CURSUL 8

Teorema de punct fix a lui Banach

Teorema de punct fix a lui Banach, cunoscută şi sub denumirea de *principiul contracţiilor*, este un instrument important în teoria spaţiilor metrice; ea garantează existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor de forma

$$x = f(x)$$

pentru o clasă largă de aplicaţii f şi furnizează totodată o metodă constructivă de determinare a acestor soluţii. Teorema a fost formulată şi demonstrată în anul în 1922 de către Ştefan Banach (1892-1945), fondatorul analizei funcţionale.

Principiul contracţiilor este o abstractizare a *metodei aproximaţiilor succesive*, metodă utilizată în mod empiric încă din antichitate pentru rezolvarea ecuaţiilor numerice, şi care a fost utilizată cu succes, de exemplu, şi la rezolvarea ecuaţiei lui Kepler

$$E = M + e \sin E$$

pentru determinarea poziţiei planetelor pe orbită. În cazul ecuaţiilor diferenţiale, metoda aproximaţiilor succesive a fost introdusă de Joseph Liouville în 1837 şi dezvoltată sistematic de Émile Picard începând cu anul 1890.

1. Generalităţi despre spaţii metrice

Vom reaminti, pentru început, câteva noţiuni şi rezultate de bază din teoria spaţiilor metrice.

Definiţia 1. Numim *spaţiu metric* o mulţime nevidă X dotată cu o metrică d, adică cu o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele axiome:

i) $\forall x \in X$, $\forall y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ şi $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
ii) $\forall x \in X$, $\forall y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
iii) $\forall x \in X$, $\forall y \in X$, $\forall z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Metrica d din definiţia de mai sus mai este numită şi *distanţă* pe X, axiomele ei reţinând proprietăţile esenţiale ale noţiunii comune de distanţă dintre două puncte. Pentru a desemna în acelaşi timp şi mulţimea suport şi metrica considerată, vom folosi notaţia (X, d).

Dintre spaţiile metrice uzuale amintim doar următoarele: mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ cu distanţa obişnuită $d(x, y) = |x - y|$; mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$

cu $d(z,w) = |z - w|$; spaţiile $\mathbb{R}^n$ cu metrica euclidiană

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

şi spaţiul $C_{[a,b]}$ al funcţiilor continue $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ dotat cu *metrica convergenţei uniforme*

$$d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Pentru orice punct x_0 al unui spaţiu metric X definim *sfera* de rază $r > 0$ şi centru x_0 prin

$$S(x_0,r) = \{x \in X \mid d(x_0,x) < r\}.$$

Fie $A \subset X$. Punctul $x_0 \in X$ este *punct interior* mulţimii A dacă există $r_0 > 0$ astfel încât $S(x_0,r_0) \subset A$. Mulţimea punctelor interioare lui A formează *interiorul* lui A, notat cu $\overset{\circ}{A}$. Punctul $x_0 \in X$ este *punct aderent* lui A dacă, pentru orice $r > 0$, $S(x_0,r) \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea punctelor aderente lui A formează *închiderea* lui A, notată $\overline{A}$. Un punct aderent lui A dar care nu este şi punct interior lui A se numeşte *punct de frontieră*, mulţimea lor formând *frontiera* lui A, notată ∂A. Au loc egalităţile:

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

In cazul particular când A este o sferă, avem:

$$\overset{\circ}{S}(x_0,r_0) = S(x_0,r_0),$$

$$\overline{S}(x_0,r_0) = \{x \in X \mid d(x_0,x) \leq r_0\}$$

şi

$$\partial S(x_0,r_0) = \{x \in X \mid d(x_0,x) = r_0\}.$$

O submulţime $A \subset X$ se numeşte *deschisă* dacă $A = \overset{\circ}{A}$, şi se numeşte *închisă* dacă $A = \overline{A}$. Se poate arăta că A este deschisă dacă şi numai dacă complementara sa, $X \setminus A$, este închisă.

