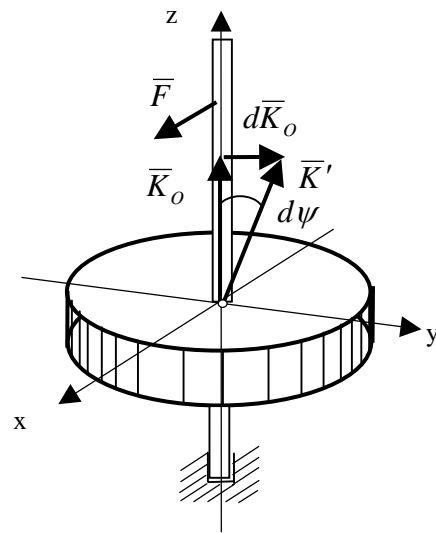
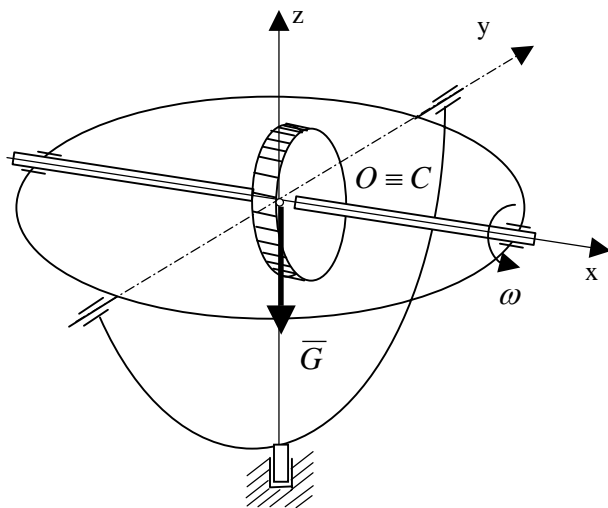


MECANICA



PRINTEH
BUCUREȘTI 1999

dr. ing. CORNEL MARIN
dr. mat. TEODOR HUIDU

M E C A N I C A

Editura PRINTEH
BUCUREȘTI 1999

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

MARIN, Cornel; HUIDU, Teodor

**MECANICA / Cornel Marin, Teodor Huidu - București, PRINTECH,
1999 (ANDOR TIPO)**

368 p; 25cm

Bibliografie

ISBN 973-652-042-0

531

Editura PRINTECH,

Str. Băiculești, nr. 13

Tel. 668 35 62

092 355 664

Editor: Milică Ecaterina

Consilier editorial: Mihaela Toma

Referenți :

Prof. dr. ing. NICOLAE ENESCU

Prof. dr. ing. ION ROȘCA

ISBN 973 – 652 – 042 – 0

Editura cedează toate drepturile autorilor

CUVÂNT ÎNAINTE

Lucrarea își propune să fie un material util în pregătirea fundamentală a studenților din primii ani ai învățământului superior tehnic, un material bibliografic de bază pentru examenul de licență al absolvenților universităților tehnice, pentru precum și un material util inginerilor, profesorilor și tuturor celor interesați în aprofundarea cunoștințelor de Mecanică. Lucrarea este utilă totodată, pentru înțelegerea și aprofundarea altor discipline tehnice de pregătire fundamentală cum sunt: Mecanica fluidelor, Rezistența materialelor, Mecanisme, Vibrații mecanice, etc.

Pentru o însușire eficientă a cunoștințelor teoretice prezentate, recomandăm rezolvarea independentă a aplicațiilor prezentate la sfârșitul fiecărui capitol; aceste aplicații sunt reprezentative pentru fiecare capitol, fiind preluate din practica inginerească și îmbunătățite ca formă de prezentare și mod de rezolvare, nu prezintă un grad de dificultate prea ridicat și sunt accesibile studenților care au parcurs deja un curs de Algebră și Analiză matematică, Matematici speciale și Geometrie Analitică și Diferențială, discipline care se predau în primii ani în facultățile tehnice .

În conjunctura actuală a reformei din învățământul superior tehnic, introducerea sistemului de “credite transferabile” presupune din partea studenților un efort mai susținut în timpul semestrului; s-au introdus astfel o serie de activități individuale (cum ar fi: teme de casă, proiecte, lucrări de verificare pe parcurs, etc.) care îi permit studentului o pregătire constantă și eficientă. În acest sens, considerăm că prezenta lucrare oferă un suport teoretic și aplicativ valoros, tuturor studenților care doresc însușirea și aprofundarea cunoștințelor de Mecanică teoretică.

Lucrarea este o primă ediție, având la bază un curs litografiat (referința bibliografică [6]) precum și notele de curs de Mecanică, predate de autori studenților de la Facultatea de Știința și Ingineria Materialelor și Facultatea de Inginerie Electrică a Universității Valahia Târgoviște, precum și studenților de la Facultatea de Foraj - Extracție a Univesității “Petrol-Gaze” Ploiești.

Suntem profund recunoscători d-lor profesori Nicolae ENESCU și Ioan ROȘCA pentru răbdarea parcurgerii manuscrisului și observațiile făcute la recenzia științifică, precum și tuturor acelor care au venit cu propuneri pentru îmbunătățirea acestei prime ediții a lucrării.

Târgoviște, 1999

AUTORII

INTRODUCERE

1. Conceptele fundamentale și conceptele de lucru ale Mecanicii newtoniene

La baza fenomenelor studiate în mecanică stau cele două noțiuni fundamentale: *materia și mișcarea*. Evoluția în timp a noțiunii de *materie* a fost deosebit de complexă. În antichitate noțiunea de *materie* a fost confundată cu noțiunea de *substanță* (care este doar una din formele materiei), considerându-se că la baza diferitelor fenomene stau 4 *substanțe*: apa, lemnul, focul și metalul. Chiar și Newton avea o concepție limitată despre *materie*, pe care o considera ca fiind totalitatea corpurilor fizice alcătuite din atomi (particule considerate invizibile). La noțiunea științifică de materie s-a ajuns în urma unor cercetări aprofundate de marii savanți, care au definit *materia ca o reflectare obiectivă a însușirilor esențiale ale obiectelor și fenomenelor lumii exterioare*. Materia este deci o categorie filozofică ce desemnează o realitate obiectivă și existentă independent de celelalte noțiuni filosofice.

Materia are o structură duală: *substanța* (materia discontinuă, discretă, concentrată) și *câmpul* (materia difuzată în spațiu și continuă). În mecanica newtoniană a fost luat în considerație numai primul aspect, cel de *substanță*.

O a doua problemă fundamentală a fost *problema mișcării*, care din cauza complexității ei a rămas nelucidată mii de ani. Timp de secole a dominat în știință concepția lui Aristotel asupra mișcării: “*un corp care se află în mișcare se oprește atunci când forța care acționează asupra lui își încetează acțiunea*”.

Galileo Galilei a introdus prima dată în mecanică *concepția științifică de studiu a mișcării*, demonstrând netemeinicia raționamentelor aristotelice. Galilei trece de la prima etapă a cunoașterii, utilizată de predecesorul său și bazată aproape exclusiv pe simple observații, la abstractizări ale fenomenului mișcării și apoi verificări experimentale - la practică. Concluziile lui Galilei au fost formulate cu o generație mai târziu de Newton, în celebrul *Principiu al inerției*.

Mișcarea este privită din acest moment ca o formă de existență a materiei, ca o însușire esențială a ei. *Mișcarea, ca și materia este veșnică, necreabilă și indistructibilă, având un caracter general, absolut, iar repausul are un caracter relativ și temporar*. Deci, prin mișcare se înțelege *orice fel de schimbare, transformare sau dezvoltare de natură fizică, chimică, sau fiziologică*. În concluzie mișcarea a fost definită ca *o formă de existență a materiei, un atribut intrinsec al materiei, care înglobează în sine toate schimbările și procesele care au loc în univers, începând cu simpla deplasare a unui punct material și terminând cu gândirea*. Obiectul științei îl

constituie deci studiul general al formelor de mișcare și al reflectării acestor mișcări în conștiința omului.

*Mecanica studiază una din cele mai simple forme de mișcare a materiei cunoscute sub numele de **mișcare mecanică**, definită ca fiind modificarea relativă a poziției unui corp, sau a unei părți a acestuia, în raport cu un alt corp considerat ca reper (sistem de referință).*

Noțiunea de *repaus* în Mecanică este relativă (definită ca nemodificare a poziției unui corp față de un reper sau sistem de referință) și trebuie considerată numai în raport cu un astfel sistem de referință, presupus ca fix.

Prin *reper* sau *sistem de referință* se înțelege un corp care nu-și schimbă forma și dimensiunile, la care se raportează *mișcarea mecanică*. De obicei, în Mecanică se folosește triedrul triortogonal drept (dextrators), studiul mișcării mecanice a corpurilor făcându-se în raport cu acest sistem de referință presupus ca fix. Cum în natură nu există nici un reper despre care să putem afirma că este fix, pentru studiul mișcării interplanetare toate reperele vor fi considerate în mod necesar mobile. Dintre aceste repere se distinge totuși o clasă de repere față de care legile mișcării se scriu sub o formă mai simplă și în care principiile de bază ale mecanicii (stabilite de Newton) rămân invariabile. Acestea se numesc *reperere inerțiale*. Un *reper inerțial* este deci un reper în care un corp punctiform (aflat la distanțe suficient de mari față alte corpuri, pentru a nu intra sub influența acestora) rămâne permanent în repaus sau în mișcare rectilinie și uniformă. Orice sistem de referință aflat într-o *mișcare de translație rectilinie și uniformă* față de un sistem inerțial este tot un sistem inerțial.

Diferența dintre *Mecanica clasică* și *mecanica relativistă* constă în modul de a privi noțiunile fundamentale ale mecanicii (*spațiul, timpul și masa*) ca forme concrete de manifestare a materiei, mai exact proprietățile atribuite lor.

Mecanica clasică, care din punct de vedere istoric a apărut prima, consideră cele trei noțiuni fundamentale (*spațiul, timpul și masa*) ca fiind absolut independente una față de alta și având următoarele proprietăți:

- *spațiul este infinit, tridimensional, continuu, omogen și izotrop*. Se utilizează spațiul euclidian în care sunt valabile axiomele geometriei euclidiene și principiile calculului diferențial și integral.
- *timpul este infinit, continuu, omogen, uniform crescător și ireversibil*.
- *masa este o mărime scalară, pozitivă invariabilă*, care reflectă proprietățile inerțiale și de gravitație ale materiei. Astfel avem:
 - *masa inertă* - o mărime fizică scalară pozitivă care reflectă proprietatea de inerție a materiei (măsura de inerție a unui corp în mișcare de translație) și ea intervine în legea fundamentală a mecanicii stabilită de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$;
 - *masa gravifică* - o mărime fizică scalară pozitivă care reflectă proprietatea materiei de a produce un câmp gravitațional (de a acționa asupra altor corpuri). Aceasta intervine în legea atracției universale, numită și legea gravitației

universale: $F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$, unde F este forța cu care se atrag reciproc două particule materiale de mase m_1 și m_2 situate la distanța r între ele.

În afara mărimilor fundamentale de mai sus, în Mecanică intervin frecvent o serie de mărimi derivate, cum ar fi: *forța*, *viteza*, *acelerația*, *impulsul*, *lucrul mecanic*, etc. *Forța* este definită ca fiind o mărime care măsoară interacțiunea mecanică dintre corpurile materiale și are caracter vectorial. Un rigid își schimbă starea de mișcare sau de repaus în interacțiunea cu alt rigid, forța fiind mărimea care caracterizează această interacțiune.

Mecanica relativistă privește noțiunile de *spațiu*, *timp* și *masă* ca formând o unitate indisolubilă și interdependente. Datorită acestei ipoteze noi, se modifică fundamental proprietățile noțiunilor fundamentale, astfel încât:

- *spațiul nu mai este omogen și izotrop.*
- *timpul nu mai este omogen.*
- *masa nu mai este invariabilă*, depinzând de viteza cu care se mișcă corpul.

Aceste noi ipoteze au fost acceptate în momentul în care au apărut primele rezultate experimentale care contraziceau concluziile calculului teoretic al mecanicii clasice. Aceste rezultate experimentale se refereau la mișcările cu viteze foarte mari ale particulelor atomice pentru care raportul dintre viteza particulei v și viteza luminii c nu poate fi neglijat în raport cu unitatea și pentru care trebuie aplicate principiile *Mecanicii relativiste*.

În cazul mișcărilor cu viteze mici (pentru care raportul dintre viteza particulei v și viteza luminii c poate fi neglijat în raport cu unitatea) se pot aplica foarte bine principiile *Mecanicii clasice*, diferențele dintre rezultatele aplicării acestor principii și cele ale *Mecanicii relativiste* fiind foarte mici.

Cum marea majoritate a mișcărilor întâlnite în tehnică sunt caracterizate de viteze mici în raport cu viteza luminii (astfel încât raportul dintre viteza corpului v și viteza luminii c poate fi neglijat în raport cu unitatea), ele se pot studia foarte bine cu ajutorul legilor mecanicii clasice, de unde rezultă și importanța practică a acestor legi.

2. Diviziunile Mecanicii clasice

În funcție de natura corpurilor studiate, Mecanica clasică are *trei mari ramuri*:

- a) *Mecanica teoretică* (newtoniană sau generală), care studiază corpurile rigide, legile sau principiile universale care stau la baza echilibrului sau mișcării lor, cu aplicații ale lor la sisteme de puncte materiale și corpuri solide rigide.
- b) *Mecanica solidelor deformabile* care studiază echilibrul corpurilor deformabile sub acțiunea forțelor, ținând seama de proprietățile materialelor din care sunt ele alcătuite (materiale elastice, plastice, vâsco-elastice etc). Această ramură are ca

subdiviziuni: Rezistența materialelor, Teoria elasticității și a plasticității, Mecanica ruperii, Teoria stabilității elastice, etc.

- c) *Mecanica fluidelor*, în cadrul căreia se studiază mișcările fluidelor ideale sau vâscoase, compresibile sau incompresibile și rezistența la înaintare pe care o opun aceste fluide corpurilor solide (Aeromecanica, Hidromecanica).

Prima ramură care a apărut ca ramură a științelor naturale (pe baza principiilor enunțate de Isaac Newton) a fost *Mecanica teoretică sau newtoniană*, din care s-au dezvoltat celelalte ramuri ale Mecanicii.

Importanța Mecanicii teoretice a constat în înrudirea ei cu celelalte ramuri, și în faptul că apariția și dezvoltarea ei a impulsat dezvoltarea tehnicii sau a unor capitole ale Matematicii cu care s-a aflat într-o interdependență continuă. Matematica a constituit un instrument de investigație de neînlocuit și eficient pentru orice știință a naturii și în special pentru Mecanică.

Mecanica teoretică a adoptat două modele pentru studiul corpurilor materiale. Aceste modele sunt:

- ***punctul material*** se definește ca fiind o particulă materială cu masă finită, cu dimensiuni neglijabile, asimilabil deci cu un punct geometric în care este concentrată întreaga sa masă;

Noțiunea de ***sistem discret de puncte materiale*** este modelul corespunzător pentru o mulțime finită de particule materiale de dimensiuni neglijabile, care interacționează mecanic între ele și ocupă un domeniu limitat în spațiu; această mulțime de particule materiale poate fi deformabilă sau nedeformabilă;

- ***continuumul material*** se definește ca fiind o mulțime infinită de particule materiale care interacționează mecanic între ele cae sunt *distribuite continuu* într-un domeniu sau ocupă orice volum oricât de mic al său.

Rigidul este un caz particular de *continuum material nedeformabil* cu dimensiuni și masă finite (pentru care distanța dintre oricare două puncte ale sale nu se modifică, indiferent de acțiunile suferite din exterior). Acest model este o abstractizare matematică, fiind utilizat cu succes în Mecanica teoretică, cunoscut fiind faptul că toate corpurile reale sunt deformabile.

În expunerea cursului de ***Mecanică teoretică***, se preferă adesea împărțirea în următoarele trei diviziuni:

1. **Statica** - studiază forțele care acționează asupra sistemelor materiale, făcând abstracție de mișcarea lor, determinându-se clasa sistemelor de forțe echivalente. În particular, Statica se ocupă de subclasa sistemelor de forțe care își fac echilibru.
2. **Cinematica** - studiază mișcarea sistemelor materiale, făcând abstracție de forțele care acționează asupra lor și de masa acestora.
3. **Dinamica** - studiază mișcările sistemelor materiale în interacțiunea lor reciprocă și sub acțiunea forțelor exterioare și de legătură.

3. Scurt istoric al mecanicii

Istoria dezvoltării mecanicii este strâns legată de istoria dezvoltării societății omenești. Mecanica s-a dezvoltat din nevoia de a rezolva probleme pe care viața de toate zilele le-a pus oamenilor din cele mai vechi timpuri: construirea de clădiri, navigația pe ape, transportul pe uscat, etc.

La dezvoltarea Mecanicii au contribuit savanți de renume mondială a căror simplă înșiruire ar necesita mult spațiu. De aceea ne vom limita la a aminti doar câteva nume dintre cele mai importante.

Se disting trei etape în istoria dezvoltării Mecanicii:

A. *Prima etapă* a studiilor de mecanică a fost legată de tehnica construcțiilor masive, specifice antichității și care a pus bazele Staticii. Cercetările cele mai importante din această perioadă sunt cele ale lui **Aristotel** (384 - 322 î.e.n.) și **Arhimede** (287 - 212 î.e.n.) privind descoperirea forțelor, a echilibrului pârghiei și a centrului de greutate. Evul mediu, nu aduce nimic nou în domeniul Mecanicii.

B. *A doua etapă* începe odată cu Renașterea, caracterizată prin dezvoltarea comerțului (și deci a căilor de comunicație pe apă și pe uscat), când studiul Mecanicii ia din nou avânt. Amintim pe **Leonardo da Vinci** (1452 - 1519) marele pictor, savant și inginer italian care a studiat frecarea corpurilor și a enunțat principiul imposibilității mișcării perpetue (*perpetuum mobile*), **Nicolae Copernic** (1473 - 1543), astronom polonez, care a pus bazele teoriei heliocentrice, **Johannes Kepler** (1571-1630), astronom german, care a stabilit legile care-i poartă numele.

Întemeietorii Mecanicii clasice rămân însă cei doi mari savanți, italianul **Galileo Galilei** (1564 - 1642) și englezul **Isaac Newton** (1642 - 1727).

Galileo Galilei a studiat legile căderii corpurilor. El a răsturnat concepția aristotelică asupra inerției și a enunțat *principiul inerției* într-o formă mult mai clară. Tot el a enunțat și *principiul condițiilor inițiale*.

Isaac Newton, a preluat tot ceea ce a fost mai valoros de la predecesorul său și a pus bazele Mecanicii clasice care-i poartă numele. El a definit *cele trei principii fundamentale* ale Mecanicii și a descoperit *legea gravitației universale*.

C. *A treia etapă* a dezvoltării Mecanicii în secolul al XX –lea a fost marcată de contribuția unor mari savanți din care amintim pe **Albert Einstein** (1879 - 1955) creatorul celebrei *teorii a relativității* care stă la baza fizicii moderne, Einstein aduce o analiză critică a principiilor care stau la baza Mecanicii clasice, analiză care a condus la apariția *Mecanicii relativiste*, a *Mecanicii cuantice* și *Mecanicii statistice*.

Succese remarcabile s-au obținut în ultima jumătate a secolului al XX -lea prin: lansarea de sateliți artificiali în jurul pământului și ai altor planete începând din 1957; debarcarea primului om pe lună în 1969; lansarea de nave spațiale de

observație interplanetară, începând din anul 1970; apariția și dezvoltarea metodelor și tehnicilor moderne de calcul, etc.

Dintre cercetătorii români care au adus contribuții în dezvoltarea Mecanicii amintim:

- **Spiru Haret** (1851 -1912) care a adus contribuții în Mecanica corpurilor cerești;
- **Andrei Ioachimescu** (1868- 1943), **Ioan Ionescu** (1870 - 1946), ambii profesori la Politehnica din București, care au elaborat lucrări valoroase în domeniul Mecanicii teoretice;
- Matematicienii de renume mondial: **Dimitrie Pompei** (1873 - 1954), **Traian Lalescu** (1882 - 1929), **Victor Vâlcovici** (1885 - 1970), **Rudolf Voinaroski** (1910-1973) , **Caius Iacob** (1912-1992) și alții, care au adus contribuții valoroase și în Mecanică.

CAPITOLUL 1

NOȚIUNI DE ALGEBRĂ VECTORIALĂ

1.1. Mărimi scalare și vectoriale.

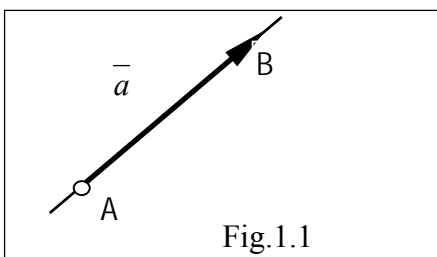
Clasificarea vectorilor.

Cu toate că elementele de algebră vectorială sunt prezentate în cadrul cursurilor de Matematică, considerăm totuși oportună, înainte de a trece la tratarea propriu-zisă a problemelor de Mecanică, o prezentare sumară a celor mai importante noțiuni și elemente de Algebră vectorială necesare înțelegerii Mecanicii teoretice. Calculul vectorial este o aplicație matematică care a apărut prima dată în Mecanică.

Mărimile fizice pentru a căror caracterizare completă este suficient un scalar (adică un număr pozitiv sau negativ) se numesc *mărimi scalare* (de exemplu: lungimea, masa, timpul, intensitatea câmpului magnetic, temperatura, etc).

S-a constatat că există unele mărimi fizice pentru a căror caracterizare nu este suficientă mărimea lor, ci și a unor parametri care definesc *direcția și sensul de acțiune*, iar în unele cazuri coordonatele punctului de aplicație al lor (de exemplu: forța, viteza, accelerația, impulsul, momentul cinetic, etc). Aceste mărimi sunt numite *vectori*. Prin urmare din punct de vedere geometric, un vector \overline{AB} este caracterizat prin următoarele patru elemente (fig. 1.1):

1. Punctul de aplicație sau originea A.
2. Suportul său (sau direcția), care este definită de dreapta AB.
3. Sensul de parcurs de la A la B.
4. Mărimea vectorului, modulul sau intensitatea sa (un număr pozitiv), în acest caz, lungimea segmentului AB.



Mărimea vectorului se reprezintă prin $|\overline{AB}| = |\vec{a}| = a$ și are din punct de vedere matematică, semnificația unei norme.

Din punct de vedere al originii vectorilor (sau punctului de aplicație) deosebim:

- *vectori liberi*, a căror origine poate ocupa orice poziție în spațiu (cu păstrarea mărimii, direcției și sensului), fără ca efectul lui să se schimbe (de exemplu: cuplul a doi vectori, viteza unui rigid în mișcare de translație, viteza unghiulară a unui rigid, etc);
- *vectori alunecători*, a căror origine poate ocupa orice poziție pe suportul propriu, cu păstrarea (direcției) mărimii și sensului (de exemplu: forța ce acționează asupra unui rigid);

- *vectori legați*, a căror origine poate ocupa doar o singură poziție în spațiu (într-un anumit punct, cum ar fi de exemplu forța ce acționează asupra unui punct, momentul unei forțe în raport cu un punct).

Noțiunea de *vector echipolent* cu un vector dat \vec{a} se folosește pentru a caracteriza mulțimea tuturor *vectorilor liberi* având suporturi paralele cu suportul lui \vec{a} , același sens și aceeași mărime cu vectorul \vec{a} .

