 f^2(x)\,dx \cdot \int_2^3 1 dx = \int_2^3 \sqrt[n]{x^2+1}dx \cdot x\Big|_2^3 =$$

$$= \int_2^3 \sqrt[n]{x^2+1}dx$$

q.e.d.

APLICATIA 4. Sa se demonstreze inegalitatea:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Solutie: Consideram functiile :

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to \mathbb{R}, f(x)=\sin x$$

$$g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to \mathbb{R}, g(x)=\sqrt{\sin x}$$

Sunt functii continue pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ si cu valori pozitive; aplicand inegalitatea **Cauchy—Schartz-Buniakowski** avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt{\sin x} dx$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx\right)^2 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\sin x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\cdot 1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

APLICATIA 5. Fie $c \in \mathbb{R}^*, f:[a,b] \to \mathbb{R},$ f continua pe [a,b] astfel incat

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b xf(x)\,dx = c.$$

Sa se arate ca : $\int_a^b (f'(x))^2\,dx \geq \dfrac{c^2(a+b-2)^2}{\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx}$

Concurs,,Mathematica-Modus Vivendi"-Rimnicu-Vilcea

Solutie:

Aplicand inegalitatea **Cauchy—Schartz-Buniakowski** avem:

$$\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx \cdot \int_a^b (f'(x))^2\,dx \geq \left(\int_a^b (x-a)(x-b)f'(x)\right)^2 \text{ relatia (1)}$$

Calculam

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f'(x) \overset{\substack{prin\\parti}}{=} \left[(x-a)(x-b)f(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b (2x-a-b)f(x)\,dx =$$

$$= -2\int_a^b xf(x)\,dx + (a+b)\int_a^b f(x)\,dx = -2c + (a+b)c = c(a+b-2) \qquad (2)$$

Inlocuind (2) in(1) rezulta:

$$\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx \cdot \int_a^b (f'(x))^2\,dx \geq c^2(a+b-2)^2 \qquad /: \int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx \succ 0$$

Avem: $\int_a^b (f'(x))^2\,dx \geq \dfrac{c^2(a+b-2)^2}{\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx}$ q.e.d.

APLICATIA 6. Fie $f:[0,1] \to \mathbb{R},$ o functie derivabila cu derivata continua astfel incat

f(1) - f(0) = a .Sa se arate ca $\int_0^1 (f'(x))^2\,dx \geq a^2$

Solutie: Aplicand inegalitatea **Cauchy—Schartz-Buniakowski** avem:

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx \cdot \int_0^1 1^2 dx \geq \left(\int_0^1 f'(x)\,dx\right)^2 = \left(f(x)\Big|_0^1\right)^2 = \left(f(1)-f(0)\right)^2 = a^2$$

APLICATIA 7. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, o functie derivabila cu derivata continua astfel incat f(1)=f(0)=0.Sa se arate ca :

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx$$

Când se realizează egalitatea?

H.I.Seiffert,Elemente der Mathematik vol.38,nr.2-1983

Solutie:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \overset{\substack{prin\\parti}}{=} \left(xf(x)\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot f'(x)\,dx = -\int_0^1 x\cdot f'(x)\,dx$$

$$dar \int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1)-f(0) = 0(*)$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)\,dx = -2\int_0^1 x\cdot f'(x)\,dx = 0 + \int_0^1 -2xf'(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int_0^1 f'(x)\,dx - \int_0^1 2xf'(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-2x)f'(x)\,dx(**) \Rightarrow$$

Prin ridicare la patrat in ambii membri ai relatiei(**),avem:

$$4\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 (1-2x)\,f'(x)\,dx\right)^2 \overset{ineg.C.S.B.}{\leq}$$

$$\leq \int_0^1 (1-2x)^2 dx \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx = \left(x-2x^2+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \cdot \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx$$

Avem $4\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leq \frac{1}{3}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx$ si prin impartire cu 4 obtinem relatia

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{12}\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx$$

Pentru egalitate vom încerca funcții polinomiale,cu intenția de a identifica în cei doi membri coeficienții.Nu este posibilă o funcție liniară,din cauza condițiilor f(1)=f(0)=0,dar polinomul cx(1-x) cu c=constantă arbitrară,are ca derivată c(1-2x) şi este uşor de văzut că $4\left(\int_0^1 cx(1-x)\,dx\right)^2 = \frac{1}{3}\int_0^1 c(1-2x)^2\,dx$ deci egalitatea se obține pentru f(x)=cx(1-x) cu c=constantă arbitrară.Am obținut astfel o condiție suficientă pentru egalitate,fără a fi însă necesară. q.e.d.

APLICATIA 8. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, o functie continuă şi $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.Să se arate că :

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\left[f(x)\right]^2 dx$$

Când se realizează egalitatea?

H.I.Seiffert,Elemente der Mathematik vol.38,nr.1-1983

Soluție: Vom putea aplica inegalitatea **Cauchy—Schartz-Buniakowski** dapă cum urmează:

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x\cdot xf(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2dx\cdot\int_0^1 x^2 f^2(x)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\cdot\int_0^1 x^2 f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 f^2(x)\,dx$$

Se vede că nu am aplicat condiția din enunț $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Vom obține egalitatea pentru f(x)=1,pentru care $\int_0^1 1dx = 1 \ne 0$

Într-adevăr, $\left(\int_0^1 x^2dx\right)^2 = \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)^2 = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{9}$

Cum $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \ne 0$ avem încă o dovadă că $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.este o condiție supraabundentă.

Comentarii: Problema admite numeroase generalizări dintre care prezentăm următoarea:

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, o functie continuă.Să se arate că :

$\left(\int_0^1 x^{m+p} f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{1}{2m+1}\int_0^1 x^{2p}\left[f(x)\right]^2 dx$,unde m , p sunt numere naturale.

Când se realizează egalitatea?