Clasa submulţimilor deschise defineşte o topologie pe X, numită *topologia indusă de metrică*. În această topologie, $V \subset X$ este o *vecinătate* a punctului $x_0 \in X$ dacă conţine o sferă centrată în x_0. Prin definiţie, un şir (x_n) din X este *convergent* la $x^* \in X$ dacă în orice vecinătate V a lui x^* se găsesc toţi termenii şirului începând de la un rang $n_V \in \mathbb{N}$ încolo. In acest caz x^* se numeşte *limita* şirului şi notăm $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Convergenţa şirului de puncte (x_n) în spaţiul metric X este caracterizată de şirul numeric al distanţelor dintre termenii şirului şi limita sa. Mai precis, avem echivalenţa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,x^*) = 0.$$

Un şir (x_n) din X se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de la care începând distanţa dintre oricare doi termeni ai şirului este mai mică decât ε. Pe scurt:

$$(x_n) \text{ şir Cauchy } \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n \geq n_\varepsilon \text{ şi } m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Este uşor de văzut că orice şir convergent este şi fundamental, dar reciproca nu este valabilă în orice spaţiu metric. De exemplu, în mulţimea numerelor raţionale dotată cu distanţa obişnuită, şirul

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{k^2}}$$

este fundamental fără să fie convergent.

Definiţia 2. Numim *spaţiu metric complet* un spaţiu metric în care orice şir Cauchy este convergent.

Toate exemplele de spaţiile metrice uzuale amintite mai sus, $(\mathbb{R}, d)$, $(\mathbb{C}, d)$, $(\mathbb{R}^n, d)$ şi $(C_{[a,b]}, d)$ sunt spaţii metrice complete.

Fie (X_1, d_1) şi (X_2, d_2) două spaţii metrice. O funcţie $f : X_1 \to X_2$ este *continuă* dacă din $x_n \to x^*$ în X_1 rezultă că $f(x_n) \to f(x^*)$ în X_2.

Definiţia 3. Funcţia $f : X_1 \to X_2$ este *lipschitziană* cu *constanta Lipschitz* $L \geq 0$ dacă pentru orice x şi y din X_1 are loc majorarea

$$d_1(x, y) \leq L d_2(x, y).$$

O funcţie lipschitziană cu constanta Lipschitz $L < 1$ se numeşte *contracţie.*

Orice funcţie lipschitziană este continuă, reciproca nu are loc în general.

Am ajuns să precizăm acum o ultimă noţiune pregătitoare:

Definiţia 4. Fie $f : X \to X$ o funcţie oarecare. Elementul $x^* \in X$ se numeşte *punct fix* al aplicaţiei f dacă satisface egalitatea

$$x^* = f(x^*).$$

2. Metoda aproximaţiilor succesive

Pentru a uşura întelegerea Teoremei de punct fix a lui Banach, vom prezenta mai întâi metoda generală de rezolvare a ecuaţiilor numerice prin aproximaţii succesive, aşa cum apare ea pentru prima oară în scrierile rămase de la Heron din Alexandria (circa 10 – 70 d.H.) şi anume chiar în *Metrica*, o culegere de formule şi metode de calcul pentru lungimi, arii şi volume, multe dintre ele preluate de la babilonieni. Printre acestea se află şi următoarea metodă de extragere a rădăcinei pătrate formulată, în exemplul următor, în limbajul matematic actual.

Exemplul 1 (Heron)**.** Ecuaţia

$$x^2 = a$$

poate fi rezolvată (în mulţimea numerelor reale strict pozitive) astfel: o scriem în mod echivalent sub forma problemei de punct fix

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

şi, pentru funcţia $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dată de

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right), \tag{1}$$

calculăm în mod recurent, pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$, aproximaţiile

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

unde termenul iniţial $x_0 > 0$ este ales arbitrar (dar cu cât mai aproape de $\sqrt{a}$, cu atât mai bine). Obţinem un şir convergent la un număr $x^* \geq 0$ care verifică ecuaţia $x^* = f(x^*)$, adică $x^* = \sqrt{a}$. Vom opri calculul efectiv al aproximaţiilor x_n când observăm că s-au "stabilizat" un număr suficient de zecimale.