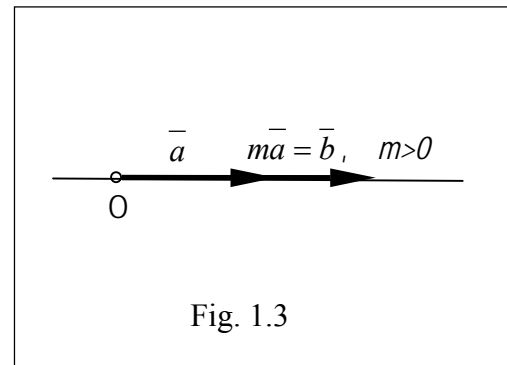
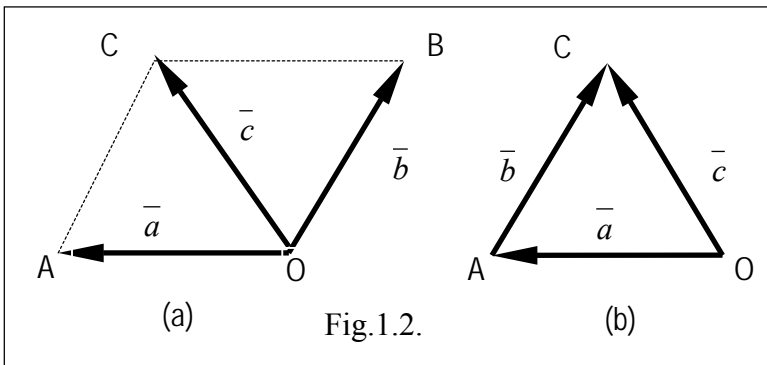
1.2. Însușirea vectorilor și înmulțirea cu un scalar

Suma a doi vectori \vec{a} și \vec{b} este prin definiție un vector \vec{c} reprezentând diagonala paralelogramului construit cu ajutorul vectorilor \vec{a} și \vec{b} , vectori având originea comună (*regula paralelogramului*, fig.1.2.a.):

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (1.1)$$

Suma a doi vectori se obține și cu *regula poligonului*: dacă se construiește un vector echipolent cu vectorul \vec{b} , având originea în vârful vectorului \vec{a} , unind originea primului vector cu vârful ultimului vector, obținând vectorul \vec{c} (fig.1.2.b.).

Se observă din fig.1.2, că cele două reguli, *a paralelogramului* și *a poligonului*, conduc la același rezultat.



Adunarea vectorilor are următoarele proprietăți:

- *comutativitate*: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (1.2)
- *asociativitate* $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (1.3)
- *înmulțirea lui \vec{a} cu un scalar m* , este prin definiție un vector \vec{b} având mărimea $|\vec{b}| = m|\vec{a}|$ și care are același suport și același sens cu vectorul \vec{a} , dacă $m > 0$, respectiv același suport și sens opus lui \vec{a} , dacă $m < 0$, și (fig.1.3).
- fiind date numerele reale m și n , se verifică următoarele identități:

$$m(n \cdot \vec{a}) = n(m \cdot \vec{a}) = m \cdot n \cdot \vec{a} \quad (1.4)$$

$$(m + n)\vec{a} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a} \quad (1.5)$$

$$m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b} = m(\vec{a} + \vec{b}) \quad (1.6)$$

1.3. Versor sau vector unitate

Fie $\vec{a} \neq 0$ un vector liber. Se numește *versor a lui \vec{a}* , un vector liber \vec{u}_a care are suportul paralel cu suportul lui \vec{a} , același sens cu vectorul \vec{a} și mărimea egală cu unitatea : $|\vec{u}_a| = U = 1$.

$$\text{Avem evident: } \vec{u}_a = \text{vers } \vec{a} = \vec{a} / |\vec{a}| \quad (1.7.)$$

$$\text{sau: } \vec{a} = a \cdot \vec{u}_a \quad (1.8.)$$

unde: $a = |\vec{a}|$ este modulul vectorului \vec{a} .

1.4. Reprezentarea unui vector liber într-o bază ortonormată

Se consideră un sistem de axe de coordonate triortogonal drept Oxyz și un vector liber \vec{a} reprezentat prin proiecțiile sale ortogonale pe axele Ox, Oy și Oz (fig.1.4.a) pe care le numim *componentele scalare ale vectorului \vec{a}* în sistemul de axe Oxyz, notate cu a_x , a_y , a_z (spre deosebire de *componentele vectoriale* ale lui \vec{a} care sunt $a_x \vec{i}$, $a_y \vec{j}$ și respectiv $a_z \vec{k}$).

Dacă $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versorii axelor Ox, Oy și Oz, în conformitate cu (1.8.) *reprezentarea vectorului \vec{a} în baza ortonormată formată cu vectorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$* (sau expresia analitică a vectorului \vec{a}) se scrie: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ (1.9)

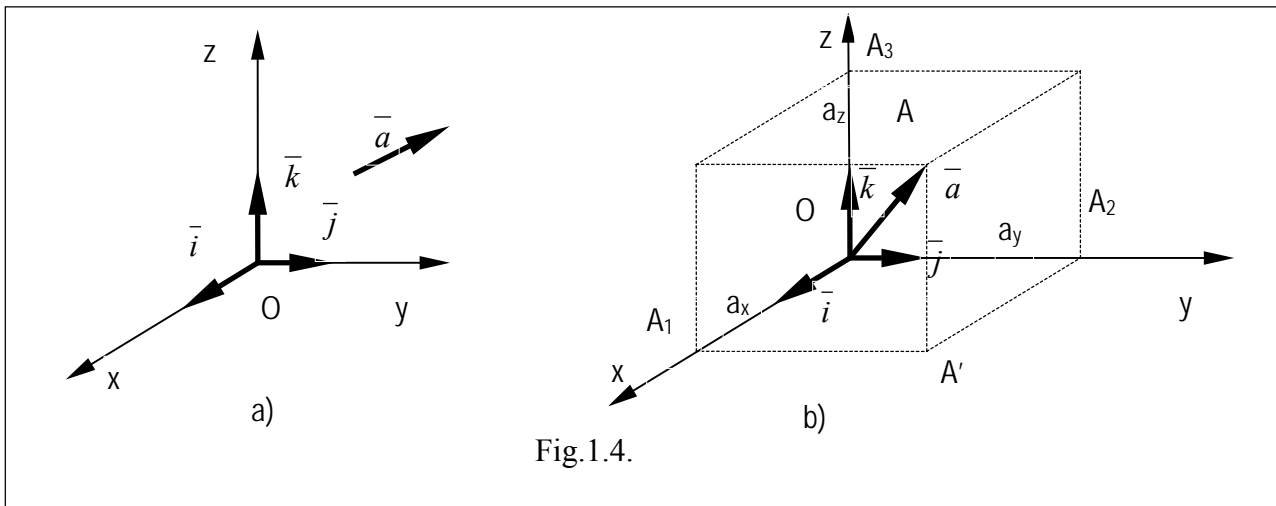


Fig.1.4.

Vectorii bazei fiind perpendiculari doi câte doi și având mărimile egale cu unitatea, baza se numește *ortogonală și normată* sau mai pe scurt *ortonormată*. *Mărimea (norma) vectorului \vec{a}* este un număr pozitiv și se calculează cu relația:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.10)$$

iar *cosinuzii directori ai direcției vectorului \vec{a}* sunt dați de relațiile:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a} \quad (1.11)$$

Vectorul \bar{a} se mai scrie și $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$; dacă $\bar{a} = \bar{0}$ atunci avem: $a_x = 0, a_y = 0, a_z = 0$.

Dacă construim un vector \bar{r} echipolent cu vectorul \bar{a} , reprezentat cu originea în punctul O (originea sistemului de axe) și vârful în punctul A(x,y,z) (fig.1.4.b): $\overline{OA} = \bar{r}$, care se numește *vectorul de poziție* al punctului A și are expresia:

$$\overline{OA} = \bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} \quad (1.12)$$

$$\text{prin urmare: } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}. \quad (1.13)$$

1.5. Paralelismul și coplanaritatea vectorilor

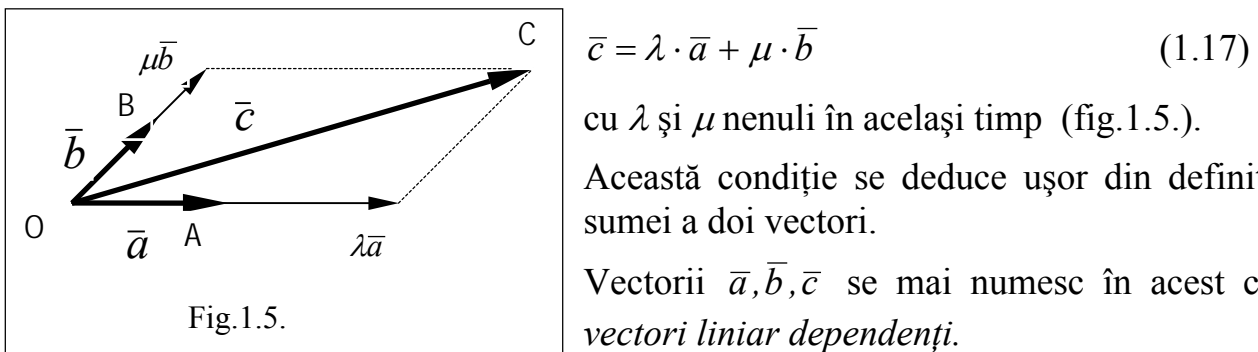
Din cele de mai sus rezultă condiția necesară și suficientă de paralelism a doi vectori $\bar{a} \neq 0$ și $\bar{b} \neq 0$ (adică vectorii să aibă suporturile paralele): este deci să existe un număr λ astfel încât: $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$ (1.14)

$$\text{sau: } a_x = \lambda \cdot b_x, \quad a_y = \lambda \cdot b_y, \quad a_z = \lambda \cdot b_z \quad (1.15)$$

deci, doi vectori \bar{a}, \bar{b} sunt paraleli dacă și numai dacă între componentele lor există relația de proporționalitate:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (1.16)$$

Condiția necesară și suficientă de coplanaritate a trei vectori $\bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0$ și $\bar{c} \neq 0$ aceasta este ca între ei să existe o relație de forma:



$$\bar{c} = \lambda \cdot \bar{a} + \mu \cdot \bar{b} \quad (1.17)$$

cu λ și μ nenuli în același timp (fig.1.5.).

Această condiție se deduce ușor din definiția sumei a doi vectori.

Vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ se mai numesc în acest caz *vectori liniar dependenți*.

1.6. Produsul scalar a doi vectori . Definiție.

Proprietăți. Expresie analitică.

Fiind dați doi vectori liberi \bar{a}, \bar{b} pe care îi putem reprezenta prin vectorii echipolenți aplicați în O (fig.1.6.), se definește *produsul scalar al celor doi vectori* (notat prin $\bar{a} \cdot \bar{b}$ sau prin $\overline{a\bar{b}}$) *scalarul*: $\bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cos \theta$ (1.18)

unde: $\theta = \angle(\bar{a}, \bar{b})$ este unghiul dintre cei doi vectori

Din fig.1.6 și din formula (1.18) se observă ușor că produsul scalar al vectorilor \bar{a}, \bar{b} mai poate fi exprimat în funcție de proiecțiile ortogonale ale acestor vectori unul pe direcția celuilalt, sub forma:

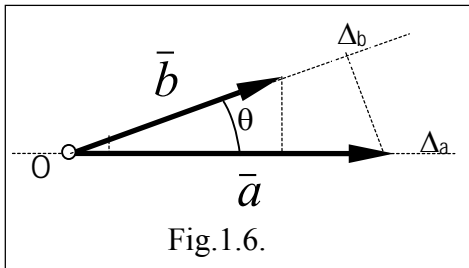


Fig.1.6.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot pr_{\bar{a}} \bar{b} = b \cdot pr_{\bar{b}} \bar{a} \quad (1.19)$$

Din relația (1.19), rezultă imediat că proiecția unui vector \bar{v} pe o axă (Δ) de un versor \bar{u} este un scalar care se poate scrie :

$$pr_{\Delta} \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u} \quad (1.20)$$

Produsul scalar are următoarele *proprietăți* (relativ ușor de demonstrat):

- *comutativitate*: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (1.21)

- *distributivitate față de sumă*: $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ (1.22)

- oricare ar fi scalarii m și n avem: $(m \cdot \bar{a})(n \cdot \bar{b}) = m \cdot n \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}$ (1.23)

- produsul scalar a doi vectori identici: $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = a^2$ (1.24)

- produsul scalar este nul $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ dacă:

$$\bar{a} = 0 \text{ sau } \bar{b} = 0 \text{ sau } \bar{a} \perp \bar{b}. \quad (1.25)$$

Plecând de la *expresia analitică a vectorilor* \bar{a}, \bar{b} :

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k} \quad (1.26)$$

și ținând seama de relațiile vectoriale evidente:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1; \quad \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0 \quad (1.27)$$

se obține *expresia analitică a produsului scalar*:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.28)$$

În baza acestei relații se pot calcula:

a) unghiul dintre doi vectori \bar{a} și \bar{b} :

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \cos \theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (1.29)$$

b) unghiul dintre un vector \bar{a} și axele de coordonate; de exemplu unghiul dintre vectorul \bar{a} și axa Ox:

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{i}}{a \cdot 1} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \quad (1.30)$$

Cosinusurile celor trei unghiuri formate de \bar{a} cu Ox, Oy, Oz (numite și *cosinuși directori ai direcției* \bar{a}) satisfac relația cunoscută din geometria analitică:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.31)$$

În particular, dacă $\bar{a} = \bar{b}$, avem expresia mărimii (normei) vectorului \bar{a} , adică:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

și deci: $|\bar{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1.32)

De aici rezultă expresia versorului unui vector \bar{a} : (1.33)

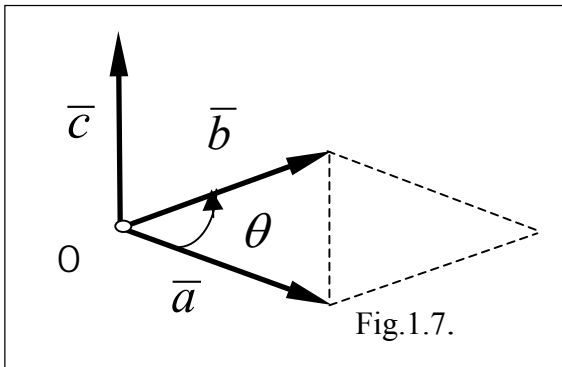
$$\bar{u}_a = \text{vers}\bar{a} = \frac{\bar{a}}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \bar{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \bar{j} + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \bar{k}$$

sau ținând seama de (1.30): $\bar{u}_a = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j} + \cos \gamma \cdot \bar{k}$ (1.33')

Deci condiția de ortogonalitate (1.25) a doi vectori \bar{a}, \bar{b} se exprimă analitic astfel: $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ (1.34)

1.7. Produsul vectorial a doi vectori. Definiție.

Proprietăți. Expresia analitică.



Fiind dați doi vectori liberi \bar{a}, \bar{b} reprezentați prin vectorii echipolenți, cu originea în O (fig1.7), li se atașează un vector \bar{c} numit produs vectorial al lui \bar{a} și \bar{b} , notat prin:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} \quad (1.35)$$

definit ca un vector liber, având următoarele caracteristici:

- *mărimea*: $c = a \cdot b \cdot \sin \theta$, unde: $\theta = \angle(\bar{a}, \bar{b})$ (1.36)
se observă din fig.1.7, că mărimea lui c reprezintă dublul ariei triunghiului format de cei doi vectori \bar{a}, \bar{b} aplicați în punctul O sau aria paralelogramului;
- *direcția*: \bar{c} este perpendicular pe planul definit de vectorii \bar{a}, \bar{b} ;
- *sensul* este astfel ales, încât un observator așezat în lungul suportului lui \bar{c} (în același sens cu sensul lui \bar{c}) să vadă rotația vectorului \bar{a} peste vectorul \bar{b} efectuându-se cu cel mai mic unghi θ (θ mai mic decât π) în sens orar sau invers trigonometric, sau sensul este dat de regula șurubului drept (fig. 1.7).

Produsul vectorial are următoarele *proprietăți*, relativ ușor de demonstrat:

1. *necomutativitate*: $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ (1.37)

2. *asociativitate la înmulțirea cu scalari*: $(m\bar{a}) \times (n\bar{b}) = mn\bar{a} \times \bar{b}$ (1.38)

3. *distributivitate față de sumă*: $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (1.39)

4. *produsul vectorial este nul*: $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, dacă:

$$\bar{a} = 0 \text{ sau } \bar{b} = 0 \text{ sau } \bar{a} \neq 0 \text{ este paralel cu } \bar{b} \neq 0 \quad (1.40)$$

Din ultima proprietate rezultă condiția de paralelism a doi vectori nenuli.

Fie vectorii \bar{a}, \bar{b} exprimați analitic în baza versorilor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ cu ajutorul relațiilor (1.26). Ținând seama de proprietățile evidente ale versorilor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\begin{aligned} \bar{i} \times \bar{i} &= 0, & \bar{i} \times \bar{j} &= \bar{k}, & \bar{j} \times \bar{i} &= -\bar{k} \\ \bar{j} \times \bar{j} &= 0, & \bar{j} \times \bar{k} &= \bar{i}, & \bar{k} \times \bar{j} &= -\bar{i} \\ \bar{k} \times \bar{k} &= 0, & \bar{k} \times \bar{i} &= \bar{j}, & \bar{i} \times \bar{k} &= -\bar{j} \end{aligned} \quad (1.41)$$

și de definiția produsului vectorial, *expresia analitică* a produsului vectorial este:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} \quad (1.42)$$

care în scriere formală, mai poate fi exprimat sub forma determinantului:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.43)$$

1.8. Produsul mixt a trei vectori

Fiind dați vectorii liberi $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, aplicați în punctul O, se definește *produsul mixt* al celor trei vectori scalarul: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Ținând seama de relațiile (1.34), (1.42) și (1.43) rezultă că produsul mixt se poate scrie formal astfel:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.44)$$

Se poate demonstra ușor următoarea proprietate de *permutativitate circulară*:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b} \quad (1.45)$$

precum și condiția ca produsul mixt să fie nul:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0 \text{ dacă și numai dacă: } \bar{a} \parallel \bar{b} \text{ sau } \bar{b} \parallel \bar{c} \text{ sau } \bar{c} \parallel \bar{a} \quad (1.46)$$

sau $\bar{a} = \lambda \bar{b} + \mu \bar{c}$ adică $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, sunt coplanari sau liniari dependenți.

1.9. Produsul dublu vectorial a trei vectori

Fiind dați vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ se definește *produsul dublu vectorial* al celor trei vectori, vectorul: $\bar{d} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ (1.47)

Folosind formulele (1.28) și (1.43) se obține formula de descompunere a produsului dublu vectorial:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{c} \quad (1.48)$$

Practic, pentru a efectua produsul dublu vectorial $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, nu se folosește formula (1.48) ci se procedează la efectuarea produsului vectorial $(\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{d}$ după care se efectuează produsul vectorial $\bar{a} \times \bar{d}$.

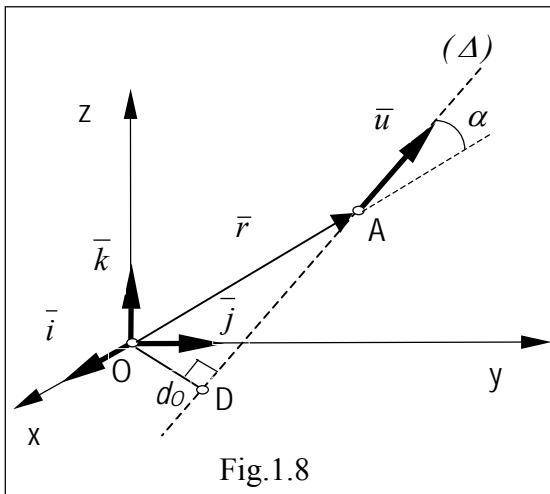
1.10. Coordonatele plückeriene ale unei direcții

Dându-se o direcție (Δ) caracterizată prin versorul \bar{u} (fig 1.8), se definesc coordonatele plückeriene ale direcției Δ , printr-o matrice ale cărei elemente sunt:

- componentele versorului \bar{u} notate aici cu (a,b,c) ; deci conform relației (1.33') \bar{u} se scrie: $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$, $a = \cos \alpha$; $b = \cos \beta$; $c = \cos \gamma$ (1.49)
- componentele vectorului: $\bar{r} \times \bar{u} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$; conform definiției se scrie:

$$\bar{r} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = (yc - zb)\bar{i} + (za - xc)\bar{j} + (xb - ya)\bar{k} \quad (1.50)$$

unde: \bar{r} este vectorul de poziție al unui punct oarecare A de pe axa (Δ) în raport cu originea sistemului de axe ales: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$



Rezultă după identificare:

$$l = yc - zb; \quad m = za - xc; \quad n = xb - ya \quad (1.51)$$

Deci coordonatele plückeriene ale direcției (Δ) se scriu sub forma matricii coloană:

$$[u] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ yc - zb \\ za - xc \\ zb - ya \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Coordonatele plückeriene ale unei direcții au următoarele proprietăți evidente :

$$a. \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (1.54)$$

$$b. \quad l^2 + m^2 + n^2 = |\bar{r} \times \bar{u}|^2 = |\bar{r}|^2 |\bar{u}|^2 \sin^2 \alpha = d_0^2 \quad (1.55)$$

unde $d_0 = OD$, este distanța de la punctul O la dreapta (Δ) (fig. 1.8).

În cazul unui sistem de drepte în spațiu (Δ_i) $i=1,2,\dots,n$ se definește *matricea coordonatelor plückeriene corespunzătoare sistemului* având coloanele formate din coordonatele plückeriene ale fiecărei direcții (Δ_i):

$$[U] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_n \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_n \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Este evident faptul că rangul maxim al acestei matrici ($6 \times n$) este 6.

CAPITOLUL 2

STATICA PUNCTULUI MATERIAL

2.1. Noțiuni introductive

Punctul material, definit în capitolul introductiv, este o particulă materială ale cărei dimensiuni pot fi neglijate. În mecanică punctul material are masa egală cu masa corpului material pe care îl reprezintă.

Punctul material liber este un punct material care poate ocupa orice poziție în spațiu. În general pozițiile pe care le ocupă punctul material în spațiu sunt determinate de forțele ce acționează asupra lui și sunt definite la un moment dat de trei parametri scalari independenți, de obicei coordonatele carteziene ale punctului (x, y, z). Spunem că punctul material liber are *trei grade de libertate*.

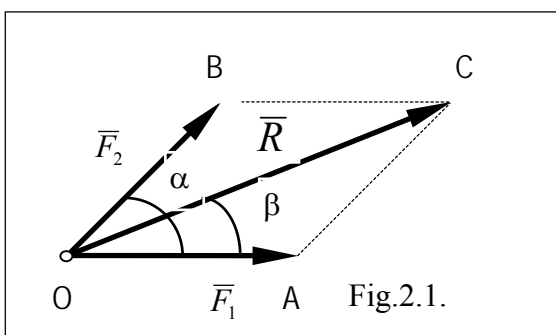
Punctul material supus la legături, este obligat să ocupe din punct de vedere geometric, anumite poziții în spațiu: astfel dacă este obligat să rămână pe o suprafață, spunem că are *două grade de libertate*, dacă este obligat să rămână pe o curbă are *un singur grad de libertate*, iar dacă este obligat să rămână fix în spațiu, *nu mai are nici un grad de libertate*.

