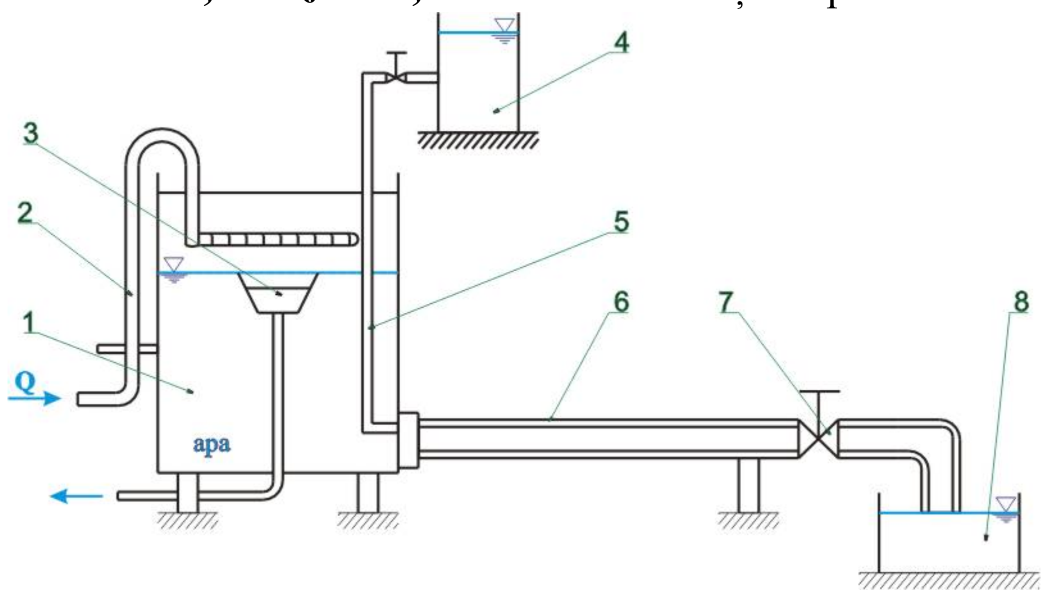
Dinamica fluidelor reale

Fluidele reale au proprietatea de vîscozitate, care produce frecări şi pierderi de energie.

Experiența lui Reynolds

În cadrul acestei experiențe, se vizualizează modul în care curge un anumit fluid şi în final se clasifică curgerea fluidelor în următoarele regimuri de curgere: ***laminar, tranzitoriu, turbulent.*** Instalația cuprinde:



(1)- rezervor de nivel constant (menține adâncimea apei constantă, astfel încât viteza cu care intră apa în tubul de sticlă este aproximativ $\sqrt{2gh}$ şi se obține în final un debit şi un regim de curgere constant.

(2)- dispozitiv de alimentare cu orificii multiple

(3)- dispozitiv de preaplin. (evacuează surplusul de debit)

(4)- vas cu colorant

(5)- tub injector (permite accesul coloranților în tubul de sticlă)

(6)- tub de sticlă pentru vizualizarea curgerii

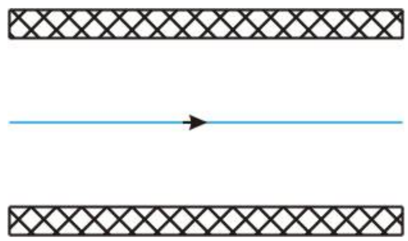
(7)- robinet pentru reglarea debitului

(8)- mensură gradată pentru colectarea volumului de apă scursă din tubul de sticlă într-un anumit timp.

Se procedează după cum urmează.

Se deschide robinetul (6) şi se introduce colorant prin acul injector.

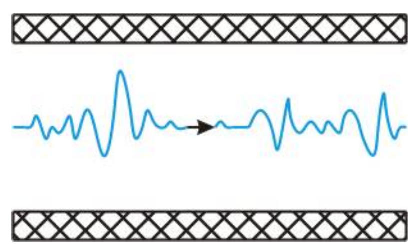
La viteze şi debite mici, colorantul are aspectul din prima figură şi corespunde unui **regim laminar**.



Particulele de fluid au o singură componentă de viteză

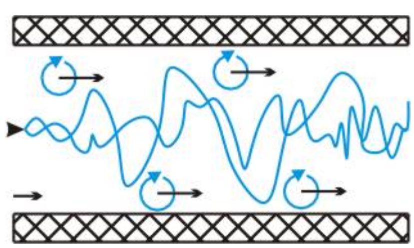
Fluidul curge în straturi, nu există schimburi de particule şi de impuls între straturile de fluid.