Să verificăm printr-un program $C^{\#}$ care scrie în consola de ieşire valorile şirului (x_n) şi reprezintă grafic comportarea acestuia (vezi Figura 1).

```
public class Heron : FractalForm
   {
       double a = 16;
       double f(double x)
       {
           return 0.5 * (x + a / x);
       }
       public override void makeImage()
       {
           double x, y, x0, y0;
           setXminXmaxYminYmax(-1, 30, -1, 30);

           //TRASAM GRAFICUL LUI f
           //clearScreen();
           setAxis();
           setLine(Xmin, Ymin, Xmax, Ymax, penColor);
           x0 = 0.1;
           y0 = f(x0);
           for (int ix = getI(x0) + 1; ix < imax; ix++)
           {
               x = getX(ix);
               y = f(x);
               setLine(x0, y0, x, y, Color.Red);
               x0 = x;
```

```
            y0 = y;
        }
        resetScreen();

        //TRASAM SIRUL CARE PLEACA DIN xvechi
        double xnou, xvechi = 29;
        Console.WriteLine("x0=" + xvechi);
        int k = 1;
        while (true)
        {
            xnou = f(xvechi);
            Console.WriteLine("x{0}={1}", k++, xnou);
            if (Math.Abs(xnou - xvechi) < 0.000001) break;
            setLine(xvechi, 0, xvechi, xnou, Color.Blue);
            setLine(xvechi, xnou, xnou, xnou, Color.Blue);
            setLine(xnou, xnou, xnou, 0, Color.Blue);
            xvechi = xnou;
        }
        resetScreen();
    }
}
```

Conţinutul consolei de ieşire:

```
x0=29
x1=14.7758620689655
x2=7.92935460507786
x3=4.97358665247226
x4=4.09529048512717
x5=4.0011086242342
x6=4.00000015358839
x7=4
Press any key to continue . . .
```

Justificarea convergenţei şirului x_n este lăsată cititorului, ea poate fi stabilită prin studierea mărginirii şi a monotoniei şirului.

Să ilustrăm acum aplicarea metodei aproximaţiilor succesive pentru rezolvarea unei *ecuaţii funcţionale* (în care necunoscuta este o funcţie). Mai precis vom considera ecuaţia diferenţială

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \tag{2}$$

cu $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, şi vom căuta soluţii $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 care să satisfacă şi condiţia iniţială

$$\varphi(\tau_0) = \xi_0. \tag{3}$$

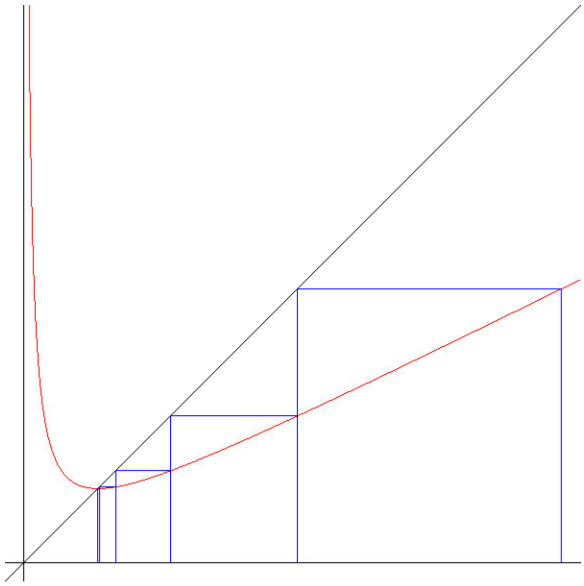

FIGURA 1. Metoda lui Heron, $a = 16$ şi $x_0 = 29$.

Este uşor de văzut că *problema Cauchy* (2) şi (3) este echivalentă cu următoarea *ecuaţie integrală de tip Volterra*

$$\varphi(t) = \xi_0 + \int_{\tau_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau, \tag{4}$$

care poate fi scrisă sub forma problemei de punct fix

$$\varphi = \Gamma\varphi$$

cu ajutorul *operatorului liniar* Γ definit de egalitatea

$$(\Gamma\varphi)(t) = \xi_0 + \int_{\tau_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau.$$

După cum ştim din teorema de existenţă şi unicitate Cauchy – Lipschitz – Picard, în anumite condiţii bine precizate, ecuaţia (4) are soluţie unică pe un interval I, obţinută ca limita uniformă a şirului de funcţii $(\varphi_n)_n$ definit astfel:

$$\varphi_{n+1}(t) = (\Gamma\varphi_n)(t) = \xi_0 + \int_{\tau_0}^{t} f(\tau, \varphi_n(\tau))\, d\tau,$$

unde ca aproximaţie iniţială poate fi luată funcţia constantă

$$\varphi_0(t) = \xi_0,$$

pentru orice $t \in I$.