Din punct de vedere al tipului legăturilor punctului material, ele pot fi:

- a) *legături bilaterale* - când restricția geometrică nu permite punctului să părăsească suprafața în ambele sensuri ale normalei la suprafață (de exemplu, o bilă între două suprafețe plane paralele);
- b) *legături unilaterale* - când restricția geometrică nu permite punctului să părăsească suprafața într-un singur sens al normalei la suprafață (de exemplu: o bilă pe o suprafață oarecare, sau o bilă într-un semicilindru).

2.2. Reducerea forțelor aplicate punctului material. Principiul paralelogramului.

Fie un punct material O și două forțe \vec{F}_1, \vec{F}_2 , acționând simultan asupra acestui punct. (forțele \vec{F}_1, \vec{F}_2 sunt cunoscute ca mărime, direcție și sens).



Experiența arată că în aceste condiții, cele două forțe pot fi înlocuite cu una singură, numită *forța rezultantă*:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2.1)$$

Mărimea, direcția și sensul *rezultantei* sunt date de *diagonala paralelogramului* construit cu ajutorul vectorilor celor

două forțe și care sunt vectori legați (fig.2.1).

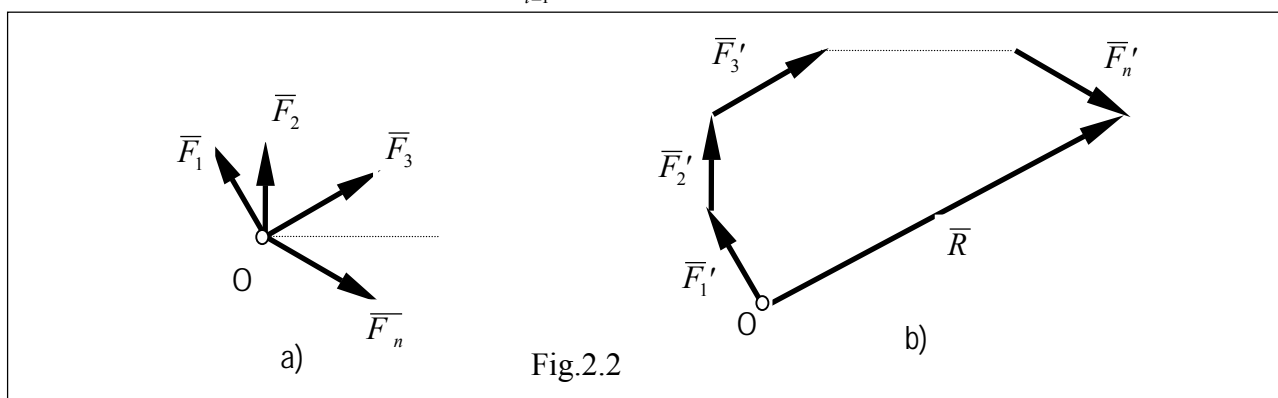
$$\text{Mărimia rezultantei este dată de: } |\bar{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2.2)$$

Poziția rezultantei în raport cu cei doi vectori este dată de relațiile teoremei

$$\text{sinusurilor: } \frac{|\bar{F}_1|}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{|\bar{F}_2|}{\sin \beta} = \frac{|\bar{R}|}{\sin \alpha} \quad (2.3)$$

Extinzând această regulă pentru cazul când asupra punctului material acționează mai mult de două forțe, se ajunge la o construcție grafică, cunoscută sub numele de *poligonul forțelor*. Dacă se consideră forțele concurente $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ cunoscute ca mărime, direcție și sens (fig.2.2.a) și se construiesc *vectorii echipolenți* $\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \bar{F}'_3, \dots, \bar{F}'_n$ (fig.2.2.b.) aplicându-se succesiv *regula paralelogramului*, se obține vectorul \bar{R} având originea în O și vârful în extremitatea ultimului vector echipolent \bar{F}'_n , vector numit *rezultanta sistemului de forțe*. Această rezultantă se scrie astfel:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (2.4)$$



Observații

- regula poligonului nu introduce restricții în privința suporturilor forțelor concurente: acestea pot ocupa orice poziție în spațiu;
- dacă forțele concurente sunt coplanare, poligonul forțelor este plan, iar dacă forțele concurente sunt spațiale, poligonul forțelor este spațial; astfel, în cazul a trei forțe concurente, rezultanta este dată pe diagonala paralelipipedului având ca muchii forțele date.

Alegând un sistem de axe de coordonate $Oxyz$ și notând cu (X_i, Y_i, Z_i) proiecțiile forței \bar{F}_i pe cele trei axe: $\bar{F}_i = X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}$ și cu (X, Y, Z) proiecțiile rezultantei pe aceleași axe: $\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$, avem:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n (X_i\bar{i} + Y_i\bar{j} + Z_i\bar{k}) = (\sum X_i)\bar{i} + (\sum Y_i)\bar{j} + (\sum Z_i)\bar{k}$$

Înlocuind aceste expresii în (2.4.) se obțin relațiile de calcul a componentelor rezultantei :

$$X = \sum X_i; \quad Y = \sum Y_i; \quad Z = \sum Z_i \quad (2.5)$$

Aceste relații exprimă cunoscuta **teoremă a proiecțiilor**: “proiecția rezultantei pe o axă este egală cu suma proiecțiilor tuturor forțelor pe acea axă”.

a) În particular, dacă $\bar{R} = 0$, poligonul forțelor se închide și sistemul de forțe este în echilibru.

b) Mărimea rezultantei este dată de : $|\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, (2.6)

iar cosinuşii directori de:

$$\cos \alpha = \frac{X}{|\bar{R}|}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{|\bar{R}|}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{|\bar{R}|}. \quad (2.7)$$

c) Dacă forțele concurente sunt coplanare (în planul Oxy), atunci proiecțiile pe axa Oz sunt nule ($Z=0$) și relațiile anterioare devin:

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i, \quad |\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X} \quad (2.8)$$

unde α este unghiul dintre rezultanta \bar{R} și axa Ox .

d) Pentru anumite condiții (când numărul necunoscutelor este egal cu numărul de ecuații independente de care dispunem) se poate face descompunerea unică a rezultantei după mai multe direcții concurente.

2.3. Echilibrul forțelor aplicate punctului material

Pentru exprimarea condiției de repaus al unui punct material liber, se folosește:

- **principiul inerției**: “Un punct material liber asupra căruia nu acționează nici o forță, rămâne tot timpul în repaus sau mișcare rectilinie și uniformă față de un reper considerat fix, dacă inițial se găsea în această stare”;
- **principiul acțiunii forței** cu enunțul: “Variația cantității de mișcare a unui punct material liber este proporțională cu forța motoare imprimată și dirijată după direcția de acțiune a forței”.

Rezultă **teorema de echilibru** a punctului material liber: “Condiția necesară și suficientă ca un punct material liber, aflat inițial în repaus, să continue să rămână în repaus sub acțiunea unui sistem de forțe dat, este ca acest sistem să fie în echilibru, adică rezultanta sa să fie egală cu zero”.

Într-adevăr, din **principiul inerției** și al **acțiunii forței**, pentru ca punctul material să continue să rămână în repaus, atunci când asupra sa acționează un sistem de forțe concurente, trebuie ca *sistemul să fie echivalent cu zero*. În baza **principiului paralelogramului** această condiție este îndeplinită dacă și numai dacă există relația:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0 \quad (2.9)$$

Proiectând această *ecuație vectorială de echilibru* pe axele sistemului de coordonate $Oxyz$ se obțin *condițiile scalare de echilibru*:

$$X = \sum X_i = 0; \quad Y = \sum Y_i = 0; \quad Z = \sum Z_i = 0. \quad (2.10)$$

Dacă sistemul de forțe este coplanar (în planul Oxy), atunci $Z=0$ indiferent dacă forțele sunt în echilibru sau nu și ultima condiție $\sum Z_i = 0$ devine o identitate, condițiile de echilibru în acest caz se scriu:

$$X = \sum X_i = 0; \quad Y = \sum Y_i = 0. \quad (2.11)$$

În cazul particular când forțele sunt coliniare (de exemplu pe axa Ox), condiția de echilibru devine:

$$X = \sum X_i = 0. \quad (2.12)$$

Problema existenței soluțiilor (dacă ecuațiile (2.10) sunt suficiente sau nu pentru rezolvarea problemei echilibrului punctului material liber) este legată de compatibilitatea sistemului de ecuații respectiv. În general, problema echilibrului punctului material liber are soluție unică, dacă numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuații independente.

În problemele de echilibru al punctului material liber se întâlnesc următoarele trei situații:

- se dau forțele care acționează asupra punctului și se cere să se determine poziția lui;
- se cunoaște poziția punctului și se cer forțele care acționează asupra acestuia;
- se cunosc o parte din forțe și o parte din parametrii care caracterizează poziția punctului și se cer celelalte forțe și ceilalți parametri ce determină poziția lui.

Aplicație

Un inel O este acționat în plan vertical de trei forțe (greutățile G_1 , G_2 , G_3) prin intermediul unor fire, trecute peste doi scripeți A și B fără frecare (fig. 2.3.a.). Se cere să se determine poziția de echilibru a inelului.

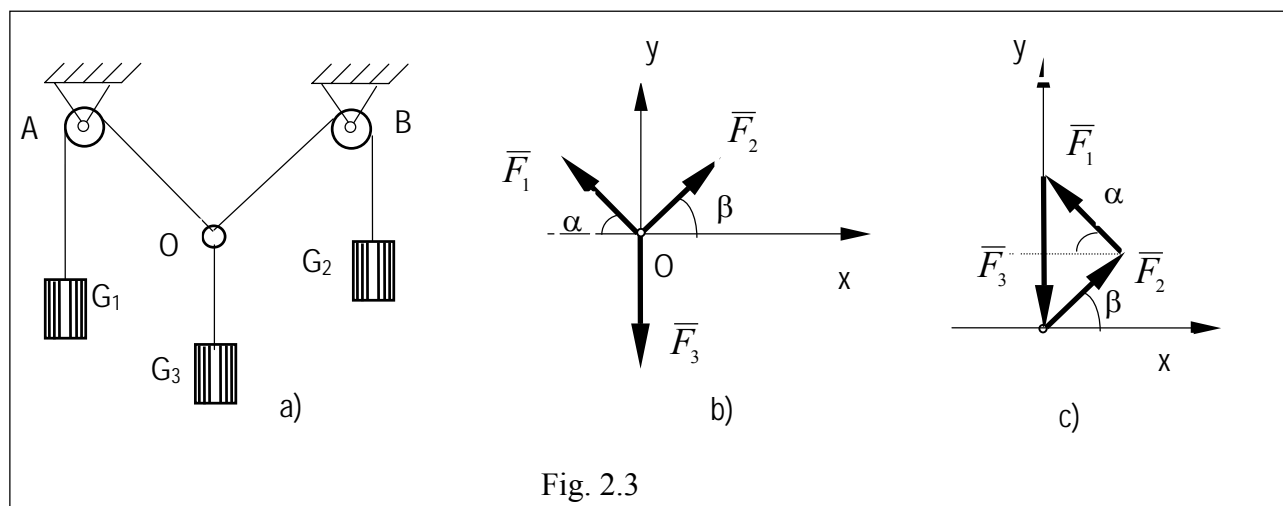


Fig. 2.3

Rezolvare:

Se aleg ca parametri (necunoscuți) unghiurile α și β pe care le fac firele cu direcția orizontală și un sistem de axe orientat convenabil în planul vertical (fig.2.3.b). Se izolează inelul, care se reduce la un punct material asupra căruia acționează forțele: \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 cu: $|\bar{F}_1| = G_1$, $|\bar{F}_2| = G_2$, $|\bar{F}_3| = G_3$.

Ecuția vectorială de echilibru este: $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$

Problema fiind plană se scriu două ecuații scalare de echilibru (ecuațiile de proiecții):

$$(\sum X_i = 0): \quad -G_1 \cos \alpha + G_2 \cos \beta = 0$$

$$(\sum Y_i = 0): \quad G_1 \sin \alpha + G_2 \sin \beta - G_3 = 0$$

Rezolvând acest sistem se obțin soluțiile:

$$\sin \alpha = \frac{G_1^2 + G_3^2 - G_2^2}{2G_1G_3}, \quad \sin \beta = \frac{G_2^2 + G_3^2 - G_1^2}{2G_2G_3}.$$

Pentru ca soluțiile să aibă sens trebuie să fie îndeplinită condiția:

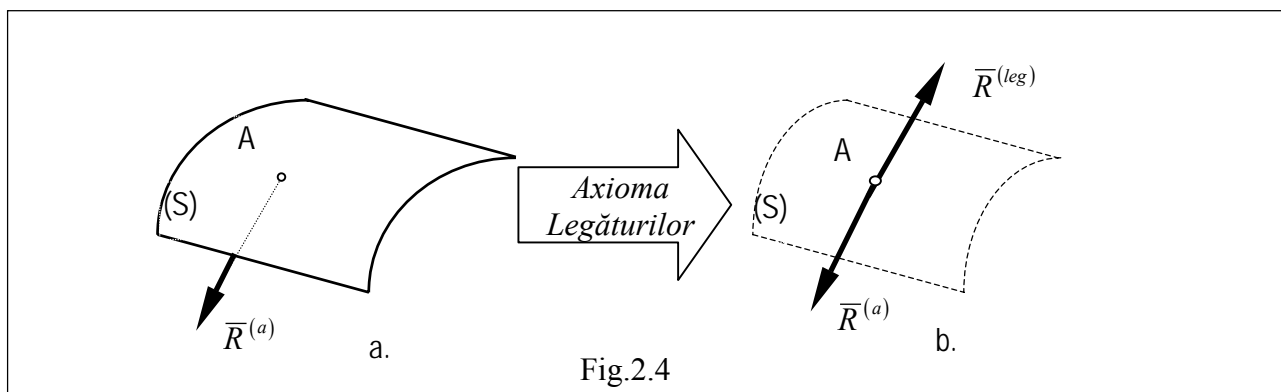
$$0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}, \quad \text{adică: } 0 < \sin \alpha < 1 \quad \text{și} \quad 0 < \sin \beta < 1$$

și deci: $|G_1 - G_3| < G_2$ și $|G_2 - G_3| < G_1$ (a)

Soluția geometrică este reprezentată în figura 2.3.c și respectă condițiile (a).

2.4. Punctul material supus la legături. Axioma legăturilor

Se consideră următoarea problemă: fie un punct material A, aflat în echilibru pe o suprafață (S), acționat de forțele active (sau efectiv aplicate) având rezultanta $\bar{R}^{(a)}$ (fig.2.4.a). În acest caz relația (2.9) nu mai poate reprezenta o condiție necesară pentru echilibru, din cauza legăturilor care exercită anumite constrângeri geometrice și mecanice asupra punctului material.



Pentru a rezolva această problemă se folosește **axioma legăturilor** care postulează că “*orice legătură geometrică poate fi întotdeauna suprimată și înlocuită cu forțe corespunzătoare, numite forțe de legătură sau reacțiuni*”

În continuare vom nota rezultanta acestor forțe cu $\bar{R}^{(leg)}$.

Punctul material, eliberat de legături este acționat deci de forțele date (efectiv aplicate) $\bar{R}^{(a)}$ și de forțele de legătură $\bar{R}^{(leg)}$ și este echivalent, *din punct de vedere geometric* cu punctul material supus la legături și *din punct de vedere mecanic* cu punctul material liber.

Pe baza acestei axiome, *condiția necesară și suficientă* pentru ca un punct material supus la legături să rămână în repaus, este ca suma dintre rezultanta forțelor direct aplicate $\bar{R}^{(a)}$ și rezultanta forțelor de legătură $\bar{R}^{(leg)}$ să fie nulă:

$$\bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(leg)} = 0 \quad (2.13)$$

Proiectând ecuația vectorială (2.13) pe cele trei axe ale sistemului triortogonal *Oxyz*, condiția *necesară și suficientă* de ecilibru se scrie:

$$\begin{aligned} X^a + X^{leg} &= 0 \\ Y^a + Y^{leg} &= 0 \\ Z^a + Z^{leg} &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pe baza relației (2.13) se poate trage concluzia că *în cazul echilibrului punct material supus la legături* cele două rezultante (a forțelor efectiv aplicate și a forțelor de legătură) sunt egale și direct opuse :

$$\bar{R}^{(a)} = -\bar{R}^{(leg)} \quad (2.13')$$

Din punct de vedere al *tipului de legături* se deosebesc:

- a. *rezemarea pe o suprafață;*
- b. *rezemarea pe o curbă (unilaterală sau bilaterală);*
- c. *prinderea cu fire* (care poate fi considerată o legătură unilaterală pe o sferă a cărei rază este egală cu lungimea firului).

Din punct de vedere al *forțelor de frecare* legăturile punctului material pot fi:

1. *legături fără frecare* - când suprafața sau curba este perfect lucioasă (legătură ideală), astfel încât nu apare forța de frecare; o astfel de legătură nu există în realitate, deoarece o frecare foarte mică există, ea putând fi cel mult neglijată;
2. *legături cu frecare* - când suprafața sau curba nu este perfect lucioasă (legătură reală, aspră), având asperități care se opun mișcării punctului material după o direcție din planul tangent la suprafață, respectiv după tangenta la curbă, luând astfel naștere forța de frecare.

2.5. Echilibrul forțelor aplicate punctului material supus la legături ideale (fără frecare)

Fie un punct material A, obligat să rămână pe o suprafață (S), acționat de o forță direct aplicată $\bar{R}^{(a)}$ și de o forță de legătură $\bar{R}^{(leg)}$ (conform axiomei legăturilor). În cazul echilibrului, aceste două forțe sunt egale, au același suport, aceeași mărime, dar sensuri opuse.

Dacă se duce în punctul A planul tangent (P) la suprafață și normala (nn') la planul tangent, atunci forța $\bar{R}^{(a)}$ se descompune după cele două direcții în două componente (fig.2.5.a):

- normală \bar{R}_N^a , după direcția normalei (nn');
- tangențială \bar{R}_T^a , după direcția dreptei (Δ) de intersecție a planului format de normală și suportul forței $\bar{R}^{(a)}$ cu planul tangent.

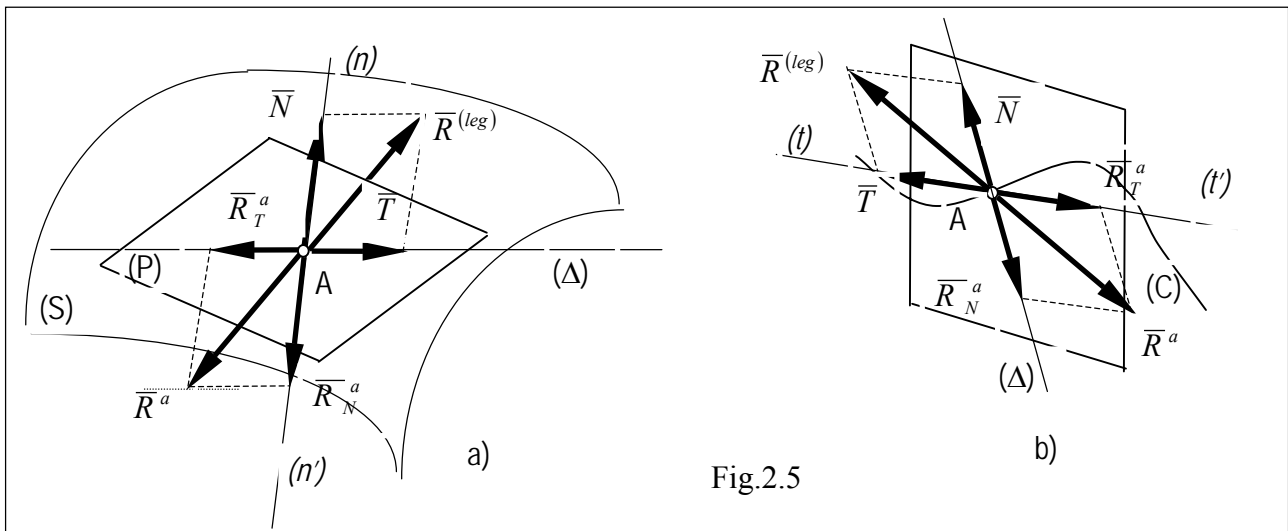


Fig.2.5

Deci se poate scrie relația vectorială: $\bar{R}^{(a)} = \bar{R}_N^a + \bar{R}_T^a$.

În mod analog reacțiunea $\bar{R}^{(leg)}$ se descompune după aceleași două direcții în cele două componente:

- reacțiunea normală \bar{N} ;
- forța de frecare de alunecare \bar{T} .

Deci se poate scrie relația vectorială: $\bar{R}^{(leg)} = \bar{N} + \bar{T}$.

Componenta \bar{R}_N^a tinde să îndepărteze punctul A de pe suprafața (S) după direcția normalei și efectul ei este anulat de reacțiunea normală \bar{N} , deci în cazul echilibrului, aceste două forțe sunt egale și direct opuse: $\bar{N} = -\bar{R}_N^a$.

Componenta \bar{R}_T^a tinde să deplaseze punctul A pe suprafața (S) după o direcție din planul tangent. Se deosebesc deci două cazuri:

- dacă legătura este fără frecare (lucie, ideală) nu apare forța de frecare de alunecare \bar{T} care se opune acestei tendințe. În acest caz, este necesar ca componenta tangențială să fie nulă: $\bar{R}_T^a = 0$.

Prin urmare, în cazul echilibrului punctului material pe o suprafață fără frecare, rezultanta forțelor exterioare direct aplicate \bar{R}^a trebuie să fie dirijată după normala la planul tangent în $A \in (S)$, iar reacțiunea este o forță \bar{N} dirijată după normala (nn') la planul tangent în $A \in (S)$. Ecuația vectorială de echilibru (2.13), în acest caz se scrie: $\bar{R}^a + \bar{N} = 0$ (2.15)

$$\text{sau proiectată pe axe: } X^a + N_x = 0, \quad Y^a + N_y = 0, \quad Z^a + N_z = 0 \quad (2.16)$$

b. dacă suprafața (S) este aspră, apare forța de frecare de alunecare \bar{T} ; pentru echilibrul punctului material, este necesar și suficient ca forțele \bar{R}_T^a și \bar{T} să fie egale și opuse: $\bar{T} = -\bar{R}_T^a$.

Deci ecuația vectorială de echilibru (2.13), în acest caz se scrie:

$$\bar{R}_N^a + \bar{N} = 0 \quad ; \quad \bar{R}_T^a + \bar{T} = 0 \quad (2.15')$$

sau proiectată pe axe conduce la trei ecuații scalare:

$$X^a + N_x + T_x = 0, \quad Y^a + N_y + T_y = 0, \quad Z^a + N_z + T_z = 0 \quad (2.16')$$

Problema echilibrului punctului material situat pe o curbă se pune în mod analog: în acest caz reacțiunea normală \bar{N} este dirijată după o direcție (Δ) cuprinsă în planul normal la curbă în punctul A , iar dacă apare și forța de frecare \bar{T} , ea este dirijată după direcția tangentei la curbă (tt') (fig. 2.5.b). Ecuațiile vectoriale de echilibru păstrează aceeași formă ca și în cazul legăturilor punctului pe o suprafață.

Aplicație:

Un punct de greutate G se găsește în repaus pe un plan *luciu*, înclinat cu unghiul α . Să se determine forța orizontală \bar{F} necesară menținerii punctului material în repaus pe plan (fig.2.6.a).