Se deschide în continuare robinetul (6) până se observă oscilații aleatorii ale firului de colorant ca în a doua figură ce corespunde unui **regim tranzitoriu.**



Apar pulsații de viteză după alte direcții decât direcția curgerii ce determină schimb de particule şi impuls între straturi.

La o deschidere şi mai pronunțată a robinetului (6) se obțin debite de curgere mari şi colorantul are aspectul din figura a treia-.



În cadrul acestui **regim turbulent**, pulsațiile de viteză aleatorii au valori mari, schimbul de impuls este accentuat şi regimul corespunde unor pierderi energetice mari.

Acest regim se întâlneşte de obicei în cazul transportului fluidelor în conducte deoarece sunt solicitate de regulă debite mari de fluid

.

În cazul experienței, s-a constatat că viteza medie de curgere prin tubul de sticlă, diametrul interior al tubului, precum şi vâscozitatea cinematică a lichidului influențează evoluția colorantului.

S-a dedus numărul Reynolds:

$$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot D}{\nu}$$

Pentru prima figură : $\mathrm{Re} < 2300$
Pentru a doua figură : $\mathrm{Re} \cong 2300$
Pentru a treia figură : $\mathrm{Re} > 2300 \longrightarrow$ sute de mii

În cadrul fiecărui regim de curgere se măsoară volumul de apă scurs într-un anumit timp şi rezultă debitul volumic:

$$\underset{(debit)}{Q} = \frac{v}{t}$$

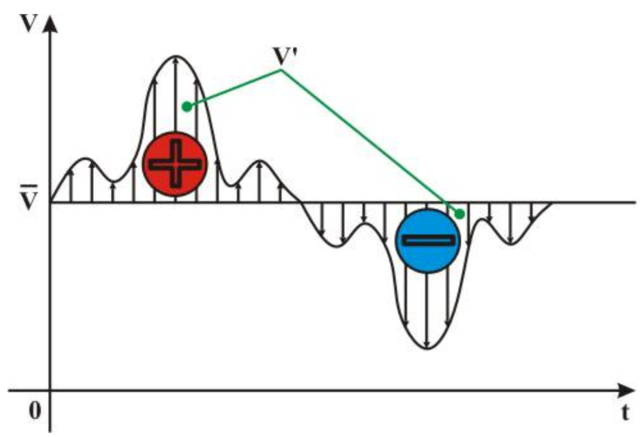
$$Q = v \underset{(\sec tiune)}{S} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4Q}{\pi D^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re} = \frac{4Q}{\pi D^2}\frac{D}{\nu}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re} = \frac{4Q}{\pi D \nu}$$

ce reprezintă a doua formă a numărului Reynolds.

Regimurile de curgere diferă din punct de vedere optic, cinematic şi energetic.

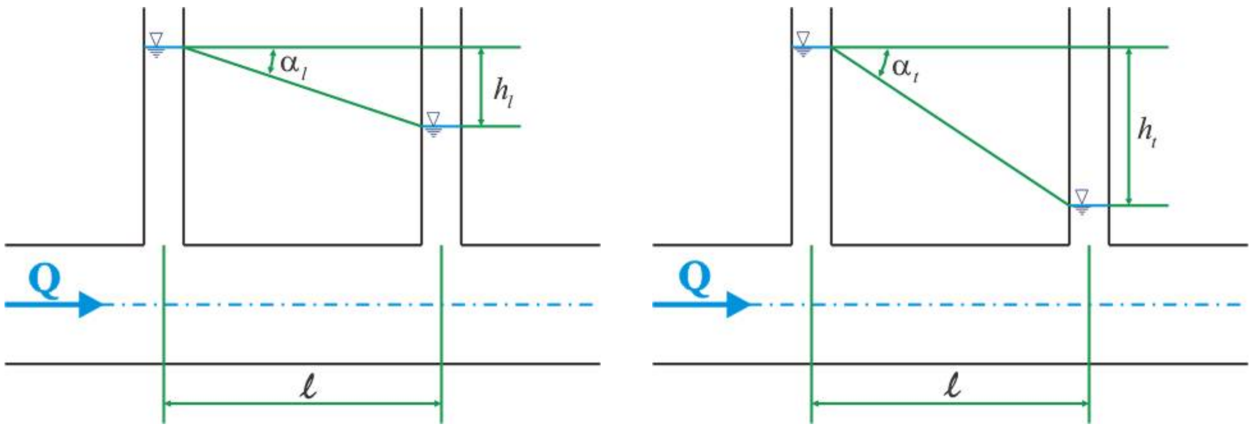
- din punct de vedere cinematic (regimul turbulent)



$$v = \bar{v} + v'$$

Pulsaţiile de viteză sunt variabile în timp, alternând valuri pozitive sau negative faţă de valoarea vitezei medii, ca în figura precedentă.