3. Principiul contracţiilor

Am văzut în secţiunea precedentă cum sunt generate, prin metoda aproximaţiilor succesive, şiruri de numere sau de funcţii care determină, la limită, punctele fixe ale unor anumite aplicaţii.

Scopul nostru este să prezentăm o nouă categorie de fractali, definiţi ca puncte fixe ale unor transformări care duc mulţimi în mulţimi de puncte, şi în acest caz vom folosi şiruri de mulţimi. Pentru a nu repeta raţionamentele în fiecare caz în parte, demonstrăm aici forma abstractă dată de Banach a metodei aproximaţiilor succesive:

Teorema 1. *Dacă (X, d) este un spaţiu metric complet iar $f : X \to X$ este o contracţie, atunci f are un punct fix unic în X. Mai mult, pentru orice punct iniţial $x_0 \in X$, şirul aproximaţiilor succesive*

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{5}$$

este convergent la punctul fix $x^* \in X$ al lui f, viteza de convergenţă fiind dată de estimarea

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-q} q^n, \tag{6}$$

unde $q \in [0, 1)$ este constanta Lipschitz a lui f.

Demonstraţie. Considerăm un punct $x_0 \in X$ fixat arbitrar şi definim şirul (x_n) prin relaţia (5). Vom arăta, pentru început, că (x_n) este un şir Cauchy.

Deoarece f este o contracţie, avem, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq q d(x_n, x_{n+1}),$$

de unde rezultă

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n d(x_0, x_1),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. De aici obţinem imediat, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$ cu $n \leq m$,

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=n}^{m-1} q^i \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-q} q^n. \tag{7}$$

Am folosit majorarea dată de suma seriei geometrice

$$\sum_{i=0}^{m-n-1} q^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q},$$

care este convergentă deoarece constanta Lipschitz q este în intervalul $[0, 1)$.

Fie $\varepsilon > 0$ fixat arbitrar. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_0,x_1)}{1-q} q^n = 0$ rezultă că există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \geq n_\varepsilon$ implică $\frac{d(x_0,x_1)}{1-q} q^n < \varepsilon$. Din (7) urmează că, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi $m \geq n_\varepsilon$, avem $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, şi deci (x_n) este şir Cauchy. Spaţiul metric X fiind complet, rezultă că (x_n) este convergent, adică există $x^* \in X$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

În sfârşit, deoarece f este o contracţie, este continuă, şi trecând la limită în relaţia de recurenţa (5), obţinem egalităţile

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x^*),$$

care arată că x^* este punct fix pentru f.

Pentru a demonstra unicitatea punctului fix, fie $x^{**} \in X$, cu $x^* \neq x^{**}$, un alt punct fix al lui f. Atunci $d(x^*, x^{**}) > 0$ şi obţinem imediat că

$$d(x^*, x^{**}) = d(f(x^*), f(x^{**})) \leq q d(x^*, x^{**}) < d(x^*, x^{**}),$$

de unde rezultă o contradicţie.

Estimarea (6) se obţine din (7) prin trecere la limită cu $m \to \infty$.

□

Observaţia 1. Pentru şirul aproximaţiilor succesive sunt valabile egalităţile: $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(f(x_0)) = (f \circ f)(x_0)$, $x_3 = f(f(f(x_0))) = (f \circ f \circ f)(x_0)$ ş.a.m.d. Definim *şirul iteratelor* funcţiei f ca fiind

$$f^{\circ n} = f \circ f \circ \cdots \circ f \text{ (de } n \text{ ori)},$$

şi avem

$$x_n = f^{\circ n}(x_0),$$

pentru orice $n \geq 1$, adică x_n este şirul valorilor în x_0 ale iteratelor funcţiei.

Exemplul 2. Definim $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ prin

$$f(z) = az + i,$$

unde

$$a = \frac{9}{10}(\cos\frac{\pi}{7} + i \sin\frac{\pi}{7}).$$

Deoarece

$$|f(u) - f(v)| = |a||u - v| \leq \frac{9}{10}|u - v|,$$

pentru orice u şi v din $\mathbb{C}$, f este o contracţie. Unicul său punct fix este soluţia ecuaţiei $z = az + i$, adică $z^* = i/(1 - a)$.