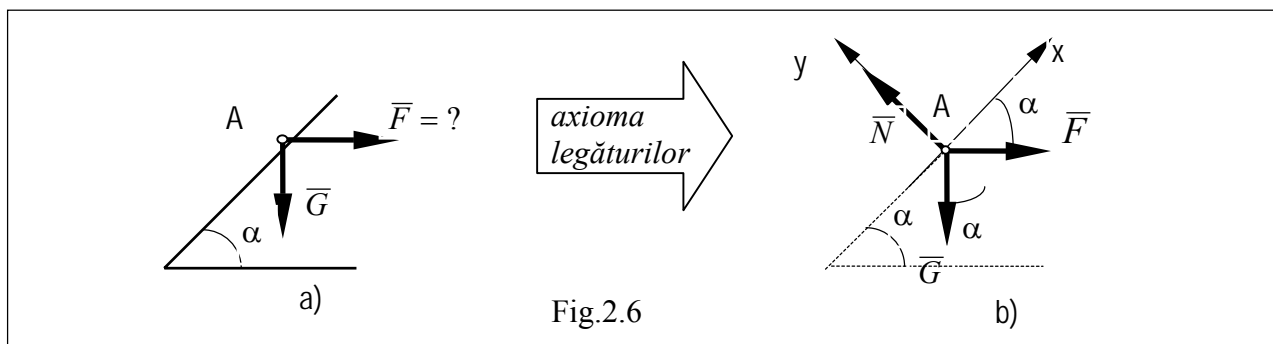


Fig.2.6

Rezolvare:

Se eliberează punctul A de legături introducându-se forța de legătură \bar{N} (fig.2.6.b). Alegând convenabil sistemul de axe Oxy (cu originea în punctul A , axa Ox în direcția planului înclinat iar axa Oy perpendiculară pe planul înclinat), ecuația vectorială de echilibru :

$$\bar{G} + \bar{F} + \bar{N} = 0,$$

proiectată pe cele două axe, va conduce la ecuațiile scalare :

$$\begin{aligned}(\sum X_i = 0): & \quad -G \sin \alpha + F \cos \alpha = 0 \\(\sum Y_i = 0): & \quad -G \cos \alpha - F \sin \alpha + N = 0\end{aligned}$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$F = G \operatorname{tg} \alpha, \quad N = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

2.6. Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare. Legile frecării uscate.

În cazul legăturilor punctului material pe curbe sau suprafețe aspre, s-a constatat experimental că nu se mai poate neglija componenta tangențială \bar{T} a reacțiunii $\bar{R}^{(leg)}$, ca în cazul legăturilor ideale. Experiențele arată că mărimea componentei tangențiale \bar{T} a forței de legătură este limitată.

Pentru a pune în evidență forța *frecare de alunecare* \bar{T} , se efectuează următoarea experiență simplă cu un aparat numit tribometru (fig.2.7.a), format dintr-un corp (asimilat cu punct material) de greutate G care este acționat de o forță orizontală \bar{F} , care poate crește continuu.

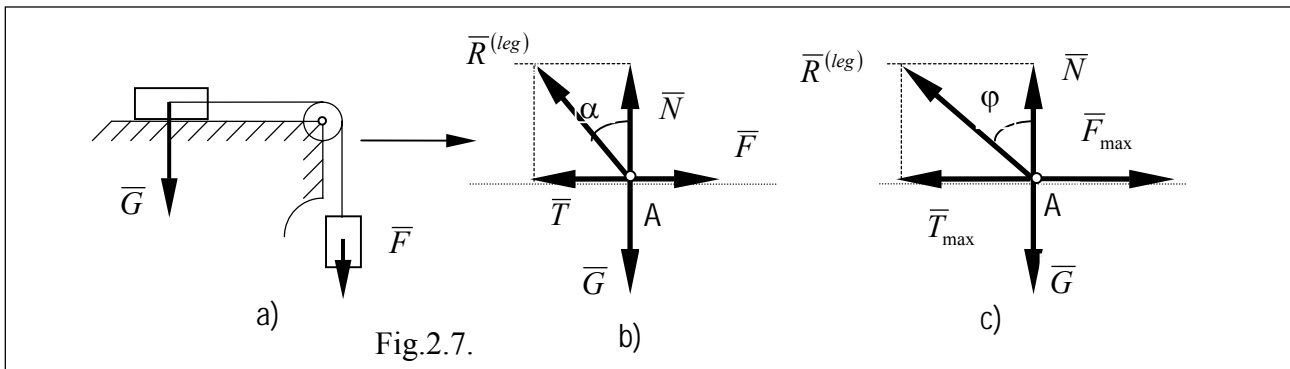


Fig.2.7.

Se constată că până la o anumită valoare a forței orizontale (F_{max}) corpul rămâne pe loc. Aceasta arată că reacțiunea $\bar{R}^{(leg)}$ este înclinată cu un unghi α față de normală și prin urmare, poate fi descompusă în două componente: reacțiunea normală \bar{N} și forța \bar{T} numită *forța de frecare de alunecare* (fig.2.7.b). Forța de frecare de alunecare acționează în planul tangent la suprafața de reazem și se opune tendinței de mișcare a corpului.

În fig. 2.7.c., este prezentat cazul limită când forțele \bar{F} și \bar{T} iau valori maxime și unghiul α capătă, de asemenea valoarea maximă φ , numit *unghi de frecare*. Forța de frecare \bar{T} poate deci varia între zero și valoarea limită \bar{T}_{max} .

Conform figurii 2.7.b. se poate scrie: $|\bar{T}| = |\bar{N}| \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (2.17)

și la limită (fig.2.7c): $|\bar{T}_{max}| = |\bar{N}| \cdot \operatorname{tg} \varphi$ (2.18)

și deoarece $\alpha \leq \varphi$ se obține: $|\bar{T}| \leq |\bar{N}| \cdot \operatorname{tg} \varphi$ (2.19)

Coulomb (1736 - 1806) a efectuat asemenea experiențe cu corpuri de diferite greutate, de aceeași natură sau de naturi diferite și a ajuns să formuleze următoarele **legi ale frecării uscate**:

- 1) Mărimea forței de frecare de alunecare maximă $|\bar{T}_{max}|$ este direct proporțională cu mărimea reacțiunii normale N ;
- 2) Mărimea forței de frecare de alunecare maximă $|\bar{T}_{max}|$ depinde de natura și starea corpurilor ;
- 3) Mărimea forței de frecare de alunecare maximă $|\bar{T}_{max}|$ nu depinde de viteza relativă de deplasare a celor două corpuri și nici de mărimea suprafețelor aflate în contact

Pe baza acestor legi, *forța de frecare de alunecare maximă* are expresia:

$$|\bar{T}_{max}| = \mu |\bar{N}| \quad (2.20)$$

respectiv condiția pentru echilibru se scrie: $|\bar{T}| \leq \mu |\bar{N}| \quad (2.21)$

unde: μ este *coeficientul de frecare de alunecare*, care este o mărime adimensională ce depinde de natura și de starea suprafețelor în contact.

Identificând relațiile (2.18) și (2.20) se obține: $\mu = \operatorname{tg} \varphi \quad (2.22)$

Coulomb a tras concluzia că forțele de frecare se datorează existenței pe suprafețele în contact ale corpurilor a unor asperități care se întrepătrund. Când corpurile se pun în mișcare relativă aceste asperități se strivesc, forța de frecare de alunecare fiind rezultatul forțelor elementare corespunzătoare acestor striviri.

Dacă se introduce lubrefiant între suprafețele în contact, forța de frecare scade și nu mai respectă legile enunțate mai sus; problema nu mai este în domeniul frecării uscate, ci din domeniul frecării mixte sau hidraulice.

2.7. Aspectul geometric al frecării de alunecare

Se consideră un punct material A supus la legături pe o suprafață cu frecare (S), asupra căruia acționează un sistem de forțe ce dau rezultanta \bar{R}^a ; prin schimbarea direcției forțelor ce acționează asupra lui, se modifică direcția rezultantei \bar{R}^a față de normala la planul tangent P și pentru *echilibrul la limită al punctului*, reacțiunea $\bar{R}^{(leg)}$, respectiv rezultanta \bar{R}^a vor descrie o suprafață conică, numită *con de frecare*, având vârful în punctul A, cu axa după direcția normalei la planul tangent și unghiul la vârf 2φ (fig.2.8.a).

În mod analog se pune problema echilibrului punctului material supus la legături pe o curbă cu frecare: pentru *echilibrul la limită al punctului pe o curbă cu frecare*, reacțiunea $\bar{R}^{(leg)}$, respectiv rezultanta \bar{R}^a vor descrie un *con de frecare* cu vârful în punctul A, având axa după direcția tangentei la curbă și unghiul la vârf $(180^\circ - 2\varphi)$ (fig.2.8.b).

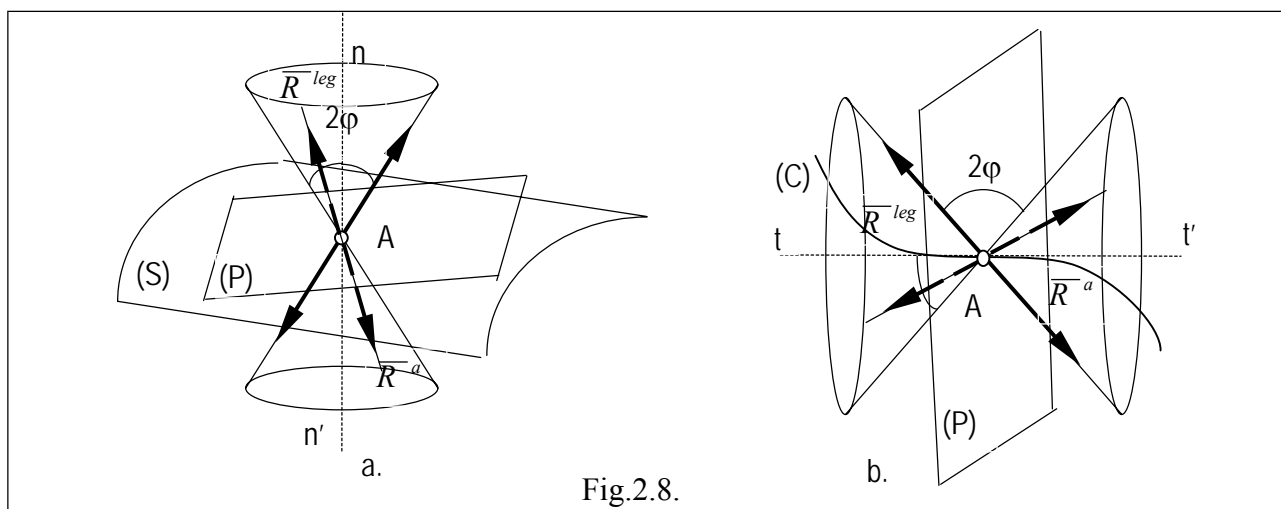


Fig.2.8.

Interpretarea geometrică:

- pentru realizarea condiției de echilibru a unui punct pe o suprafață cu frecare, trebuie ca suportul rezultantei forțelor efectiv aplicate \bar{R}^a , să se găsească în interiorul conului de frecare, sau să facă cu axa conului de frecare un unghi mai mic decât unghiul de frecare: $\alpha \leq \varphi$.
- pentru realizarea condiției de echilibru a unui punct pe o curbă cu frecare, trebuie ca suportul rezultantei forțelor efectiv aplicate \bar{R}^a , să se găsească în exteriorul conului de frecare, sau să facă cu axa conului un unghi: $\alpha \geq 90^\circ - \varphi$.

Observații:

- 1) Problema echilibrului punctului material supus la legături cu frecare, introduce o necunoscută în plus față de problema legăturii ideale și anume, componenta tangențială \bar{T} . Pentru determinarea acestei necunoscute dispunem de o relație suplimentară și anume, inegalitatea (2.21). Datorită acestei inegalități, problemele de frecare sunt în general nedeterminate, adică există regiuni întregi (pe o curbă sau pe o suprafață) în care este posibil echilibrul. Dacă în rezolvarea unei astfel de probleme, interesează numai pozițiile echilibrului la limită, atunci când: $|\bar{T}| = |\bar{T}_{max}| = \mu |\bar{N}|$, problema devine determinată.
- 2) Dacă în cazul echilibrului punctului material pe o curbă aspră, pentru determinarea forței de frecare \bar{T} este suficientă cunoașterea unei singure necunoscute scalare (direcția lui \bar{T} fiind cunoscută și anume după direcția tangentei), în cazul echilibrului punctului material pe o suprafață aspră este necesar să se cunoască două necunoscute scalare (întrucât în planul tangent direcția lui \bar{T} este necunoscută, conform fig.2.8.b).
- 3) În cazul echilibrului punctului material pe o curbă, reacțiunea normală \bar{N} are o direcție nedeterminată, cuprinsă în planul normal la curbă.

Aplicație

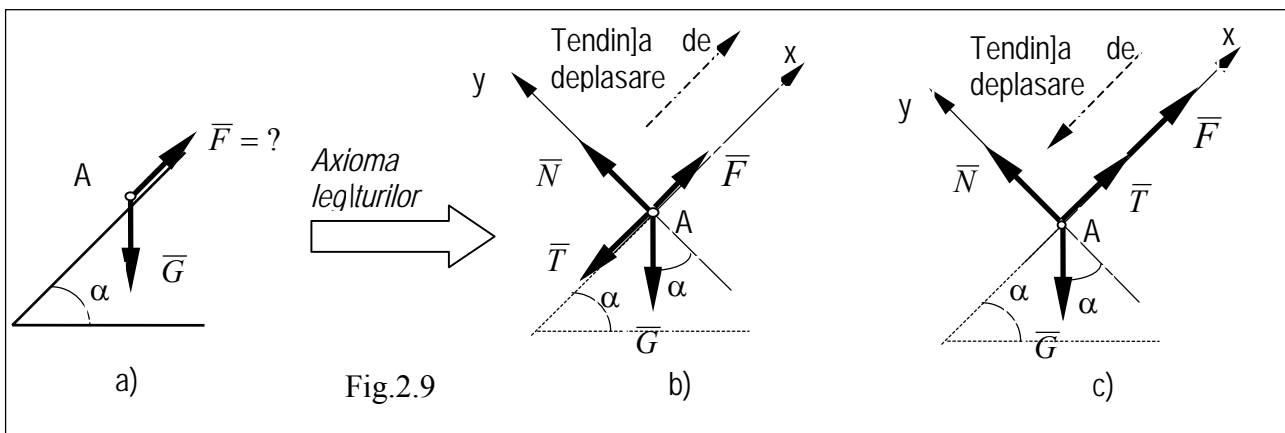
Un punct material de greutate G se află pe un plan înclinat cu unghiul α , coeficientul de frecare de alunecare fiind μ (fig.2.9.a). Se cere să se determine:

- a) mărimea forței \bar{F} paralelă cu planul înclinat, pentru ca punctul material să rămână în repaus ; b) reacțiunea \bar{R}^{leg} .

Rezolvare:

Se studiază echilibrul punctului pentru cele două cazuri, care corespund celor două tendințe la limita echilibrului:

- a) de urcare (atunci când F crește atingând valoarea F_{max}).
b) de coborîre (atunci când F scade atingând valoarea F_{min}).



Se alege un sistem de axe convenabil, se eliberează corpul de legături, se aplică axioma legăturilor și se studiază cele două cazuri de echilibru la limita ale corpului (fig.2.9.b și c.).

1. Pentru tendința de urcare a punctului material pe plan, forțele corespunzătoare sunt reprezentate în fig.2.9.b, iar ecuațiile de echilibru se scriu proiectând pe cele două axe ecuația vectorială de echilibru:

$$\bar{G} + \bar{F} + \bar{T} + \bar{N} = 0$$

Se obțin relațiile scalare:

$$(\sum X_i = 0): \quad F - G \sin \alpha - T = 0$$

$$(\sum Y_i = 0): \quad N - G \cos \alpha = 0$$

$$T \leq \mu N \quad (\text{la limita: } T_{max} = \mu N)$$

de unde rezultă:

$$N = G \cos \alpha; \quad T_{max} = \mu G \cos \alpha; \quad F_{max} = G (\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

2. Pentru tendința de coborîre a punctului material pe plan, forțele corespunzătoare sunt reprezentate în fig.2.9.c, iar ecuația de echilibru vectorială:

$$\bar{G} + \bar{F} + \bar{T} + \bar{N} = 0,$$

care proiectată pe axe se scrie astfel:

$$(\sum X_i = 0): F - G \sin \alpha + T = 0$$

$$(\sum Y_i = 0): N - G \cos \alpha = 0$$

$$T \leq \mu N \quad (\text{la limita: } T_{\max} = \mu N)$$

de unde rezultă:

$$N = G \cos \alpha ; \quad T = \mu G \cos \alpha ; \quad F_{\min} = G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

Soluția problemei este deci: $F_{\min} \leq F \leq F_{\max}$ și înlocuind în funcție de unghiul de frecare $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ se obține:

$$G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \leq F \leq G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

$$\text{Reacțiunea } \bar{R}^{\text{leg}} \text{ are mărimea: } |\bar{R}^{\text{leg}}| = \sqrt{N^2 + T^2} = N \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \mu^2}$$

și direcția ei face cu normala (nn') (în cazul limită) unghiul φ dat de: $\operatorname{tg} \varphi = T / N$.

Observație:

În cazul legăturii lucii avem $\mu=0$ (adică $\varphi=0$) și deci o soluție unică: $F = G \sin \alpha$.

2.8. Frecarea firelor

O aplicație tehnică a echilibrului punctului material îl constituie frecarea firelor. Pentru rezolvarea acestei probleme se apelează la **principiul egalității acțiunilor reciproce** care afirmă că “*acțiunile reciproce în cazul interacțiunii a două corpuri, sunt întotdeauna egale și dirijate în sensuri contrare*”. Forțele care acționează asupra unui sistem de puncte materiale se clasifică în mod convențional în *forțe exterioare* și *forțe interioare* sistemului:

- *Forțele exterioare* reprezintă interacțiunea mecanică dintre punctele sistemului cu alte puncte din afara lui.
- *Forțele interioare* reprezintă interacțiunea mecanică dintre punctele aparținând sistemului.

Conform **principiului acțiunii și reacțiunii**, *forțele interioare* sunt egale ca mărime două câte două, au același suport și sunt dirijate în sensuri opuse. Un exemplu de forțe interioare, sunt forțele care iau naștere într-un fir atunci când este supus unor sarcini exterioare: *forțele de întindere din fir (tensiunile din fir)* reprezintă o pereche de forțe interioare care țin legate două puncte alăturate ale firului în cazul unei secțiuni imaginare, deci forțe care se opun îndepărtării lor.

În general, *conceptul de fir* este utilizat pentru a reprezenta un corp având *una din dimensiuni (lungimea) mult mai mare* decât celelalte două, *flexibilitate* mare și *inextensibilitate* sub acțiunea forțelor exterioare. În studiul frecării firului, se adoptă ipoteza de *flexibilitate, inextensibilitate* precum și *neglijarea greutății*.

Problemele de frecare a firelor se întâlnesc frecvent în tehnică (de exemplu la curelele de transmisie, frânele cu bandă, cordelinele alpiștiștilor, etc.). Frecarea firelor se studiază atât în cazul când roata pe care este înfășurat firul este fixă și firul mobil, cât și în cazul roții mobile și a firului fix .

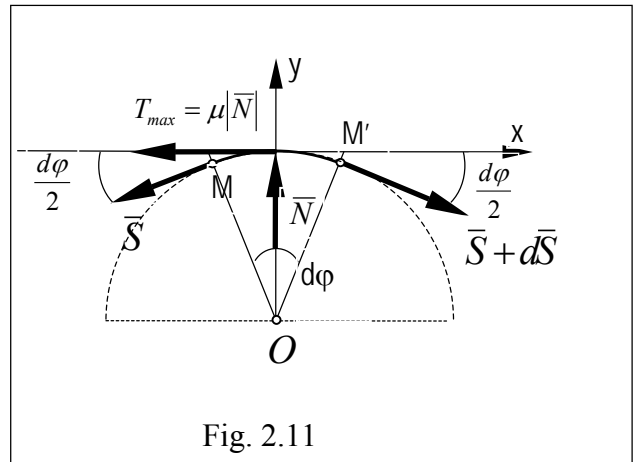
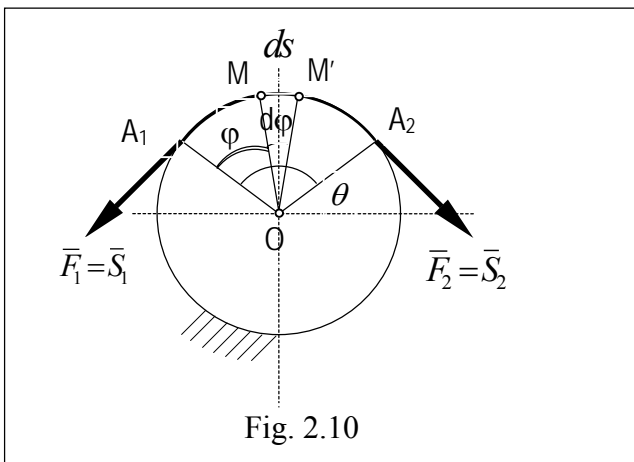
În continuare se consideră un fir care vine în contact cu un disc circular, pe arcul A_1A_2 (fig.2.10) cu unghiul θ la centru (măsurat în radiani).

Firul este acționat la capete, în A_1 și A_2 , respectiv de forțele \vec{F}_1 și \vec{F}_2 , care pentru echilibru pot fi egale sau diferite ca mărime:

- când tendința de mișcare a firului este de la A_1 spre A_2 atunci $F_1 < F_2$; acest fapt se datorează forțelor de frecare de alunecare dintre fir și roată (coeficientul de frecare de alunecare μ fiind cunoscut).
- când tendința de mișcare a firului este de la A_2 spre A_1 atunci : $F_1 > F_2$.

Ca rezultat al acțiunii forțelor \vec{F}_1 și \vec{F}_2 , în punctele A_1 și A_2 iau naștere tensiunile \vec{S}_1, \vec{S}_2 care sunt egale respectiv cu forțele \vec{F}_1, \vec{F}_2 .

Se va studia echilibrul forțelor care acționează pe arcul elementar $\widehat{MM'} = ds$, căruia îi corespunde un unghi elementar la centru $d\varphi$. La capetele elementului de arc ds acționează tensiunile \vec{S} și $\vec{S} + d\vec{S}$, iar la mijloc reacțiunea normală \vec{N} și forța de frecare $|\vec{T}_{max}| = \mu|\vec{N}|$ (fig.2.11).



Elementul de fir poate fi considerat deci ca un punct material pe o suprafață cu frecare iar ecuațiile de echilibru pentru cazul limită (când forța de frecare este maximă) sunt:

$$\left(\sum X_i = 0\right) : (S + dS) \cos \frac{d\varphi}{2} - S \cos \frac{d\varphi}{2} - \mu N = 0 \quad (2.23)$$

$$\left(\sum Y_i = 0\right) : -(S + dS) \sin \frac{d\varphi}{2} - S \sin \frac{d\varphi}{2} + N = 0 \quad (2.24)$$

Unghiurile fiind mici (elementare) se consideră valabile aproximațiile:

$$\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} \quad (2.25)$$

și atunci ecuațiile (2.23) și (2.24) se scriu:

$$dS - \mu N = 0 \quad (2.26)$$

$$N - Sd\varphi + \frac{1}{2}dSd\varphi = 0 \quad (2.27)$$

Neglijând termenul $\frac{1}{2}dSd\varphi$ în raport cu ceilalți termeni din relația (2.27), rezultă:

$$dS - \mu N = 0; \quad N - Sd\varphi = 0 \quad (2.28)$$

care conduce la ecuația diferențială cu variabile separabile:

$$\frac{dS}{S} - \mu d\varphi = 0 \quad (2.29)$$

pe care integrând-o în intervalul corespunzător fiecărei variabile avem:

$$\int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} = \mu \int_0^\theta d\varphi \quad (2.30)$$

$$\text{sau: } \ln \frac{S_2}{S_1} = \mu\theta \quad \text{sau} \quad \frac{S_2}{S_1} = e^{\mu\theta} \quad (2.31)$$

Rezultă astfel *formula lui Euler pentru frecarea firelor, pentru cazul limită:*

$$S_{2max} = S_1 e^{\mu\theta} \quad (2.32)$$

$$\text{sau pentru echilibru în general: } S_2 \leq S_1 e^{\mu\theta} \quad (2.33)$$

Dacă $F_1 > F_2$ atunci se schimbă sensul tendinței de mișcare a firului pe discul fix (de la A_2 spre A_1) și în mod asemănător se obține:

$$S_{2min} = S_1 e^{-\mu\theta} \quad (2.34)$$

$$\text{sau pentru echilibru în general: } S_2 \geq S_1 e^{-\mu\theta} \quad (2.35)$$

Deci, condiția finală de echilibru este:

$$S_1 e^{-\mu\theta} \leq S_2 \leq S_1 e^{\mu\theta} \quad (2.36)$$

$$\text{sau: } e^{-\mu\theta} \leq \frac{S_2}{S_1} \leq e^{\mu\theta} \quad (2.37)$$

Aplicație

Se consideră sistemul format dintr-un fir înfășurat pe un cilindru fix acționat la capete de greutatea P și Q (fig. 2.12.a.); se cunosc coeficientul de frecare al firului pe cilindru μ și unghiurile: $\alpha = \pi / 4$, $\theta = \pi / 2 + 2n\pi$.