- din punct de vedere energetic :pierderea de energie se poate estima cu ajutorul pantei hidraulice; Figura din stânga corespunde regimului laminar, cu pierderi de energie mai mici, ce corespund unei denivelări mai mici între tuburile piezometrice. Figura din dreapta corespunde regimului turbulent, cu pierderi de energie mai mari, ce corespund unei denivelări mai mari între tuburile piezometrice. La fel, pantele hidraulice au valori similare:



$$J_l = \frac{h_l}{l} \qquad\qquad J_t = tg\alpha = \frac{h_t}{l} > J_l$$

Ultima inegalitate se datorează efectelor de turbulență care conduc la pierderi suplimentare de energie față de regimul laminar.

<u>Ecuațiile de mişcare ale fluidelor reale</u>

Spre deosebire de fluidul ideal, se consideră că fluidul are proprietatea de vâscozitate şi calculul următor se efectuează pentru întregul volumul de fluid aflat în mişcare.

Considerăm că observatorul se situează pe sistemul de referință mobil pentru care se ia în considerare şi forța de inerție, pentru care ecuația vectorială este:

$$\overline{F_m} + \overline{F_i} + \overline{F_p} + \overline{F_\tau} = 0$$

unde $\overline{F_\tau}$ este forța datorată eforturilor tangențiale τ ce apar la curgerea unui fluid real.

Se observă că dacă se înlocuieşte forța de inerție în funcție de masa fluidului aflat în mişcare şi de accelerația acestuia şi produsul respectiv se trece în membrul drept, se obține principiul al doilea al dinamicii.

Se determină în continuare expresiile forțelor masice, de inerție, de presiune şi de viscozitate ce acționează asupra întregului fluid:

$$d\overline{F_m} = \overline{f_m}dm = \overline{f_m}\rho dV \quad \Rightarrow \quad \overline{F_m} = \int_V \overline{f_m}\rho dV$$

$$d\overline{F_i} = -\overline{a}dm = -\frac{d\overline{v}}{dt}\rho dV \quad \Rightarrow \quad \overline{F_i} = -\int_V \frac{d\overline{v}}{dt}\rho dV$$

$$\overline{F_p} = -\int_S \overline{n}pdS = -\int_V gradpdV$$

$$\overline{F_\tau} = \int_S \tau\overline{t}dV$$

Pentru a exprima şi forța totală de viscozitate sub forma unei integrale de volum, se determină inițial,separat, componentele forței de vâscozitate după cele 3 direcții:

$$F_{\tau x} = \int_S \tau_x dS \qquad \tau_x = \eta\frac{du}{dn}$$

$$\Rightarrow F_{\tau x} = \int_S \eta\frac{du}{dn}dS = \eta\int_S \frac{du}{dn}dS = \eta\int_S \overline{n}\cdot gradu\, dS = \eta\int_V divgradudV = \eta\int_V \Delta u\cdot dV$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{\tau x} = \eta\int_S \Delta u\cdot dV \\ F_{\tau y} = \eta\int_V \Delta v\cdot dV \\ F_{\tau z} = \eta\int_V \Delta w\cdot dV \end{cases}$$

Prin înmulțirea ecuațiilor cu versorii celor trei axe şi adunarea relațiilor membru cu membru se obține expresia forței de viscozitate:

$$\Rightarrow \overline{F_\tau} = F_{\tau x}\overline{i} + F_{\tau y}\overline{j} + F_{\tau z}\overline{k} = \eta\int_V \left(\Delta u\overline{i} + \Delta v\overline{j} + \Delta w\overline{k}\right)\cdot dV = \eta\int_V \Delta\overline{v}\cdot dV$$