Clasa $C^{\#}$ următoare reprezintă grafic, pentru funcţia f de mai sus, comportarea şirului aproximaţiilor succesive pentru diverse valori ale datei iniţiale:

```
public class Banach : FractalForm
   {
       static Complex i = new Complex(0, 1);
       static Complex a = Complex.setRoTheta(0.9, Math.PI / 7);

       Complex f(Complex z)
       {
           return a * z + i;
       }
       void transformaSiTraseaza(ref ComList li)
       {
           ComList rez = new ComList();
           Complex z,zprim;
           int k=1;
           for (z = li.firstZet; !li.ended; z = li.nextZet) {
               rez.nextZet = zprim = f(z);
               setLine(z,zprim,getColor(100*k++));
           }
           li = rez;
       }
       public override void makeImage()
       {
           setXminXmaxYminYmax(-5.1, 2.1, -2.1, 5.1);
           setAxis();
           ComList fig = new ComList();
           fig.nextZet=-1 - i;
           fig.nextZet=-0.6 - i;
           fig.nextZet=-0.2 - i;
           fig.nextZet=0.2 - i;
           fig.nextZet=0.6 - i;
           fig.nextZet=1 - i;
           int nrEtape = 100;
           for (int k = 0; k < nrEtape; k++){
               transformaSiTraseaza(ref fig);
           }
           resetScreen();
       }
   }
```

Rezultatul este dat în Figura 2, în care vârfurile celor şase linii poligonale reprezintă punctele succesive ale şirului $z_{n+1} = f(z_n)$, pentru şase valori iniţiale diferite ale lui z_0.

Găsirea unei contracţii potrivite pentru rezolvarea unei anumite ecuaţii este, în general, o chestiune dificilă, de multe ori următoarea *variantă locală* este salvatoare: dacă ştim că o aplicaţie $f : X \to X$ are un punct fix x^* undeva

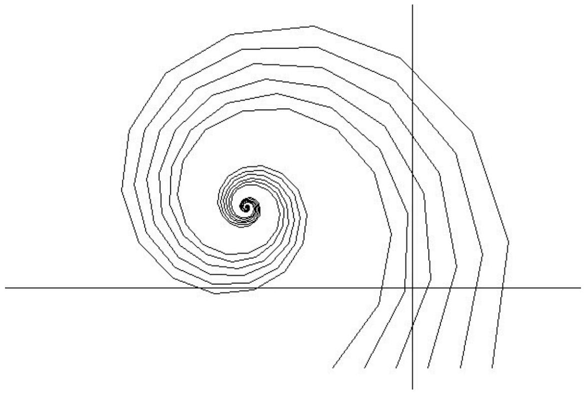

FIGURA 2. Iteraţii trasate de clasa `Banach`.

în spaţiul metric complet (X, d), şi dacă reuşim să arătăm că există $r_0 > 0$ şi $q \in [0, 1)$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$$

pentru orice x şi y din $\overline{S}(x^*, r_0)$, atunci rezultă mediat că f este o contracţie pe $X_0 = \overline{S}(x^*, r_0)$ şi, prin urmare, pentru orice x_0 suficient de aproape de x^* (adică $x_0 \in X_0$) şirul valorilor în x_0 ale iteratelor lui f este convergent la x^*.

În cazurile numerice $X = \mathbb{R}$ sau $X = \mathbb{C}$ avem chiar un rezultat mai precis:

Teorema 2. *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*sau* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) *derivabilă cu derivata continuă şi fie* $x^* \in \mathbb{R}$ (*respectiv* $x^* \in \mathbb{C}$) *un punct fix al său. Dacă*

$$|f'(x^*)| < 1,$$

atunci există $r_0 > 0$ *astfel încât, pentru orice* x_0 *cu* $|x_0 - x^*| \leq r_0$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(x_0) = x^*.$$

Demonstraţie. Fixăm o constantă q astfel încât $|f'(x^*)| < q < 1$. Din continuitatea derivatei în x^*, rezultă că există $r_0 > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leq q$ pentru orice $x \in \overline{S}(x^*, r_0)$. Din teorema creşterilor finite urmează că $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ pentru orice x şi y din $\overline{S}(x^*, r_0)$, şi aplicăm în continuare varianta locală a principiului contracţiilor. □

În cazul unei contracţii $f : X \to X$, spunem că punctul să fix, $x^* \in X$, este un *atractor global*, deoarece are proprietatea că pentru orice $x_0 \in X$ şirul iteratelor $(f^{\circ n}(x_0))$ converge la x^*. Se mai spune că x^* este *atractorul* contracţiei f.