Se cere să se determine tensiunile din fir și numărul n de înfășurări ale firului pe cilindru, pentru ca sistemul să rămână în repaus în poziția din figură.

Rezolvare:

Se secționează firul orizontal introducându-se tensiunea (S_1). Avem astfel de rezolvat două probleme:

- echilibrul firului pe cilindru, acționat de forțele P și S_1 ;
- echilibrul punctului A acționat de sistemului de forțe S_1 , S_2 și Q (fig.2.12.b.).

În funcție de tendința de mișcare, se deosebesc două cazuri:

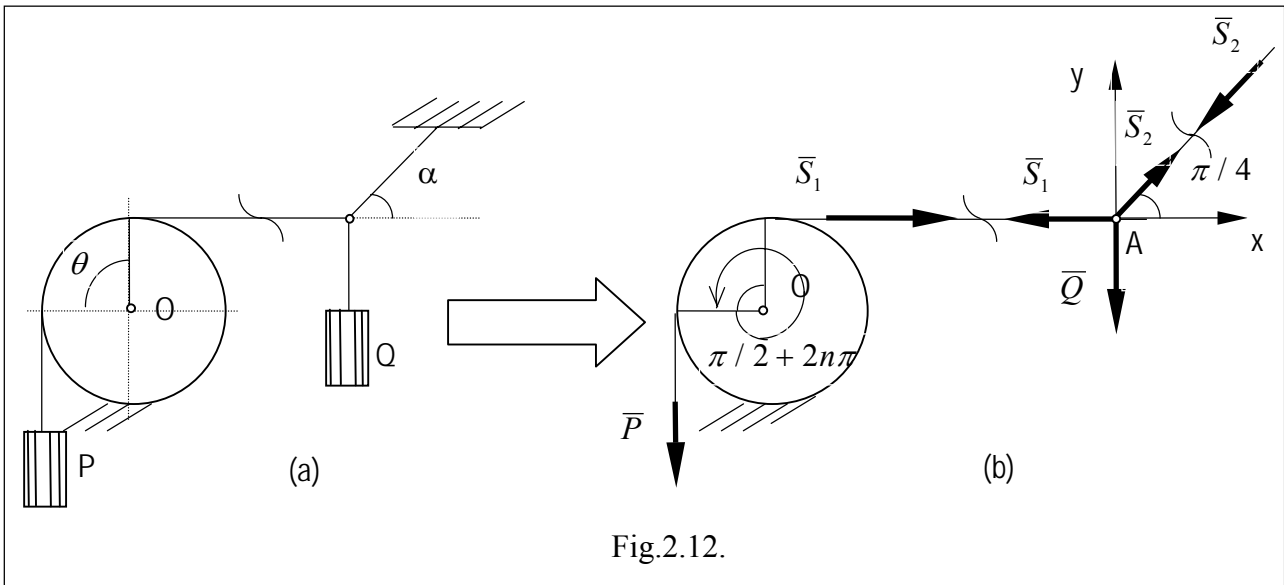


Fig.2.12.

1. Pentru tendința de deplasare în jos a greutateii P, condiția de echilibru pentru forțele din firul înfășurat pe cilindru, se scrie:

$$P \leq S_1 e^{\mu \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right)} \quad (a)$$

Ecuatiile de echilibru pentru forțele care acționează în A sunt:

$$\left(\sum X_i = 0 \right) \quad -S_1 + S_2 \cos \frac{\pi}{4} = 0; \quad (b)$$

$$\left(\sum Y_i = 0 \right) \quad -Q + S_2 \sin \frac{\pi}{4} = 0$$

Din sistemul (b) se obțin tensiunile din fir :

$$S_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} Q \quad \text{și} \quad S_1 = Q.$$

în care caz formula (a) conduce la :

$$P \leq Q e^{\mu \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right)}; \quad \frac{P}{Q} \leq e^{\mu \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right)}; \quad \ln \frac{P}{Q} \leq \mu \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right), \quad (c)$$

$$\text{iar numărul de înfășurări este: } n \geq \frac{1}{2\pi\mu} \ln \frac{P}{Q} - \frac{1}{4} \quad (d)$$

2. Pentru tendința de deplasare în sus a greutateii P, condiția de echilibru pentru forțele din firul înfășurat pe cilindru se scrie:

$$S_1 e^{-\mu \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right)} \leq P \quad (e)$$

în care caz formula (a) conduce la :

$$P \geq Q e^{-\mu \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right)}; \quad \frac{P}{Q} \geq e^{-\mu \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right)}; \quad \ln \frac{P}{Q} \geq -\mu \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \quad (f)$$

deci numărul de înfășurări în acest al doilea caz este:

$$n \geq \frac{1}{2\pi\mu} \ln \frac{P}{Q} + \frac{1}{4} \quad (g)$$

CAPITOLUL 3

STUDIUL SISTEMELOR DE FORȚE APPLICATE SOLIDULUI RIGID

3.1. Caracterul forțelor aplicate unui solid rigid

S-a arătat în capitolul 2, că forțele aplicate unui punct material se reprezintă prin *vectori legați*, aplicați aceluși punct material. Vom arăta acum că forțele aplicate solidului rigid se reprezintă prin *vectori alunecători*. În acest capitol, noțiunile de forțe sau vectori, sunt sinonime.

Așa cum s-a arătat în capitolul anterior, *prin corp solid rigid (solid nedeformabil)* se înțelege un *continuum material nedeformabil* (distanța dintre două puncte oarecare ale sale nu se modifică oricare ar fi forțele aplicate acestuia sau oricare ar fi mișcarea sa). Corpul *solid rigid* este o abstracție matematică. În realitate, toate corpurile reale din natură sunt *deformabile*. În Mecanica teoretică corpurile se consideră (cu o bună aproximație) ca fiind *nedeformabile*.

În Statica rigidului se admite următorul principiu de natură experimentală, numit și **principiul rigidității**: “dacă asupra unui corp rigid acționează două forțe \vec{F}_1 și \vec{F}_2 având același suport, mărimile egale ca dar sensurile opuse, ele își fac echilibru și deci, pot fi suprimate fără a se schimba starea de mișcare sau de repaus a corpului” (fig.3.1). Acest principiu este și *prima operație elementară de echivalență*. O consecință imediată a acestui principiu este următoarea: *forțele care acționează asupra unui corp solid rigid se reprezintă prin vectori alunecători*.

Pentru un corp deformabil *principiul rigidității* nu este adevărat.

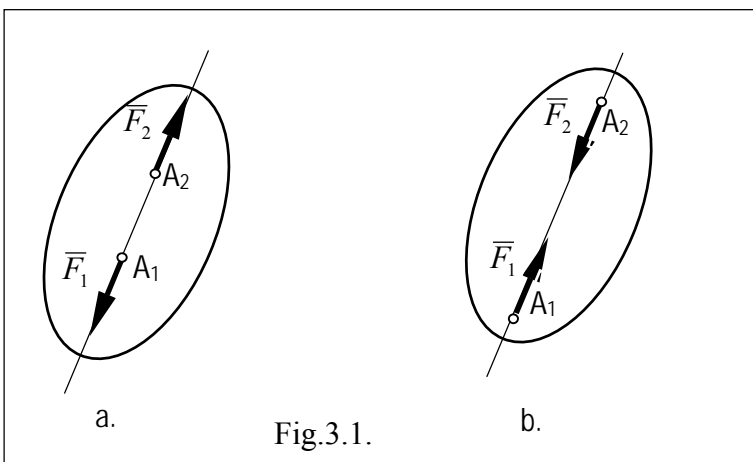


Fig.3.1.

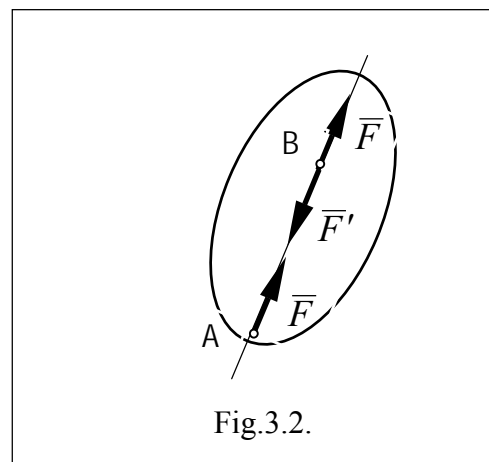


Fig.3.2.

Într-adevăr, fie un corp solid asupra căruia acționează forța \vec{F} aplicată în punctul A (fig.3.2). Dacă în punctul B, aparținând suportului forței \vec{F} , aplicăm două

forțe \vec{F}' și \vec{F} având sensuri opuse și dacă aceste forțe au același suport și aceeași mărime cu forța \vec{F} aplicată în A, atunci conform principiului enunțat anterior, starea rigidului nu se schimbă.

Conform aceluiași principiu, forțele \vec{F}' și \vec{F} , având același suport, fiind egale ca mărime și de sens opus, pot fi suprimate. Astfel, asupra solidului acționează numai forța \vec{F} aplicată în B, forță obținută prin alunecarea lui \vec{F} pe suportul său din A în B (fig.3.2.)

În capitolul privind teoremele generale ale mecanicii se va vedea că această teoremă este o consecință directă a teoremelor generale și a ipotezei de rigiditate a corpului solid.

3.2. Teoria momentelor. Proprietăți.

3.2.1. Momentul unei forțe în raport cu un punct

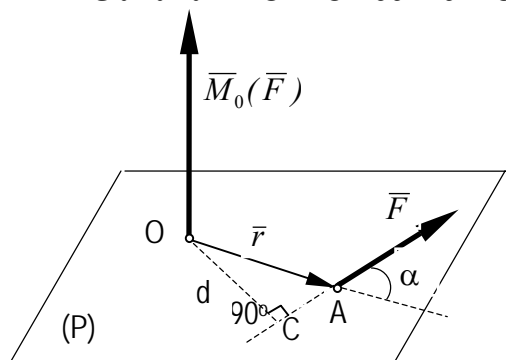


Fig. 3.3

Fie un vector legat (forță) \vec{F} , aplicat în punctul A al unui rigid și un punct O în spațiu (fig.3.3.). Se numește moment al vectorului \vec{F} față de punctul O și se notează cu simbolul $\vec{M}_O(\vec{F})$ sau \vec{M}_O , produsul vectorial dintre vectorul de poziție \vec{r} (care unește polul O cu punctul A de aplicație al vectorului forță \vec{F}) și vectorul forță \vec{F} , adică:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F} \quad (3.1)$$

Pe baza definiției produsului vectorial a doi vectori se poate afirma că:

- $\vec{M}_O(\vec{F})$ este un *vector legat* de O, adică este aplicat în punctul față de care se calculează;
- $\vec{M}_O(\vec{F})$ este *perpendicular* pe planul determinat de suportul vectorului \vec{F} și punctul O;
- Sensul lui $\vec{M}_O(\vec{F})$ coincide cu sensul în care înaintează un *șurub drept* când acționează în lungul direcției lui $\vec{M}_O(\vec{F})$ și se rotește în sensul indicat de vectorul \vec{F} (așa numita *regulă a șurubului sau a burghiului drept*);
- Mărimea vectorului lui $\vec{M}_O(\vec{F})$ este dată de:

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{OA} \times \vec{F}| = |\vec{OA}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha = F \cdot d \quad (3.2)$$

unde: $\alpha = \angle(\vec{OA}, \vec{F})$, iar d este distanța de la punctul O la suportul lui \vec{F} .

Dimensiunea momentului unei forțe în raport cu un punct, în Sistemul Internațional de unități este: $[\vec{M}_O(\vec{F})] = N \cdot m$.

Dacă O este originea axelor de coordonate, notând cu (x, y, z) coordonatele punctului A și cu (X, Y, Z) componentele forței \vec{F} (proiecțiile ei pe aceste axe), expresia analitică a momentului este:

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

și dacă se notează : $\vec{M}_o(\vec{F}) = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$, atunci componentele lui $\vec{M}_o(\vec{F})$ sunt date de: $L = yZ - zY$; $M = zX - xZ$; $N = xY - yX$ (3.4)

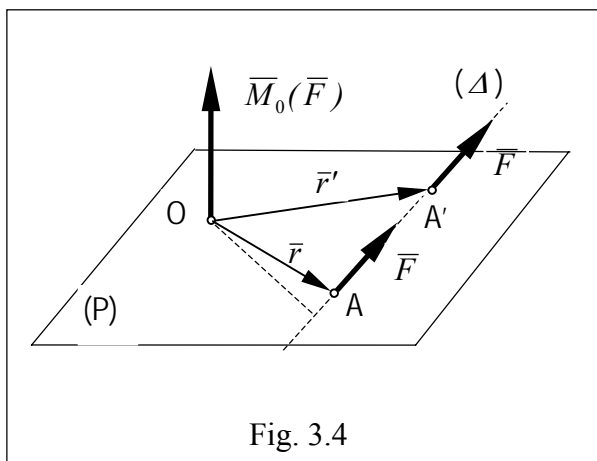


Fig. 3.4

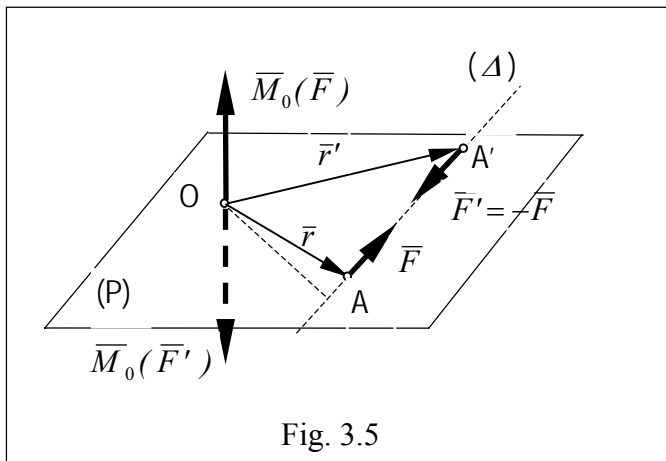


Fig. 3.5

Momentul unei forțe F față de un punct O are următoarele *proprietăți*:

- 1) $\vec{M}_o(\vec{F})$ rămâne invariant dacă vectorul \vec{F} alunecă pe suportul său (dacă \vec{F} este deci considerat vector alunecător). Într-adevăr, deplasând punctul de aplicație al lui \vec{F} din A în A' (fig.3.5), avem:

$$\vec{M}'_o(\vec{F}) = \vec{OA}' \times \vec{F} = (\vec{OA} + \vec{AA}') \times \vec{F} = \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{AA}' \times \vec{F} = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{M}_o(\vec{F})$$

deoarece \vec{AA}' și \vec{F} fiind coliniari: $\vec{AA}' \times \vec{F} = 0$.

- 2) $\vec{M}_o(\vec{F}) = 0$ în următoarele două cazuri: a) dacă $\vec{F} = 0$; b) dacă suportul lui $\vec{F} \neq 0$ trece prin polul O . Într-adevăr, dacă polul O se află pe suportul vectorului \vec{F} , vectorii \vec{OA} și \vec{F} sunt paraleli și produsul lor vectorial este nul. Sau altfel, mărimea lui $\vec{M}_o(\vec{F})$ este egală cu $|\vec{F}| \cdot d$, unde d este distanța de la punctul O la suportul (Δ) al lui \vec{F} . Deci $\vec{M}_o(\vec{F}) = 0$ dacă $\vec{F} = 0$ sau dacă $d = 0$.

- 3) Doi vectori situați pe același suport, având mărimi egale și sensuri opuse, au în raport cu același punct O , momentele corespunzătoare opuse. Într-adevăr, considerând \vec{F} în A și \vec{F}' în A' , unde $\vec{F}' = -\vec{F}$ (fig.3.5), conform definiției avem:

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}') = \vec{OA}' \times \vec{F}' = (\vec{OA} + \vec{AA}') \times \vec{F}' = \vec{OA} \times \vec{F}' + \vec{AA}' \times \vec{F}'$$

și $\vec{F}' = -\vec{F}$; deoarece :

$$\vec{AA}' \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{M}_o(\vec{F}') = \vec{OA} \times (-\vec{F}) = -\vec{OA} \times \vec{F} = -\vec{M}_o(\vec{F}).$$

3.2.2. Momentul unei forțe în raport cu o axă

Fie un vector forță \vec{F} aplicat în punctul A și o axă (Δ) oarecare a cărei orientare este definită prin versorul ei $\vec{\delta}$ (fig.3.6). Se definește *momentul vectorului \vec{F} în raport cu axa (Δ)* (notat cu $M_{\Delta}(\vec{F})$ sau M_{Δ}), *proiecția pe această axă a momentului forței \vec{F} calculat față de un punct oarecare O aparținând axei (Δ) .*

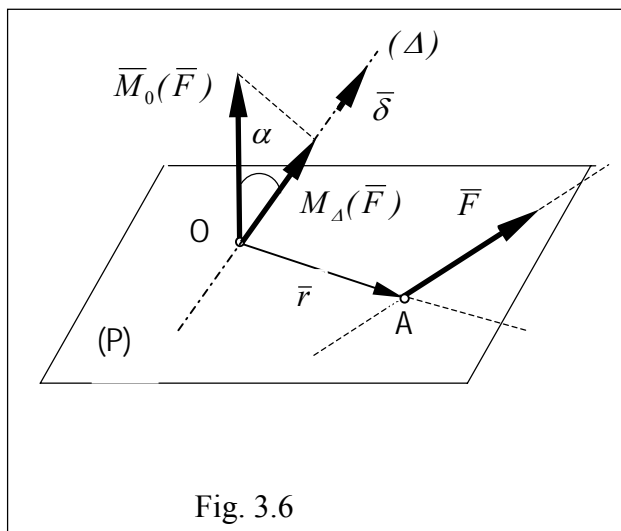


Fig. 3.6

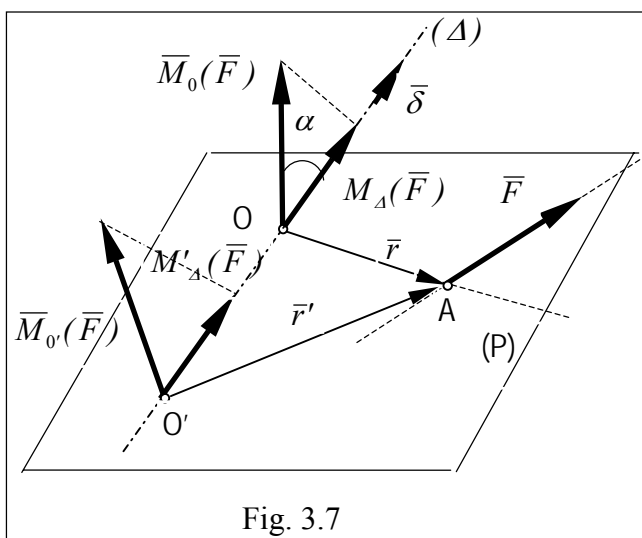


Fig. 3.7

Notând cu O punctul ales pe axă (fig.3.6), conform definiției, vom avea:

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = pr_{\Delta} \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\delta} = \vec{\delta} \cdot \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{\delta} \cdot (\vec{OA} \times \vec{F}). \quad (3.5)$$

Deoarece $M_{\Delta}(\vec{F})$ reprezintă produsul mixt al vectorilor \vec{OA} , \vec{F} și $\vec{\delta}$ el se mai poate scrie și sub forma $M_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{OA}, \vec{F}, \vec{\delta})$ și este un *scalar*.

Să arătăm că $M_{\Delta}(\vec{F})$ nu depinde de poziția punctului O pe axa (Δ) .

Pentru aceasta vom recalcula $M'_{\Delta}(\vec{F})$ alegând un alt punct O' pe axa (Δ) (fig.3.7):

$$\begin{aligned} M'_{\Delta}(\vec{F}) &= \vec{\delta} \cdot \vec{M}_{O'}(\vec{F}) = \vec{\delta} \cdot (\vec{O'A} \times \vec{F}) = \vec{\delta} \cdot [(\vec{O'O} + \vec{OA}) \times \vec{F}] = \\ &= \vec{\delta} \cdot (\vec{O'O} \times \vec{F} + \vec{OA} \times \vec{F}) = \vec{\delta} \cdot (\vec{O'O} \times \vec{F}) + \vec{\delta} \cdot (\vec{OA} \times \vec{F}) \end{aligned}$$

Deoarece vectorii $\vec{\delta}$ și $\vec{O'O}$ sunt coliniari, avem:

$$\vec{\delta} \cdot (\vec{O'O} \times \vec{F}) = 0 \text{ și rezultă prin urmare:}$$

$$M'_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{\delta} \cdot (\vec{OA} \times \vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{F}).$$

Fie un sistem cartezian de axe de coordonate Oxyz, punctul A de coordonate (x, y, z) și vector de poziție: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, forța $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ și axa (Δ) de versor $\vec{\delta} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. În aceste condiții valoarea momentului $M_{\Delta}(\vec{F})$ poate fi calculată cu ajutorul determinantului:

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{\delta} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = a(yZ - zY) + b(zX - xZ) + c(xY - yX).$$

Dacă axa (Δ) coincide cu axa Ox , $\bar{\delta} \equiv \bar{i}$ și deci $a = 1$, $b = c = 0$, se obține *momentul forței \bar{F} față de axa Ox* : $M_{Ox}(\bar{F}) = yZ - zY = L$

Analog se calculează *momentul forței \bar{F} față de axa Oy* , respectiv Oz :

$$M_{Oy}(\bar{F}) = zX - xZ = M; \quad M_{Oz}(\bar{F}) = xY - yX = N \quad (3.7)$$

O b s e r v a Ț i e :

În aplicațiile tehnice apare frecvent noțiunea de *moment al unei forțe în raport cu un punct*, din planul determinat de punct și forță. Acest moment se exprimă sub forma unui scalar și reprezintă de fapt *momentul forței în raport cu o axă perpendiculară pe planul determinat de punct și forță* ce trece prin punctul respectiv. Dacă, de exemplu, forța \bar{F} se găsește în planul Oxy atunci *momentul forței în raport cu punctul O* este de fapt *momentul forței în raport cu axa Oz* :

$$|\bar{M}_O(\bar{F})| = M_{Oz}(\bar{F}) = N = xY - yX \quad (3.8)$$

Semnul momentului este pozitiv, dacă forța are tendința să rotească corpul în raport cu punctul O în sens trigonometric (axa Ox peste Oy) și negativ dacă forța are tendința să rotească corpul în raport cu punctul O în sens invers trigonometric.