Introducând cele patru forțe în ecuația de mişcare, rezultă:

$$\int_V \left(\overline{f_m}\rho - \frac{d\overline{v}}{dt}\rho - gradp + \eta\Delta\overline{v}\right)dV = 0 \qquad \int_V \left(\overline{f_m} - \frac{d\overline{v}}{dt} - \frac{1}{\rho}gradp + \frac{\eta}{\rho}\Delta\overline{v}\right)dV = 0$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt}+\frac{1}{\rho}gradp=\overline{f_m}+\upsilon\Delta\bar{v}$$

ce reprezintă ecuația vectorială de mişcare a fluidului.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=X+\upsilon\cdot\Delta u \\ \dfrac{dv}{dt}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=Y+\upsilon\cdot\Delta v \\ \dfrac{dw}{dt}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=Z+\upsilon\cdot\Delta w \end{cases}$$

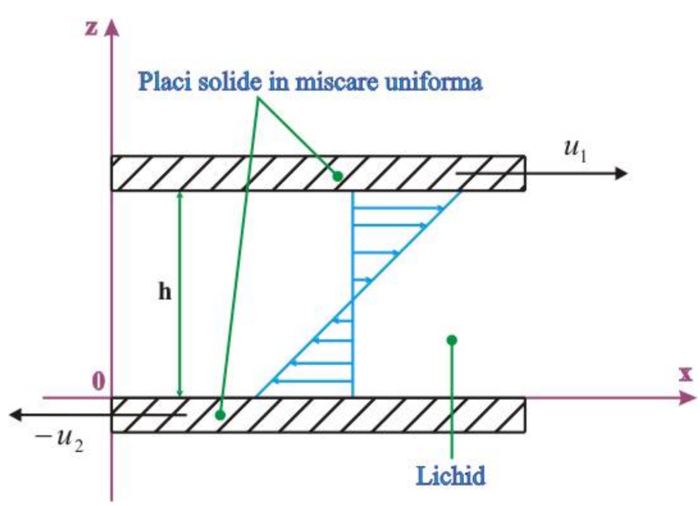
Sistemul de ecuații de mişcare

Ultimul termen din fiecare ecuație reprezintă forța unitară de viscozitate
Din acest sistem rezultă **relația lui Bernoulli pentru un fluid real**:

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2+h_\eta$$

ce se calculează în mod similar cu cazul curgerii fluidului ideal.

Integrarea exactă a sistemului de ecuații la curgerea unui fluid între două plăci plane şi orizontale



Se consideră mişcarea permanentă şi prin explicitarea celor trei laplaciani din sistemul precedent se obține sistemul extins:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=X+\upsilon\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=Y+\upsilon\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=Z+\upsilon\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

pentru care au dispărut derivatele în raport cu timpul din membrul stâng..

Observând mişcarea plăcilor, se constată că lichidul se deplasează după direcția axei *Ox* , deci:

$$u \neq 0 \qquad v = w = 0$$

Din ecuația de continuitate $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$ se obține: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

Deoarece la deplasarea în direcția axei *Oy* particulele situate identic au aceeaşi componentă u a vitezei rezultă că: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

La deplasarea particulei după direcția axei *Oz*, *u* se modifică de la $+u_1$ pe placa solidă superioară la $-u_2$ pe placa solidă inferioară $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\neq 0$.

Deoarece curgerea are loc în câmpul gravitațional : $x=y=0$ şi $z=-g$, se obține sistemul simplificat :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=\upsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=-g \end{cases}$$

Din ultima ecuație, prin integrare, se obține repartiția de presiuni:

$p+\rho gz=ct$ - **formula pentru presiune**

Considerând situația cea mai simplă, $\frac{\partial p}{\partial x}=0$,din prima ecuație $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

Prin integrare în raport cu z se obține:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=C_1 \quad \Rightarrow \quad u=C_1 z+C_2$$

Se aplică condițiile la limită şi se înlocuiesc în expresia componentei de viteză după direcția axei Ox, u:

$$\begin{cases} z=0\ ;\ u=-U_2 \\ z=h;\ u=U_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -U_2=C_2 \\ U_1=C_1 h+C_2 \end{cases} \qquad C_1=\frac{U_1+U_2}{h}$$

şi se obține în final distribuția de viteze în interiorul fluidului în mişcare:

$u=\frac{U_1+U_2}{h}z-U_2$ **- formula pentru viteză**

Cu ajutorul celor două formule se poate caracteriza comportarea fluidului în mişcare în orice punct din domeniul de curgere aflat între cele două plăci solide.