In cazul Teoremei 2 spunem că punctul fix x^* este un *atractor local*, deoarece convergenţa lui $(f^{\circ n}(x_0))$ la x^* este asigurată numai pentru x_0 dintr-o vecinătate a punctului fix. Tot în cazul funcţiilor numerice, un punct fix x^* este numit *repulsor* dacă $|f'(x^*)| > 1$ şi *neutru* dacă $|f'(x^*)| = 1$. In cazul când x^* este repulsor se poate arăta că pentru orice $x \neq x^*$ dar suficient de apropiat de acesta, $d(x, x^*) < d(f(x), x^*)$, şi, prin urmare, un şir de iterate $x_n = f^{\circ n}(x_0)$ poate să conveargă la x^* numai dacă $x_n = x^*$ de la un loc încolo.

Observaţia 2. Din definiţia derivatei rezultă imediat că, dacă o funcţie lipschitziană definită pe $\mathbb{R}$ sau pe $\mathbb{C}$ este derivabilă, atunci derivata sa este mărginită în modul de constanta Lipschitz a funcţiei. Reluând Exemplul 1, constatăm că funcţia f dată de (1) nu este o contracţie pe $X = (0, +\infty)$, derivata sa

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right), \tag{8}$$

fiind nemărginită pentru $x \to 0$. Totuşi, deoarece în punctul fix $x^* = \sqrt{a}$ avem $f'(\sqrt{a}) = 0$, Teorema 2 este aplicabilă şi justificăm astfel foarte uşor convergenţa metodei lui Heron, dar numai pentru datele iniţiale x_0 "suficient de apropriate" de $\sqrt{a}$.

Este interesant de văzut că metoda lui Heron de extragere a rărăcinii pătrate funcţionează şi în mulţimea numerelor complexe dar numai pentru valori iniţiale din vecinătatea punctelor fixe, iar justificarea convergenţei este dată tot de Teorema 2. Spre exemplificare, următorul program are rezultatul din Figura 3.

```
public class HeronComplex : FractalForm
    {
        static Complex i = new Complex(0, 1);
        static Complex a = (1 + i) * (1 + i);
        Complex f(Complex z)
        {
            return (z + a / z) / 2;
        }
        public override void makeImage()
        {
            setXminXmaxYminYmax(-0.1, 2, -0.1, 2);
            setAxis();
            Complex z = 0.5 + 0.75 * i;
            for (int k = 1; k < 10; k++)
            {
                setPixel(z, getColor(100 * k));
                Console.WriteLine(z);
                z = f(z);
            }
            resetScreen();
        }
   }
```

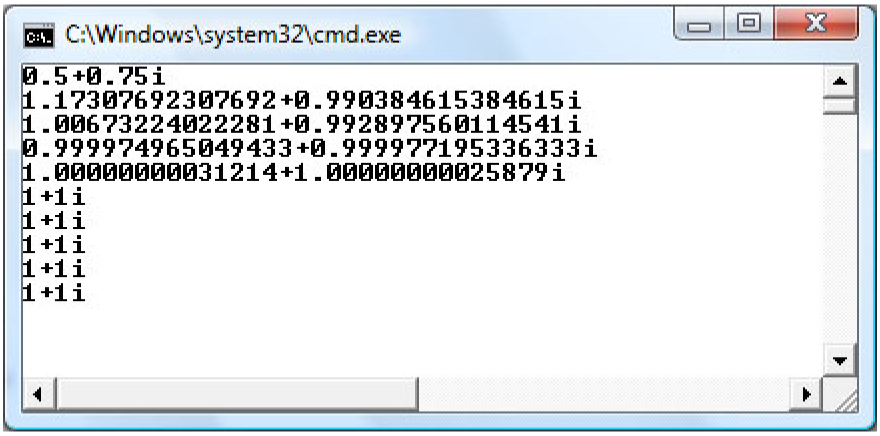

FIGURA 3. Consola de ieşire pentru clasa `HeronComplex`.