Se pot evidenția următoarele proprietăți al *momentului forței în raport cu o axă* :

1) *Momentul unei forțe în raport cu o axă coplanară cu suportul forței, este nul.*

Într-adevăr, dacă suportul vectorului \bar{F} și axa (Δ) sunt coplanare, atunci vectorii \overline{OA} , \bar{F} și $\bar{\delta}$ sunt coplanari și deci produsul lor mixt este nul. De menționat că această situație are loc în cazurile în care suportul lui \bar{F} și axa (Δ) sunt concurente, paralele sau se confundă.

2) *Momentul unei forțe în raport cu o axă nu se schimbă dacă forța alunecă pe suportul ei, păstrându-și sensul și mărimea (intensitatea). Această proprietate se poate demonstra imediat folosind prima proprietate din paragraful 3.2.1.*

Într-adevăr, deoarece : $\bar{M}_O(\bar{F}) = M_{O'}(\bar{F})$

avem : $\bar{\delta} \cdot \bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{\delta} \cdot M_{O'}(\bar{F})$, deci $M_{\Delta}(\bar{F}) = M'_{\Delta}(\bar{F})$.

3) *Două forțe situate pe același suport, având mărimi egale și sensuri opuse, au față de aceeași axă, momente egale și de semne contrare. Această proprietate se poate demonstra imediat folosind cea de a treia proprietate din paragraful 3.2.1. Într-adevăr, deoarece: $\bar{F}' = -\bar{F}$, $\bar{M}_O(\bar{F}') = -\bar{M}_O(\bar{F})$, rezultă:*

$$\bar{\delta} \cdot \bar{M}_O(\bar{F}') = -\bar{\delta} \cdot \bar{M}_O(\bar{F}) \text{ sau } M_{\Delta}(\bar{F}') = -M_{\Delta}(\bar{F}).$$

4) *Valoarea absolută a momentului unei forțe în raport cu o axă este egală cu produsul dintre mărimea forței, lungimea perpendicularei comune dintre suportul forței și axă și sinusul unghiului format de axă și direcția forței.*

Pentru demonstrație se calculează $M_{\Delta}(\bar{F})$ prin procedee geometrice. Fie planul (π) în care se află suportul (D) al vectorului \bar{F} și punctul O , iar dreapta (Δ) ce trece prin punctul O nu aparține acestui plan. Se duce din O perpendiculara comună OA' dintre (Δ) și suportul (D) al forței \bar{F} (fig.3.8). Lunecând forța \bar{F} pe suportul ei cu originea din A în A' (operație care nu schimbă valoarea momentului), atunci $\bar{M}_o(\bar{F})$ va avea următoarea mărime:

$$|\bar{M}_o(\bar{F})| = |\bar{F}| \cdot d \quad (3.9)$$

unde cu d s-a notat lungimea perpendicularei comune OA' .

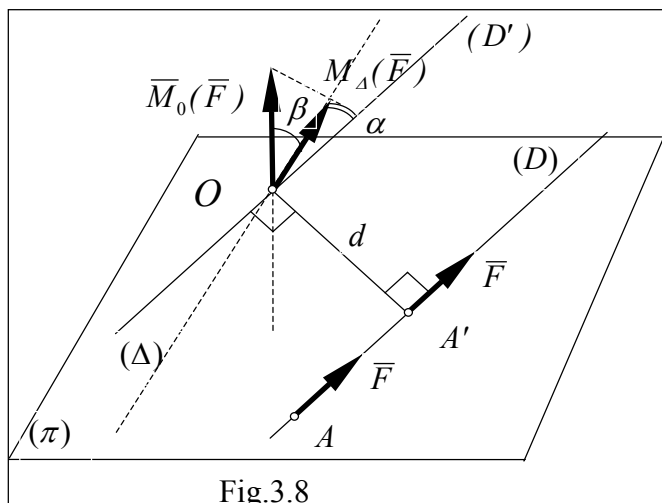


Fig.3.8

Notând cu β unghiul ascuțit dintre vectorul moment $\bar{M}_o(\bar{F})$ și axa (Δ) , atunci conform definiției:

$$M_{\Delta}(\bar{F}) = |\bar{M}_o(\bar{F})| \cdot \cos \beta \quad (3.10)$$

sau $M_{\Delta}\bar{F} = |\bar{F}| \cdot d \cdot \cos \beta$

Pentru a pune în evidență unghiul α format de axa (Δ) cu direcția forței \bar{F} , se duce prin punctul O o dreaptă (D') paralelă cu suportul (D) al forței \bar{F} .

Din figura 3.8 se observă că dreapta (D') și axa (Δ) sunt perpendiculare în O pe segmentul OA' (prin construcție), iar vectorul $\bar{M}_o(\bar{F})$ este perpendicular pe OA' în același punct O , deoarece acest segment este cuprins în planul determinat de punctul O și \bar{F} . Deoarece suportul lui $\bar{M}_o(\bar{F})$ și dreptele (Δ) și (D') sunt perpendiculare pe dreapta $OA' = d$, sunt coplanare toate trei, prin urmare unghiurile α și β sunt coplanare și adiacente. Deoarece, prin definiție, $\bar{M}_o(\bar{F})$ este perpendicular pe suportul lui \bar{F} , deci și pe (D') , vom avea:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{sau} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (3.11)$$

și deci $\cos \beta = \sin \alpha$, iar relația (3.10) capătă forma:

$$M_{\Delta}(\bar{F}) = |\bar{F}| d \cdot \sin \alpha \quad (3.12)$$

care exprimă tocmai proprietatea enunțată mai sus.

Pentru determinarea semnului momentului $M_{\Delta}(\bar{F})$ se aplică *regula șurubului drept*. Astfel, semnul lui $M_{\Delta}(\bar{F})$ va fi *pozitiv* dacă șurubul drept (așezat dealungul axei (Δ) și rotit în sensul indicat de vectorul forță) *înaintează* în raport cu sensul axei (Δ) dat de versorul $\bar{\delta}$; semnul lui $M_{\Delta}(\bar{F})$ va fi *negativ* dacă șurubul drept (așezat dealungul axei (Δ) și rotit în sensul indicat de vectorul forță) *înaintează* în sens invers față de sensul versorului $\bar{\delta}$.

Aplicație

Se consideră un paralelipiped dreptunghic $OABCO'A'B'C'$ având laturile:

$OA=a$, $OC=3a$ și $OO'=2a$, acționat de forțele \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 având suporturile determinate respectiv de dreptele AB' , BC' , $O'B'$ (fig.3.9).

Se cere să se calculeze următoarele momente:

$$\begin{aligned} &\bar{M}_o(\vec{F}_1), \bar{M}_o(\vec{F}_2), \bar{M}_o(\vec{F}_3); \\ &M_{ox}(\vec{F}_1), M_{oy}(\vec{F}_1), M_{oz}(\vec{F}_1). \end{aligned}$$

Rezolvare:

Se consideră sistemul de axe cu originea în O și axele ca în figura 3.9.

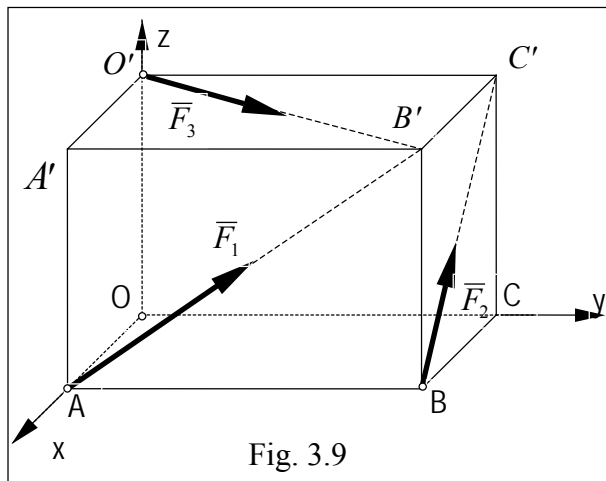


Fig. 3.9

Se scriu, mai întâi, expresiile analitice ale vectorilor forță dați:

$$\vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \text{vers } \overline{AB'} = |\vec{F}_1| \frac{\overline{AB'}}{|\overline{AB'}|} = |\vec{F}_1| \frac{3a\vec{j} + 2a\vec{k}}{\sqrt{(3a)^2 + (2a)^2}} = |\vec{F}_1| \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \vec{j} + \frac{2}{\sqrt{13}} \vec{k} \right)$$

$$\vec{F}_2 = |\vec{F}_2| \text{vers } \overline{BC'} = |\vec{F}_2| \frac{\overline{BC'}}{|\overline{BC'}|} = |\vec{F}_2| \frac{-a\vec{i} + 2a\vec{k}}{\sqrt{(-a)^2 + (2a)^2}} = |\vec{F}_2| \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{k} \right)$$

$$\vec{F}_3 = |\vec{F}_3| \text{vers } \overline{O'B'} = |\vec{F}_3| \frac{\overline{O'B'}}{|\overline{O'B'}|} = |\vec{F}_3| \frac{a\vec{i} + 3a\vec{j}}{\sqrt{(a)^2 + (3a)^2}} = |\vec{F}_3| \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \vec{i} + \frac{3}{\sqrt{10}} \vec{j} \right)$$

Momentele forțelor față de punctul O sunt:

$$\bar{M}_o(\vec{F}_1) = \overline{OA} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & F_1 \frac{3}{\sqrt{13}} & F_1 \frac{2}{\sqrt{13}} \end{vmatrix} = \frac{aF_1}{\sqrt{13}} (-2\vec{j} + 3\vec{k})$$

$$\bar{M}_o(\vec{F}_2) = \overline{OB} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 3a & 0 \\ -F_2 \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2F_2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \frac{aF_2}{\sqrt{5}} (6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k})$$

$$\overline{M}_o(\overline{F}_3) = \overline{OO'} \times \overline{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 2a \\ \frac{F_3}{\sqrt{10}} & \frac{3F_3}{\sqrt{10}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2aF_3}{\sqrt{10}}(3\bar{i} - \bar{j})$$

Ținând seama de expresia lui $\overline{M}_o(\overline{F}_1)$ se deduce :

$$M_{ox}(\overline{F}_1) = 0; \quad M_{oy}(\overline{F}_1) = -\frac{2aF_1}{\sqrt{13}}; \quad M_{oz}(\overline{F}_1) = \frac{3aF_1}{\sqrt{13}}$$

Observație

Aceleași valori se obțin ținând seama că momentul unei forțe în raport cu o axă se scrie:

$$M_{ox}(\overline{F}_1) = pr_{ox} \overline{M}_o(\overline{F}_1) = \bar{i} \cdot \overline{M}_o(\overline{F}_1) = \bar{i} \cdot (\overline{OA} \times \overline{F}_1)$$

$$M_{oy}(\overline{F}_1) = pr_{oy} \overline{M}_o(\overline{F}_1) = \bar{j} \cdot \overline{M}_o(\overline{F}_1) = \bar{j} \cdot (\overline{OA} \times \overline{F}_1)$$

$$M_{oz}(\overline{F}_1) = pr_{oz} \overline{M}_o(\overline{F}_1) = \bar{k} \cdot \overline{M}_o(\overline{F}_1) = \bar{k} \cdot (\overline{OA} \times \overline{F}_1)$$

3.2.2. Teoremele lui Varignon

Fie un sistem de n forțe \overline{F}_i ($i=1,2,\dots,n$) concurente într-un punct A și fie O un punct oarecare în spațiu (fig.3.10). Scriind momentele tuturor forțelor \overline{F}_i în raport cu punctul O avem:

$$\overline{M}_o(\overline{F}_1) = \overline{OA} \times \overline{F}_1$$

$$\overline{M}_o(\overline{F}_2) = \overline{OA} \times \overline{F}_2$$

...

...

...

$$\overline{M}_o(\overline{F}_n) = \overline{OA} \times \overline{F}_n$$

(3.13)

și adunând aceste relații membru cu membru, obținem:

$$\overline{M}_o(\overline{F}_1) + \overline{M}_o(\overline{F}_2) + \dots + \overline{M}_o(\overline{F}_n) = \overline{OA} \times \overline{F}_1 + \overline{OA} \times \overline{F}_2 + \dots + \overline{OA} \times \overline{F}_n.$$

Folosind apoi proprietatea de distributivitate a produsului vectorial, vectorul \overline{OA} se poate scoate factor comun la stânga și avem:

$$\sum_{i=1}^n \overline{M}_o(\overline{F}_i) = \overline{OA} \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n) = \overline{OA} \times \sum_{i=1}^n \overline{F}_i,$$

dar : $\sum_{i=1}^n \overline{F}_i = \overline{R}$ este rezultanta sistemului de forțe dat

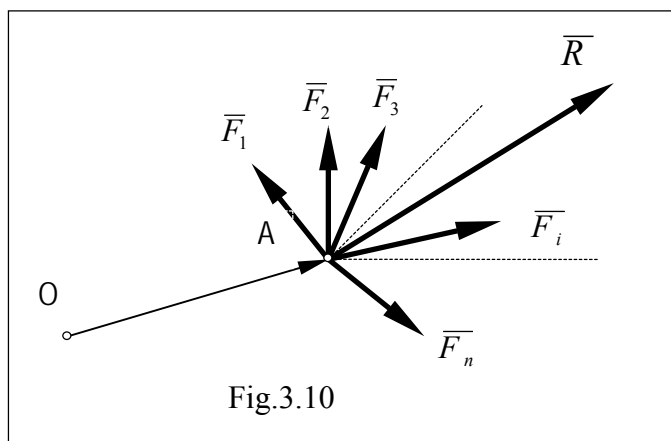


Fig.3.10

deci **teoremele lui Varignon** se pot scrie sub următoarele două forme:

$$a. \quad \sum_{i=1}^n \overline{M}_O(\overline{F}_i) = \overline{OA} \times \overline{R} \quad \text{sau} \quad \sum_{i=1}^n \overline{M}_O(\overline{F}_i) = \overline{M}_O(\overline{R}) \quad (3.14)$$

cu enunțul: *suma momentelor a n forțe concurente în raport cu un punct O , este egală cu momentul rezultantei forțelor calculat în raport cu același punct.*

Dacă punctul O se află pe o dreaptă (Δ) de versor $\overline{\delta}$, se obține:

$$b. \quad \sum_{i=1}^n M_{\Delta}(\overline{F}_i) = M_{\Delta}(\overline{R}) \quad (3.15)$$

cu enunțul: *suma momentelor a n forțe concurente în raport cu o axă este egală cu momentul rezultantei forțelor luat în raport cu aceeași axă.*

3.3. Torsorul unui sistem de forțe

3.3.1. Rezultanta generală și momentul resultant

Fie \overline{F}_i ($i=1,2,\dots,n$) un sistem de forțe reprezentând n vectori legați, aplicați în punctele A_i sau un sistem de n vectori alunecători pe suporturile lor care trec respectiv prin aceste puncte (fig.3.11). Cu ajutorul operațiilor algebrice cu vectori putem defini următoarele elemente:

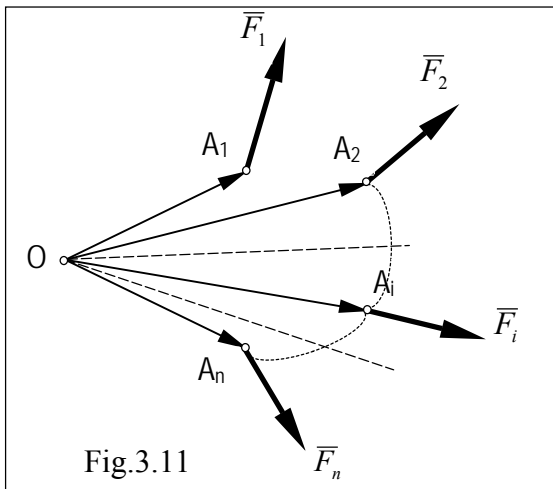


Fig.3.11

1. Rezultanta generală \overline{R}_O a sistemului în punctul O , reprezentată de un vector, aplicat în punctul O , dat de relația:

$$\overline{R}_O = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i \quad (3.16)$$

2. Momentul resultant \overline{M}_O al sistemului în punctul O , reprezentat de suma momentelor vectorilor \overline{F}_i ($i=1,2,\dots,n$) față de punctul O ,

$$\text{adică: } \overline{M}_O = \sum_{i=1}^n \overline{OA}_i \times \overline{F}_i \quad (3.17)$$

Vectorul \overline{R}_O este un *vector liber* (și va fi notat în continuare cu \overline{R} , deoarece rezultatul operației (3.16) nu depinde de punctul O), deci pentru orice punct din spațiu se obține un vector echipolent. \overline{R} este numit **primul invariant al sistemului de vectori**.

Dimpotrivă, vectorul \overline{M}_O așa cum rezultă din relația (3.17), depinde de punctul de reducere O , deci este un *vector legat* de punctul O numit *pol*, la fel ca și vectorul moment al forței \overline{F}_i din paragraful anterior.

Se numește **torsor al sistemului** de vectori forțe \overline{F}_i ($i=1,2,\dots,n$) calculat în punctul O , sistemul format din rezultanta generală și din momentul resultant, determinate în acest punct: $\tau : (\overline{R}, \overline{M}_O)$

3.3.2. Proprietăți ale torsorului

Dacă notăm cu (S) sistemul de vectori \bar{F}_i ($i=1,2,\dots,n$) și torsorul său în punctul O prin $\tau(S)$, avem următoarele proprietăți:

1. Torsorul unui sistem (S) nu se modifică dacă vectorii alunecă pe suporturile lor.
2. Fie λ un scalar și (λS) sistemul de vectori legați sau alunecători $\lambda \bar{F}_i$.

$$\text{Avem: } \tau(\lambda S) = \lambda \cdot \tau(S) \quad (3.18)$$

deoarece rezultanta generală a lui (λS) este $(\lambda \bar{R}_0)$, iar momentul resultant în O este $\lambda \bar{M}_0$. În particular dacă $\lambda = -1$:

$$\tau(-S) = -\tau(S) \quad (3.19)$$

3. Fie (S') un alt sistem de vectori legați sau alunecători \bar{F}'_j ($j=1,2,\dots,p$) și $\tau(S')$ torsorul său (\bar{R}'_0, \bar{M}'_0) . Să notăm prin $(S + S')$ sistemul $\bar{F}_i + \bar{F}'_j$, $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,3,\dots,p$, format din reuniunea sistemelor (S) și (S') . Avem:

$$\tau(S + S') = \tau(S) + \tau(S') \quad (3.20)$$

adică rezultanta generală a sistemului $(S + S')$ este suma rezultatelor generale, $(\bar{R}_0 + \bar{R}'_0)$ iar momentul resultant al sistemului $(S + S')$ este suma momentelor rezultante ale celor două sisteme: $(\bar{M}_0 + \bar{M}'_0)$

4. În general, oricare ar fi scalarii λ_1 și λ_2 avem:

$$\tau(\lambda_1 S + \lambda_2 S') = \lambda_1 \tau(S) + \lambda_2 \tau(S') \quad (3.21)$$

5. Dacă notăm cu (X, Y, Z) proiecțiile pe axele sistemului $Oxyz$ ale lui \bar{R}_0 iar cu (X_i, Y_i, Z_i) proiecțiile forțelor \bar{F}_i ($i=1,2,\dots,n$) pe axe, avem evident relațiile:

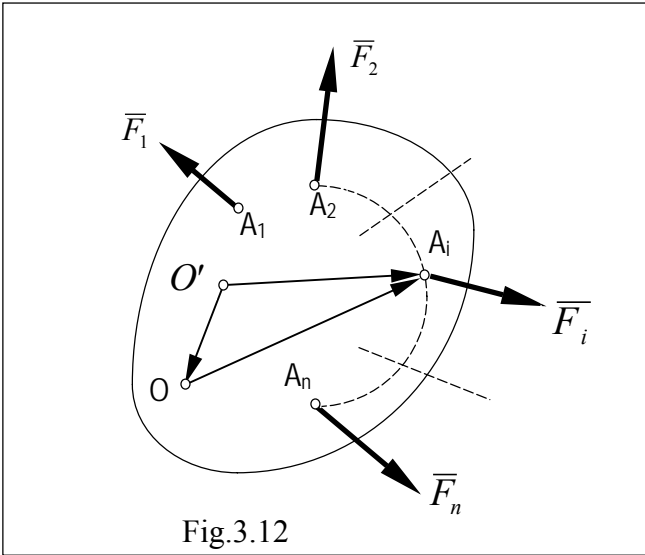
$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i. \quad (3.22)$$

Dacă notăm prin (L_i, M_i, N_i) proiecțiile pe axe ale momentului lui \bar{F}_i față de O și prin (x_i, y_i, z_i) , coordonatele punctului A_i de aplicație al vectorului \bar{F}_i , atunci proiecțiile lui \bar{M}_0 pe axele sistemului $Oxyz$ sunt date de :

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i), & M &= \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i), \\ N &= \sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.3.3. Variația momentului resultant la schimbarea polului de reducere. Proprietăți.

Se consideră sistemul de forțe \bar{F}_i ($i=1,2,\dots,n$) aplicate în punctele A_i și un punct O pentru care torsorul sistemului dat este:



$$\tau_o : \begin{cases} \bar{R}_o = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ \bar{M}_o = \sum_{i=1}^n \overline{OA_i} \times \bar{F}_i \end{cases} \quad (3.24)$$

Considerând un al doilea punct (pol) O' , torsorul de reducere în acest punct este :

$$\tau_{o'} : \begin{cases} \bar{R}_{o'} = \bar{R}_o = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ \bar{M}_{o'} = \sum_{i=1}^n \overline{O'A_i} \times \bar{F}_i \end{cases} \quad (3.25)$$

Vectorii $\bar{R}_{o'}$, \bar{R}_o pot fi considerați vectori liberi.

Ținând seama că (fig.3.12) : $\overline{O'A_i} = \overline{O'O} + \overline{OA_i}$, avem:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{o'} &= \sum_{i=1}^n (\overline{O'O} + \overline{OA_i}) \times \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n \overline{O'O} \times \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \overline{OA_i} \times \bar{F}_i = \\ &= \overline{O'O} \times \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \right) + \sum_{i=1}^n \overline{OA_i} \times \bar{F}_i = \overline{O'O} \times \bar{R} + \bar{M}_o \end{aligned}$$

$$\text{deci: } \bar{M}_{o'} = \bar{M}_o + \overline{O'O} \times \bar{R} \quad (3.26)$$

Această relație importantă este numită *formula de schimbare a momentului la schimbarea polului de reducere*. Deci torsorul se schimbă odată cu schimbarea polului din O în O' conform relației:

$$\tau_{o'} : \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i; \\ \bar{M}_{o'} = \bar{M}_o + \overline{O'O} \times \bar{R} \end{cases} \quad (3.27)$$

Coordonatele punctului O' în raport cu un sistem de axe de coordonate $Oxyz$, fiind $O'(x,y,z)$, , atunci: $\overline{OO'} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ sau $\overline{O'O} = -x\bar{i} - y\bar{j} - z\bar{k}$ și deci avem:

$$\overline{O'O} \times \bar{R} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -x & -y & -z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (-yZ + zY)\bar{i} + (-zX + xZ)\bar{j} + (-xY + yX)\bar{k}.$$

Folosind notațiile și formula (3.26) proiecțiile pe axele sistemului ale lui $\bar{M}_{o'}$ se vor scrie:

$$L' = L - yZ + zY, \quad M' = M - zX + xZ, \quad N' = N - xY + yX \quad (3.28)$$

Din formula (3.26) rezultă următoarele *proprietăți*:

a) Dacă $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_o = 0$ atunci și $\bar{M}_{o'} = 0$, oricare ar fi polul lui O' .

Deci, *dacă într-un punct torsorul este nul, el este nul în orice punct O' .*

- b) Dacă $\bar{R} = 0$, rezultă că $\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O$. Deci, *pentru sistemele pentru care rezultanta generală este nulă, momentul resultant este considerat ca un vector liber, el fiind primul invariant la schimbarea polului* (este același în orice punct din spațiu)
- c) Dacă $\bar{R} \neq 0$ înmulțind scalar relația (3.26) cu $\bar{R}_{O'} = \bar{R}_O$ se obține:

$$\bar{R}_{O'} \cdot \bar{M}_{O'} = \bar{R}_O \cdot \bar{M}_O \quad (3.29)$$

deoarece produsul mixt $\bar{R} \cdot (\overline{O'O} \times \bar{R}) = 0$.

$$\text{Deci expresia } \bar{R} \cdot \bar{M}_O = XL + YM + ZN = \text{constant} \quad (3.30)$$

este **al doilea invariant al sistemului de vectori** $\bar{F}_i (i=1,2,\dots,n)$ la schimbarea polului (are aceeași valoare oricare ar fi polul în care se consideră torsorul sistemului). Expresia scalară (3.30) se mai numește *trinomial invariant*.

- d) Ca o consecință a relației (3.29) rezultă următoarea proprietate: dacă $\bar{R}_O \neq 0$, *proiecția momentului resultant pe direcția vectorului resultant este aceeași în orice punct din spațiu* (este invariant față de schimbarea polului O, fig.3.13.a). Într-adevăr, avem :

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = |\bar{R}| \cdot |\bar{M}_O| \cdot \cos(\bar{R}, \bar{M}_O) = |\bar{R}| \cdot |\bar{M}_O| \cdot \cos \alpha$$

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_{O'} = |\bar{R}| \cdot |\bar{M}_{O'}| \cdot \cos(\bar{R}, \bar{M}_{O'}) = |\bar{R}| \cdot |\bar{M}_{O'}| \cdot \cos \beta$$

și deoarece $|\bar{R}| \neq 0$, relația (3.29) conduce la o relație care exprimă proprietatea de mai sus: $M_O \cos \alpha = M_{O'} \cos \beta$ sau $pr_{\bar{R}} \bar{M}_O = pr_{\bar{R}} \bar{M}_{O'}$ (3.31)

Dacă se notează cu M_R valoarea comună a acestor proiecții, putem scrie:

$$M_R = pr_{\bar{R}} \bar{M}_O = \bar{M}_O \cdot \text{vers } \bar{R} = \bar{M}_O \cdot \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|} \quad (3.32)$$

$$\text{sau: } M_R = \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \quad (3.32')$$

Din relațiile (3.30) și (3.32') se deduce că *trinomial invariant și proiecția momentului resultant pe direcția rezultantei nu sunt două mărimi invariante independente*. Rezultă că la reducerea unui sistem de vectori forțe într-un punct, există doar doi invarianți \bar{R} și $\bar{R} \cdot \bar{M}_O$ sau \bar{R} și \bar{M}_R , unde: $\bar{M}_R = M_R \cdot \text{vers } \bar{R}$.

3.3.4. Torsor minimal. Axa centrală a sistemului de forțe

Precizăm că prin *operația de "reducere a unui sistem de vectori"* vom înțelege înlocuirea lui cu un sistem echivalent mai simplu, calculat într-un punct, sistem format dintr-o rezultantă și un moment resultant.

Făcând reducerea unui sistem de vectori forțe, în diferite puncte din spațiu, se constată că torsorul de reducere este diferit datorită momentului resultant $\bar{M}_{O'}$, care

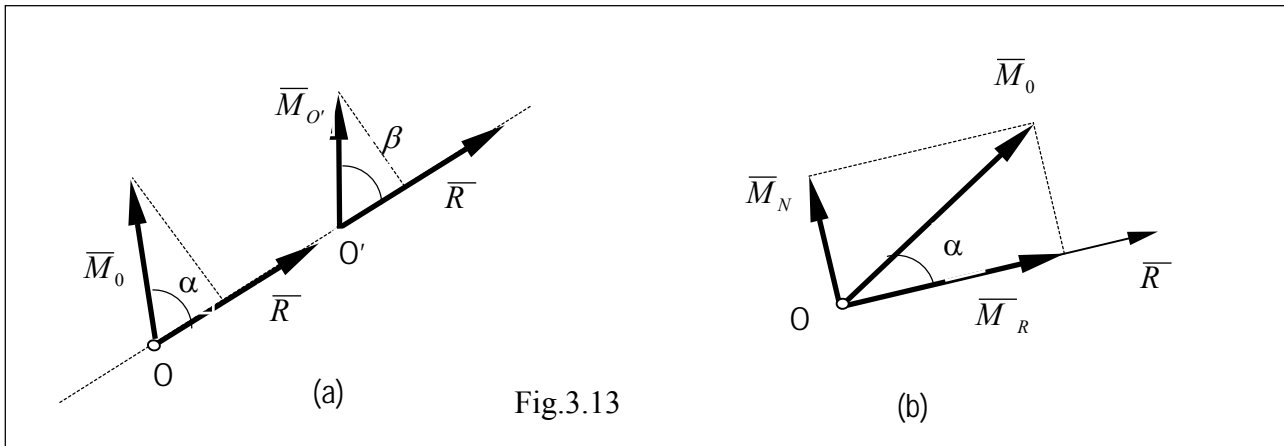
moment depinde de punctul de reducere O. Se poate descompune momentul resultant în două componente:

- a) \bar{M}_R după direcția rezultantei \bar{R} ;
 b) \bar{M}_N într-un plan normal pe direcția rezultantei (fig.3.13).

$$\text{Deci se poate scrie relația: } \bar{M}_O = \bar{M}_R + \bar{M}_N \quad (3.33)$$

Întrucât conform (3.32) componenta \bar{M}_R este un invariant, rezultă că modificările momentului \bar{M}_O se produc doar prin variația componentei \bar{M}_N , care poate lua orice valoare, în funcție de punctul de reducere, și orice poziție într-un plan normal pe \bar{R} . Din considerații geometrice și din ecuația (3.33), rezultă că proiecția pe direcția rezultantei \bar{R} a momentului \bar{M}_P reprezintă valoarea minimă pe care o poate lua momentul \bar{M}_P atunci când se modifică poziția punctului de reducere P. Deci momentul minim este:

$$\bar{M}_{min} = \bar{M}_R = M_R \cdot \text{vers } \bar{M}_R = M_R \cdot \text{vers } \bar{R} \quad (3.34)$$



Torsorul alcătuit din \bar{R} și \bar{M}_{min} se numește *torsor minimal*:

$$\tau_{min} \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i; \\ \bar{M}_{min} = M_R \cdot \text{vers } \bar{R} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{|\bar{R}|} \cdot \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} \end{cases} \quad (3.35)$$

În cazul torsorului minimal, rezultanta \bar{R} și momentul \bar{M}_{min} sunt coliniari.

Locul geometric al punctelor P în care făcând reducerea se obține torsorul minimal se numește axă centrală.

Sau altfel spus, presupunând $\bar{R} \neq 0$, mulțimea punctelor P din spațiu pentru care rezultanta generală și momentul resultant sunt coliniari este o dreaptă numită *axa centrală a sistemului*. Într-adevăr dacă P(x,y,z) este un punct aparținând axei centrale, conform relației (3.26), momentul în acest punct se scrie:

$$\overline{M}_p = \overline{M}_o - \overline{OP} \times \overline{R} = L\overline{i} + M\overline{j} + N\overline{k} - \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

$$\overline{M}_p = (L - yZ + zY)\overline{i} + (M - zX + xZ)\overline{j} + (N - xY + yX)\overline{k}$$

Din condiția de coliniaritate a vectorilor \overline{R} și \overline{M}_p care se scrie: $\overline{M}_p = \lambda\overline{R}$ și ținând seama că: $\overline{R} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}$, atunci aceasta este echivalentă cu o relație de proporționalitate între proiecțiile pe axe ale celor doi vectori și deci se scrie:

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z} \quad (3.37)$$

Relațiile (3.37) reprezintă *ecuațiile axei centrale a sistemului de vectori alunecători* sub formă implicită, și este o dreaptă în spațiu.

Ecuația axei centrale se mai poate scrie sub formă parametrică. Astfel dacă se înmulțește relația (3.36) vectorial la stânga cu \overline{R} și se ține seama că cei doi vectori \overline{R} și \overline{M}_p sunt paraleli pe axa centrală (adică: $\overline{R} \times \overline{M}_p = 0$) obținem:

$$0 = \overline{R} \times \overline{M}_p = \overline{R} \times \overline{M}_o - \overline{R} \times (\overline{OP} \times \overline{R}) = \overline{R} \times \overline{M}_o - (\overline{R} \cdot \overline{R})\overline{OP} + (\overline{R} \cdot \overline{OP})\overline{R}$$

Împărțind această ultimă relație cu R^2 , și notând $\lambda = (\overline{R} \cdot \overline{OP})/R^2$ se obține ecuația axei centrale sub formă vectorială:

$$\overline{OP} = \frac{\overline{R} \times \overline{M}_o}{R^2} + \lambda\overline{R} \quad (3.38)$$

Ecuațiile parametrică se obțin prin identificarea celor doi membri ai ecuației (3.38):

$$x = \frac{YN - ZM}{R^2} + \lambda X; \quad y = \frac{ZL - XN}{R^2} + \lambda Y; \quad z = \frac{XM - YL}{R^2} + \lambda Z \quad (3.38')$$

A p l i c a ț i e :

Se consideră paralelipipedul dreptunghic de laturi $OA=OC=2a$, $OB=4a$, asupra căruia acționează forțele având modulele: $F_1 = P\sqrt{2}$, $F_2=F_4=3P$, $F_3=P$ (fig.3.14). Se cere:

- să se determine torsorul de reducere în punctele O și B;
- să se verifice invarianța trinomului ($\overline{R} \cdot \overline{M}_o = \overline{R} \cdot \overline{M}_B$);
- să se calculeze torsorul minimal;
- să se scrie axa centrală a sistemului de forțe, sub cele două forme.

R e z o l v a r e :

Se consideră sistemul de axe cu originea în O (fig.3.14) și se exprimă analitic forțele :

$$\bar{F}_1 = F_1 \text{vers} \bar{F}_1 = F_1 \text{vers} \overline{DE} = F_1 \frac{\overline{DE}}{|\overline{DE}|}$$

$$\bar{F}_1 = P\sqrt{2} \frac{-2a\bar{i} + 2a\bar{k}}{\sqrt{4a^2 + 4a^2}} = P(-\bar{i} + \bar{k})$$

$$\bar{F}_2 = F_2 \text{vers} \bar{F}_2 = F_2 \text{vers} \overline{FG} = F_2 \frac{\overline{FG}}{|\overline{FG}|}$$

$$\bar{F}_2 = 3P \frac{4a\bar{j}}{\sqrt{16a^2}} = 3P\bar{j}$$

$$\bar{F}_3 = F_3 \text{vers} \bar{F}_3 = F_3 \text{vers} \overline{OA} = F_3 \frac{\overline{OA}}{|\overline{OA}|} = P \frac{2a\bar{i}}{\sqrt{4a^2}} = 3P\bar{i}$$

$$\bar{F}_4 = F_4 \text{vers} \bar{F}_4 = F_4 \text{vers} \overline{FC} = F_4 \frac{\overline{FC}}{|\overline{FC}|} = 3P \frac{-4a\bar{j}}{\sqrt{16a^2}} = -3P\bar{j}$$

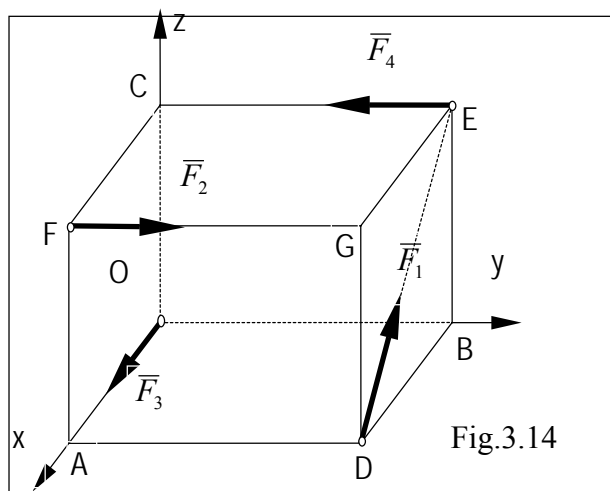


Fig.3.14

Se calculează rezultanta, componentele și modulul ei:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = P\bar{k} \Rightarrow X = Y = 0; \quad Z = P \quad \text{și} \quad |\bar{R}| = P$$

Deci, rezultanta are mărimea P și este paralelă cu Oz.

Se calculează momentul fiecărei forțe față de punctul O:

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) = \overline{OD} \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2a & 4a & 0 \\ -P & 0 & P \end{vmatrix} = 2aP(2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k})$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_2) = \overline{OF} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2a & 0 & 2a \\ 0 & 3P & 0 \end{vmatrix} = 6aP(-\bar{i} + \bar{k}); \quad \bar{M}_O(\bar{F}_3) = 0$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_4) = \overline{OF} \times \bar{F}_4 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 4a & 2a \\ 0 & -3P & 0 \end{vmatrix} = 6aP\bar{i}$$

Momentul rezultat în punctul O va fi:

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i) = 2aP(2\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}) \Rightarrow L = 4aP, \quad M = -2aP, \quad N = 10aP$$

iar momentul rezultat în B va fi:

$$\bar{M}_B = \bar{M}_O - \overline{OB} \times \bar{R} = -2Pa\bar{j} + 10Pa\bar{k}$$

a) Rezultă cele două torsoare:

$$\tau_o : \begin{cases} \bar{R} = P\bar{k} \\ \bar{M}_o = 4Pa\bar{i} - 2Pa\bar{j} + 10Pa\bar{k} \end{cases}$$

$$\tau_B : \begin{cases} \bar{R} = P\bar{k} \\ \bar{M}_B = -2Pa\bar{j} + 10Pa\bar{k} \end{cases}$$

b) Trinomul invariant este:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_o = XL + YM + ZN = 10P^2a$$

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_B = XL_B + YM_B + ZN_B = 10P^2a$$

Deci: $\bar{M}_{min} = \bar{M}_R = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_o}{|\bar{R}|} \cdot \text{vers}\bar{R} = \frac{10P^2a}{P} \cdot \bar{k} = 10Pa\bar{k}$

c) Torsorul minimal va fi: $\tau_{min} : \begin{cases} \bar{R} = P\bar{k} \\ \bar{M}_{min} = 10Pa\bar{k} \end{cases}$

d) Ecuația axei centrale sub prima formă (conform 3.37) :

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$$

se scrie: $\frac{4Pa - Py + 0}{0} = \frac{-2Pa - 0 + Px}{0} = \frac{10Pa - 0 + 0}{P};$

Rezultă: $x=2a$, $y=4a$, $z \in R$, adică axa centrală este o dreaptă paralelă cu Oz care trece prin punctul din planul Oxy: $D(2a, 4a, 0)$.

Ecuația axei centrale sub forma parametrică (conform 3.38')

$$x = \frac{YN - ZM}{R^2} + \lambda X; \quad y = \frac{ZL - XN}{R^2} + \lambda Y; \quad z = \frac{XM - YL}{R^2} + \lambda Z;$$

se scrie: $x = \frac{2aP^2}{P^2} + \lambda \cdot 0; \quad y = \frac{4aP^2}{P^2} + \lambda \cdot 0; \quad z = \lambda P;$

adică aceeași ecuație: $x = 2a; \quad y = 4a; \quad z \in R.$

3.3.5. Operații elementare de echivalență

Se numesc *operații elementare de echivalență* următoarele operații aplicate sistemelor de vectori alunecători (forțe):

- 1) schimbarea punctului de aplicație al unui vector pe suportul său (lunecarea);
- 2) adăugarea (adjuncțiunea) sau ștergerea a doi vectori egali ca mărime dar de sens opus, situați pe același suport;
- 3) compunerea a doi vectori concurenți într-un punct A, după regula paralelogramului;
- 4) descompunerea unui vector aplicat într-un punct A în mai mulți vectori concurenți.

Se observă că aceste operații efectuate asupra unui sistem de vectori (S) nu modifică torsorul. Invarianții torsorului prin aceste operații rezultă din definiția momentului și din teoremele lui Varignon. Se mai observă că operația (1) este de fapt o consecință a operației (2).

3.4. Reducerea sistemelor de vectori

3.4.1. Echivalența a două sisteme de vectori

Fie sistemele de vectori legați sau alunecători (S) și (S'). Prin definiție *aceste sisteme sunt echivalente dacă și numai dacă ele au același torsor într-un punct dat O* și vom scrie:

$$(S) \sim (S') \quad (3.39)$$

Din paragraful 3.3.3. se poate arăta că dacă două sisteme de vectori (S_1) și (S_2) au același torsor într-un punct O , ele vor avea același torsor în orice alt punct O' din spațiu. Într-adevăr, dacă (S_1) și (S_2) sunt cele două sisteme de vectori considerate, egalitatea $\bar{R}^{(1)} = \bar{R}^{(2)}$ va avea loc în toate punctele spațiului, vectorul rezultat fiind un vector liber, iar momentele rezultante ale celor două sisteme sunt:

$$\bar{M}_{O'}^{(1)} = \bar{M}_O^{(1)} + \overline{O'O} \times \bar{R}^{(1)} ;$$

$$\bar{M}_{O'}^{(2)} = \bar{M}_O^{(2)} + \overline{O'O} \times \bar{R}^{(2)} .$$

Deoarece prin ipoteză există egalitatea:

$$\bar{M}_O^{(1)} = \bar{M}_O^{(2)} , \text{ rezultă că } \bar{M}_{O'}^{(1)} = \bar{M}_{O'}^{(2)} .$$

Fie sistemele (S_1), (S_2) și (S_3). Avem următoarele proprietăți evidente, care caracterizează o relație de echivalență:

- 1) (S_1) \sim (S_1), (*reflexibilitate*);
- 2) dacă (S_1) \sim (S_2), atunci (S_2) \sim (S_1), (*simetrie*);
- 3) dacă (S_1) \sim (S_2) și (S_2) \sim (S_3) atunci (S_1) \sim (S_3), (*tranzitivitate*).

Din constatările de la paragraful 3.3.5, rezultă următoarea **teoremă**: “*Prin aplicarea operațiilor elementare de echivalență, un sistem de vectori (S_1) se transformă într-un sistem echivalent (S_2)*”. Reciproca acestei teoreme va fi dată la paragraful (3.4.6).

Mai întâi este necesar să se demonstreze câteva teoreme (leme) ajutătoare.

3.4.2. Reducerea unui sistem de vectori (S) prin operații elementare de echivalență, la un sistem format din trei vectori aplicați în trei puncte necoliniare

Fie un sistem de vectori (S) format din vectorii (forțele) \bar{F}_i aplicați în punctele A_i ($i=1,2,\dots,n$). Să considerăm punctele O_1, O_2, O_3 alese arbitrar (cu singura restricție de a nu fi situate pe aceeași dreaptă și punctul A_i să nu fie în același plan cu punctele O_1, O_2, O_3).

Cu ajutorul dreptelor A_iO_1, A_iO_2, A_iO_3 se definește un triedru cu vârful în A_i (fig.3.15.a). Putem întotdeauna să descompunem pe \bar{F}_i după cele trei direcții (A_iO_1, A_iO_2, A_iO_3) în trei vectori $\bar{F}_i^{(1)}, \bar{F}_i^{(2)}, \bar{F}_i^{(3)}$ concurenți în A_i (numite în continuare *componentele* $\bar{F}_i^{(1)}, \bar{F}_i^{(2)}, \bar{F}_i^{(3)}$), ca în fig.3.15.a. Putem scrie deci :

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i^{(1)} + \bar{F}_i^{(2)} + \bar{F}_i^{(3)} \quad (3.40)$$

Aplicând operațiile elementare de echivalență (făcând să lunece cei trei vectori pe suporturile lor, ca în fig.3.15.a), aceste trei componente se aplică în punctele O_1, O_2, O_3 astfel: $\bar{F}_i^{(1)}$ în O_1 , $\bar{F}_i^{(2)}$ în O_2 și respectiv $\bar{F}_i^{(3)}$ în O_3 .

Se procedează în mod analog și cu ceilalți vectori \bar{F}_i (fig.3.15.b). Se compun apoi toți vectorii concurenți în punctul O_i , $i=1,2,3$ (operația elementară 3), obținându-se vectorii: $\bar{\phi}_1$ aplicat în O_1 , $\bar{\phi}_2$ aplicat în O_2 și respectiv $\bar{\phi}_3$ aplicat în O_3 (fig.3.15.c). Avem deci:

$$\bar{\phi}_j = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(j)}, \quad (j = 1,2,3). \quad (3.41)$$

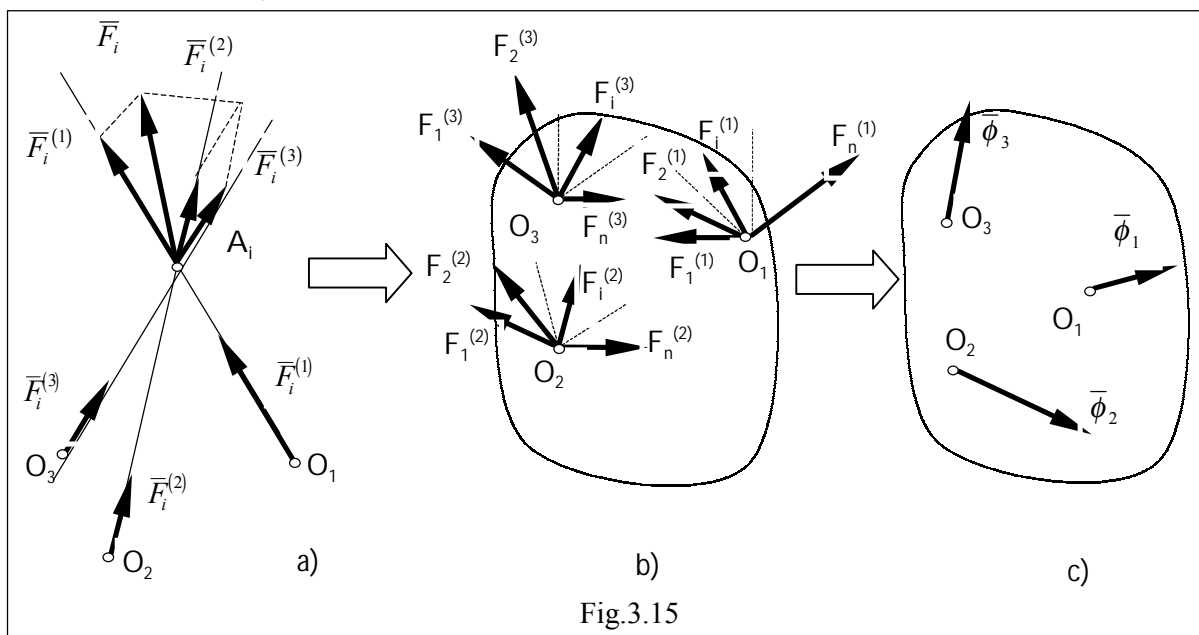


Fig.3.15

Prin urmare, prin operații elementare de echivalență s-a trecut de la sistemul (S) la sistemul de vectori aplicați respectiv în O_1, O_2, O_3 : $\{\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3\}$ (fig.3.15.c).

3.4.3. Reducerea unui sistem de vectori (S) prin operații elementare de echivalență, la un sistem format din doi vectori, dintre care unul este aplicat într-un punct arbitrar

Folosind teorema precedentă, să presupunem că un sistem de vectori alunecători s-a redus la trei vectori $\bar{\phi}_j$ ($j=1, 2, 3$) aplicați în punctele O_1, O_2, O_3 necoliniare. Planul (P_2) definit de O_1 și suportul $\bar{\phi}_2$ intersectează în general planul (P_3) definit de O_1 și de suportul lui $\bar{\phi}_3$, după o dreaptă (Δ) care trece prin O_1 (fig.3.16).

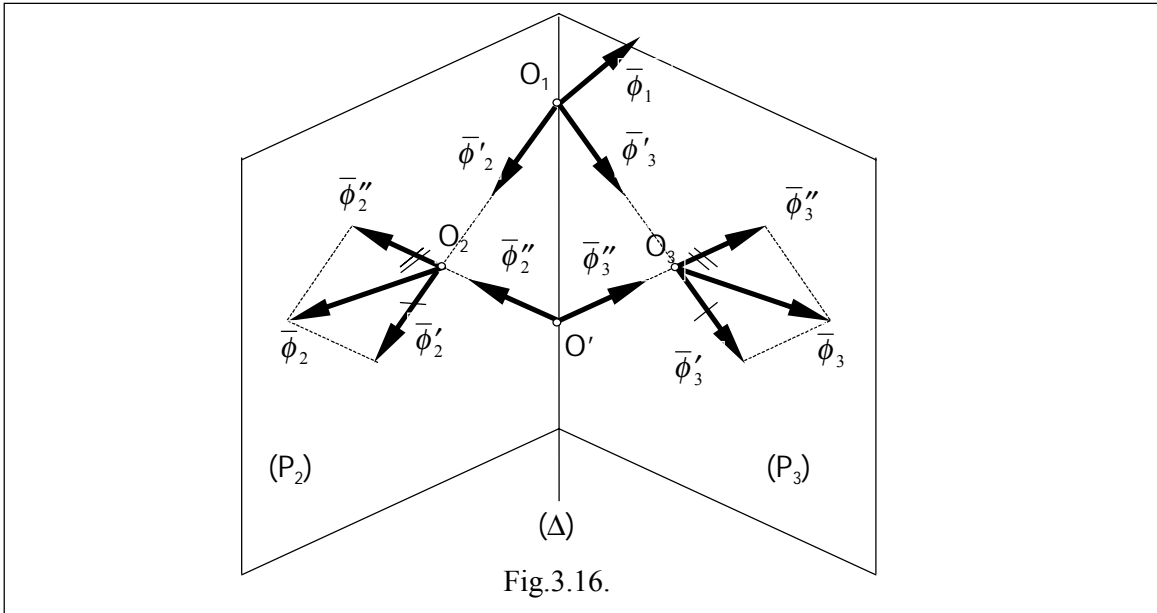


Fig.3.16.

Vom alege un punct O' arbitrar pe axa (Δ) și distinct de O_1 . Putem descompune vectorul $\bar{\phi}_2$ după doi vectori $\bar{\phi}'_2, \bar{\phi}''_2$ aplicați în O_2 și având suporturile O_1O_2 și $O'O_2$ care sunt situate în același plan (P_2) ca și vectorul $\bar{\phi}_2$. La fel, putem descompune vectorul $\bar{\phi}_3$ în doi vectori $\bar{\phi}'_3, \bar{\phi}''_3$, având respectiv suporturile O_1O_3 și $O'O_3$, care sunt situate în planul (P_3) la fel ca vectorul ϕ_3 .

Avem evident:

$$\bar{\phi}_2 = \bar{\phi}'_2 + \bar{\phi}''_2, \quad \bar{\phi}_3 = \bar{\phi}'_3 + \bar{\phi}''_3 \quad (3.42)$$

Vectorii $\bar{\phi}'_2, \bar{\phi}'_3$ pot să alunece pe suporturile lor, astfel încât să fie aplicați în O_1 . Vectorii $\bar{\phi}''_2, \bar{\phi}''_3$ pot să alunece pe suporturile lor, astfel încât să fie aplicați în O' .

Compunând apoi vectorii $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}'_2, \bar{\phi}'_3$ aplicați în O_1 și apoi vectorii $\bar{\phi}''_2, \bar{\phi}''_3$ aplicați în O' , obținem prin operații elementare de echivalență vectorii \bar{V}_1, \bar{V}_2 aplicați respectiv în O_1 și O' :

$$\bar{V}_1 = \bar{\phi}_1 + \bar{\phi}'_2 + \bar{\phi}'_3, \quad \bar{V}_2 = \bar{\phi}''_2 + \bar{\phi}''_3 \quad (3.43)$$

Dacă planele (P_2) și (P_3) coincid, atunci vectorii $\bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3$ se află în planul O_1, O_2, O_3 . În acest caz, punctul O' se alege arbitrar în acest plan, cu condiția să fie diferit de O_1, O_2, O_3 .

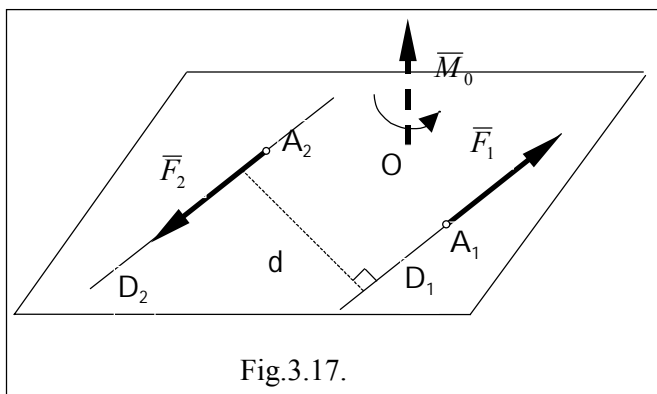


Fig.3.17.

3.4.4. Cuplul de vectori

Se numește *cuplu de vectori* un sistem format din doi vectori \bar{F}_1, \bar{F}_2 așezați pe suporturi paralele și diferite (D_1) și (D_2) , egali ca mărime, opuși ca sens (fig.3.17), astfel încât:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0 \quad (3.44)$$

Din condiția (3.44) rezultă că *rezultanta generală a unui cuplu este egală cu zero*. Prin urmare, conform proprietății b) demonstrate în paragraful (3.3.3), rezultă că momentul resultant al cuplului de vectori este același în orice punct din spațiu. El se definește ca un *vector liber* \bar{M} numit *momentul cuplului*.

Pentru determinarea cuplului \bar{M} putem lua ca pol chiar punctul A_1 :

$$\bar{M} = \overline{A_1 A_2} \times \bar{F}_2 \quad (3.45)$$

Prin urmare \bar{M} este perpendicular pe planul definit de suporturile celor două forțe $(D_1), (D_2)$ și are mărimea $|\bar{F}_1| \cdot d$, unde d este distanța dintre suporturile forțelor $(D_1), (D_2)$ și mai este numit și "*brațul cuplului*". Sensul cuplului \bar{M} este acela, pentru care un observator așezat pe suportul său în A_1 , vede rotația indicată de \bar{F}_2 în sens trigonometric (dat de *regula șurubului drept*).

Momentul cuplului este nul în următoarele două cazuri:

- dacă $\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = 0$
- dacă $d = 0$; vectorii pot fi suprimați prin operația a doua de echivalență.

3.4.5. Sisteme echivalente cu zero

Prin definiție, un sistem de vectori (S) legați sau alunecători este *echivalent cu zero* și vom scrie: $(S) \sim (0)$ (3.46) dacă *torsorul său într-un punct oarecare O este nul* adică: $\bar{R}_O = 0, \bar{M}_O = 0$ sau $\tau(S) = 0$ (3.47)

În paragraful 3.3.3. s-a arătat că dacă torsorul unui sistem de vectori este nul într-un punct O, el este nul în orice punct din spațiu.

Teoremă: "un sistem (S) echivalent cu zero poate fi suprimat prin operații elementare de echivalență".

Demonstrația este imediată. S-a arătat anterior că sistemul (S) poate fi redus la un sistem echivalent format din doi vectori \bar{F}_1, \bar{F}_2 aplicați în punctele O_1, O_2 ; dacă presupunem că acest sistem este echivalent cu zero, adică $\bar{R}_o = 0, \bar{M}_o = 0$, din relația: $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$ rezultă $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$, deci vectorii trebuie să formeze un cuplu având mărimea: $|\bar{M}_o| = |\bar{F}_1| \cdot d$; dar întrucât $\bar{M}_o = 0$ (adică $|\bar{M}_o| = 0$) rezultă că distanța dintre suporturile vectorilor trebuie să fie $d=0$, adică vectorii \bar{F}_1, \bar{F}_2 se află pe același suport, fiind egali și de sens contrar, deci ei pot fi efectiv suprimați prin operații elementare de echivalență.

3.4.6. Teorema reductibilității sistemelor echivalente

Dacă două sisteme de vectori legați sau alunecători (S) și (S') sunt echivalente, se poate trece de la un sistem la celălalt prin operații elementare de echivalență.

Această teoremă este reciproca teoremei enunțate în paragraful 3.4.1. S-a văzut acolo că prin operațiile elementare de echivalență se poate trece de la un sistem (S) la un sistem echivalent (S'). Teorema enunțată mai sus ne arată că *nu există sisteme (S') echivalente cu (S), altele decât cele care se obțin din (S) prin operații elementare de echivalență.*

Demonstrație: Prin ipoteză $(S) \sim (S')$, adică luând torsorul în punctul O : $\tau(S) = \tau(S')$. Să considerăm acum sistemul (S); prin operații elementare de echivalență, adăugând vectorii care compun sistemele $(-S')$ și (S') , se ajunge la sistemul: $(S) + (-S') + (S')$, care este echivalent cu (S). Dar din ipoteză:

$$\tau(-S') = -\tau(S') = -\tau(S) \quad \text{deci: } \tau[(S) + (-S')] = \tau(S) + \tau(-S') = 0$$

Prin urmare, sistemul $(S) + (-S')$ este echivalent cu zero, deci poate fi suprimat efectiv prin operații elementare de echivalență. În felul acesta, prin operații elementare de echivalență: $(S) \rightarrow (S) + (-S') + (S') \rightarrow (S')$ se ajunge de la (S) la (S').

3.4.7. Cazurile de reducere a unui sistem de vectori alunecători

În baza teoremei de echivalență (de la paragraful 3.4.1.), reducerea unui sistem de vectori alunecători înseamnă înlocuirea acestuia cu cel mai simplu sistem, care este format dintr-un vector \bar{R} și un vector moment resultant \bar{M}_o și care este echivalent cu sistemul dat. Se disting următoarele cazuri de reducere:

Cazul I. $\bar{R} = 0, \bar{M}_o = 0$; adică *torsorul de reducere este nul.*

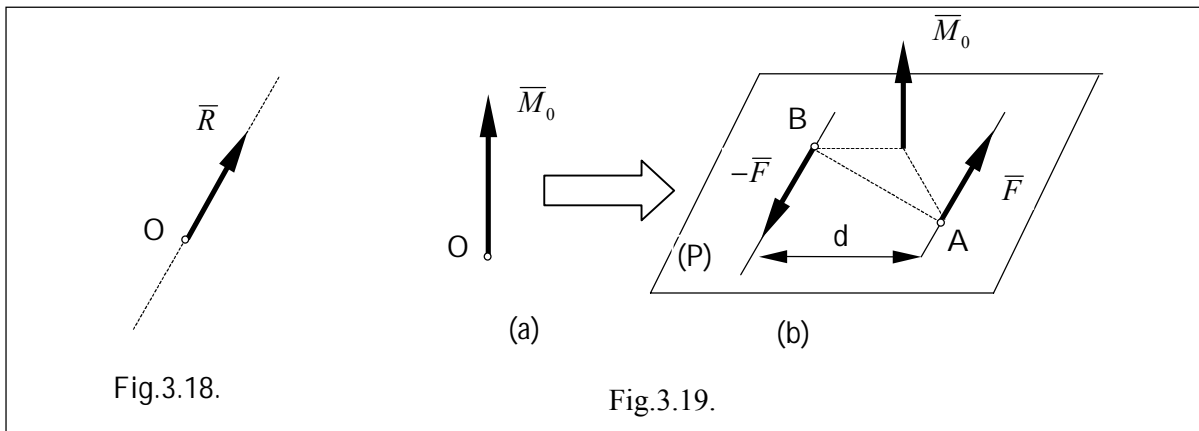
Sistemul este în echilibru și este echivalent cu orice sistem în echilibru (în particular și cu un "sistem" fără nici un vector). Un astfel de sistem se numește echivalent cu zero.

Cazul II. $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O = 0$;

Sistemul este echivalent cu un vector unic aplicat în O (fig.3.18). Torsorul de reducere constă doar în rezultanta \bar{R} .

Cazul III. $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O \neq 0$;

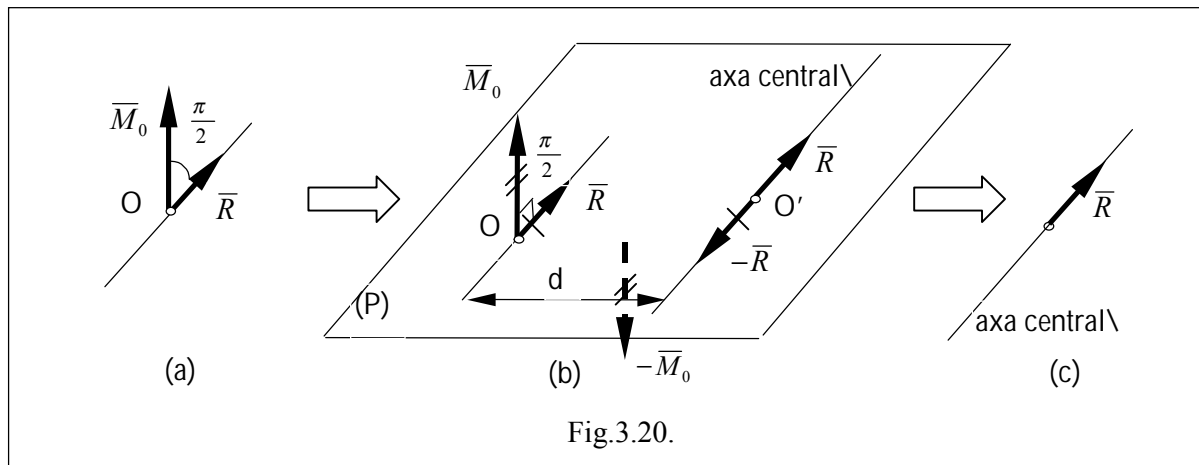
În acest caz sistemul de vectori alunecători este echivalent cu un cuplu (fig.3.19.a.), adică un sistem alcătuit din doi vectori $(\bar{F}, -\bar{F})$ paraleli, egali ca mărime, opuși și acționând pe suporturi diferite situate într-un plan normal pe vectorul \bar{M}_O . Distanța d între suporturi, se alege astfel încât: $|\bar{F}| \cdot d = \bar{M}_O$, iar sensurile vectorilor $\bar{F}, -\bar{F}$ se aleg astfel încât să fie respectată, pentru sensul lui \bar{M}_O , regula șurubului drept (fig.3.19.b.).



Cazul IV. $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$; în acest caz, cel mai general, se disting două situații,

în funcție de valoarea trinomialului invariant $\bar{R} \cdot \bar{M}_O$:

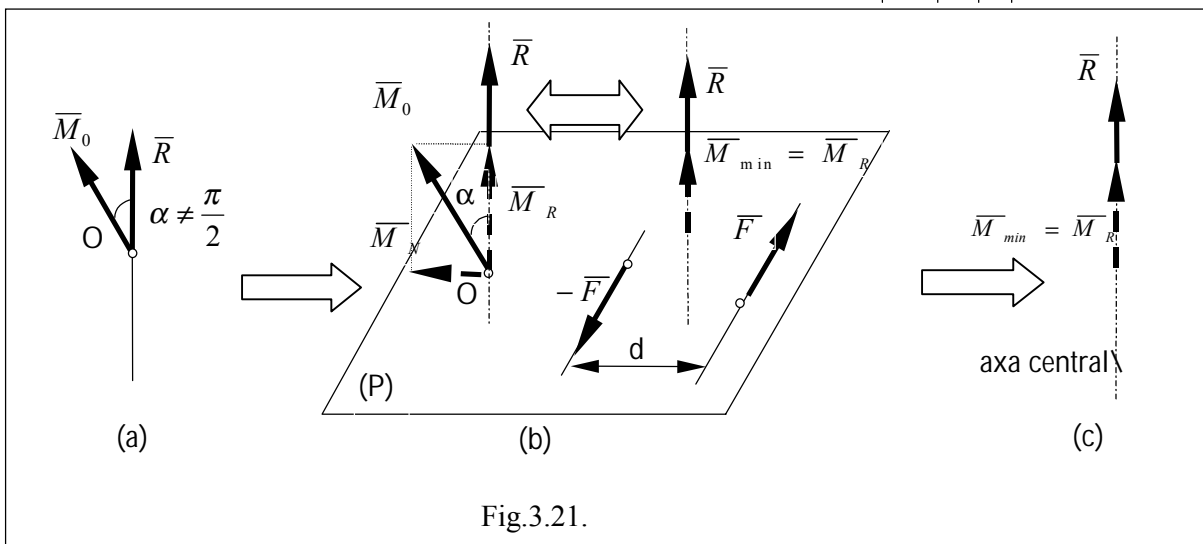
- a) $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$; deci cei doi vectori \bar{R}, \bar{M}_O sunt perpendiculi (fig.3.20.a). Pentru a determina un sistem echivalent mai simplu, se introduc vectorii $(\bar{R}, -\bar{R})$ în punctul O' din planul (P) normal pe \bar{M}_O care trece prin O și în care se află rezultanta \bar{R} (fig.3.20.b).



Distanța dintre suporturile care trec prin O și O' se alege astfel încât $d = |\bar{M}_0|/|\bar{R}|$, deci vectorii \bar{R} din O și $-\bar{R}$ din O' alcătuiesc un *cuplu* de moment $-\bar{M}_0$, care anulează momentul \bar{M}_0 al tursorului.

În acest caz sistemul dat este echivalent cu un vector unic \bar{R} (fig.3.20.c), suportul lui fiind chiar axa centrală a sistemului, deoarece în lungul acestei axe momentul are valoarea minimă, care în acest caz este zero ($\bar{M}_R = 0$). Se observă că al II-lea caz este de fapt un caz particular al acestui caz.

- b) $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 \neq 0$; adică cei doi vectori fac între ei un unghi $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ (fig.3.21.a) și avem ($\bar{M}_R \neq 0$). Rezultă că sistemul de vectori alunecători dat este echivalent cu un vector *rezultantă* \bar{R} situat pe axa centrală și cu un *cuplu* format din vectorii $(\bar{F}, -\bar{F})$, situați într-un plan normal pe axa centrală a sistemului de vectori dat (fig.3.21.c). Sensurile celor doi vectori $(\bar{F}, -\bar{F})$ ai acestui cuplu, se alege astfel încât să fie respectată regula șurubului drept (fig.3.21.b) iar distanța d între suporturile lor se alege astfel încât să fie respectată relația $|\bar{M}_R| = |\bar{F}| \cdot d$.



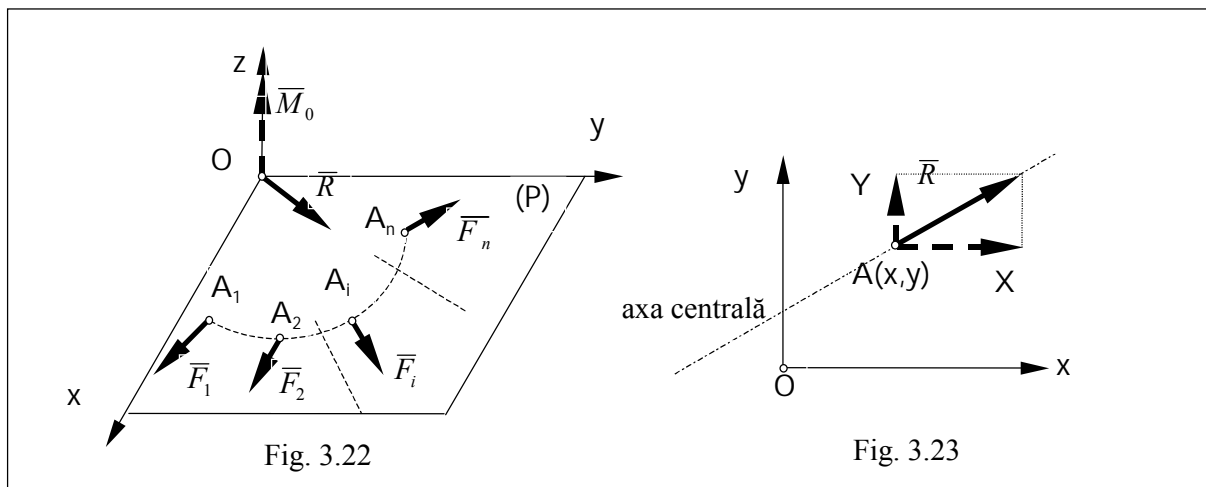
3.5. Reducerea unor sisteme particulare de vectori

3.5.1 Sisteme de vectori coplanari

Un sistem de vectori se numește coplanar dacă toți vectorii sistemului sunt conținuți în același plan (P).

Conform acestei definiții se observă că vectorul \bar{R} se află în planul (P) iar vectorul \bar{M}_0 este perpendicular pe acest plan (punctul O se află în planul P) (fig.3.22.), deoarece momentul fiecărui vector \bar{F}_i ($i=1,2,\dots,n$) este normal pe planul (P), deci:

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j}; \quad \bar{M}_0 = N\bar{k} \quad (3.48)$$



Întrucât în acest caz, vectorii \bar{R} și \bar{M}_O sunt ortogonali, rezultă $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ și deci $\bar{M}_{min} = 0$. Pentru un sistem de vectori alunecători și coplanari, în cazul general $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0 \Rightarrow \bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$, dar în particular acesta se poate reduce la unul din următoarele trei cazuri:

- 1) $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0 \Rightarrow$ sistemul este echivalent cu zero;
- 2) $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O \neq 0 \Rightarrow$ sistemul se reduce la un cuplu;
- 3) $\bar{R} \neq 0$ sistemul se reduce la un vector unic pe axa centrală ; pentru cazul în care suportul său trece prin O, conduce la $\bar{M}_O = 0$, iar pentru cazul în care suportul său nu trece prin O rezultă $\bar{M}_O \neq 0$.

Pentru determinarea ecuației axei centrale să considerăm un sistem cartezian de axe Oxy conținut în planul (P). În acest caz vectorii \bar{F}_i au proiecțiile nule pe axa Oz ($Z_i=0$, $Z=0$) și momentele nule față de axele Ox și Oy ($L=0$, $M=0$) iar relația (3.37) a axei centrale, conduce la ecuațiile:

$$\frac{zY}{X} = \frac{-zX}{Y} = \frac{N - xY + yX}{O} \quad (3.49)$$

sau $(X^2 + Y^2)z = 0$, unde $z = 0$ (evident),

$$N - xY + yX = 0 \text{ sau } N = xY - yX \quad (3.50)$$

Axa centrală se găsește în planul Oxy al vectorilor \bar{F}_i , iar ecuația: $N = M_O = xY - yX$, ne indică faptul că momentul resultant în raport cu axa Oz este același cu momentul resultant în raport cu punctul O, adică momentul resultant al vectorilor din planul Oxy are direcția axei Oz.

Metodă grafică de reducere a unui sistem de vectori coplanari (poligonul funicular)

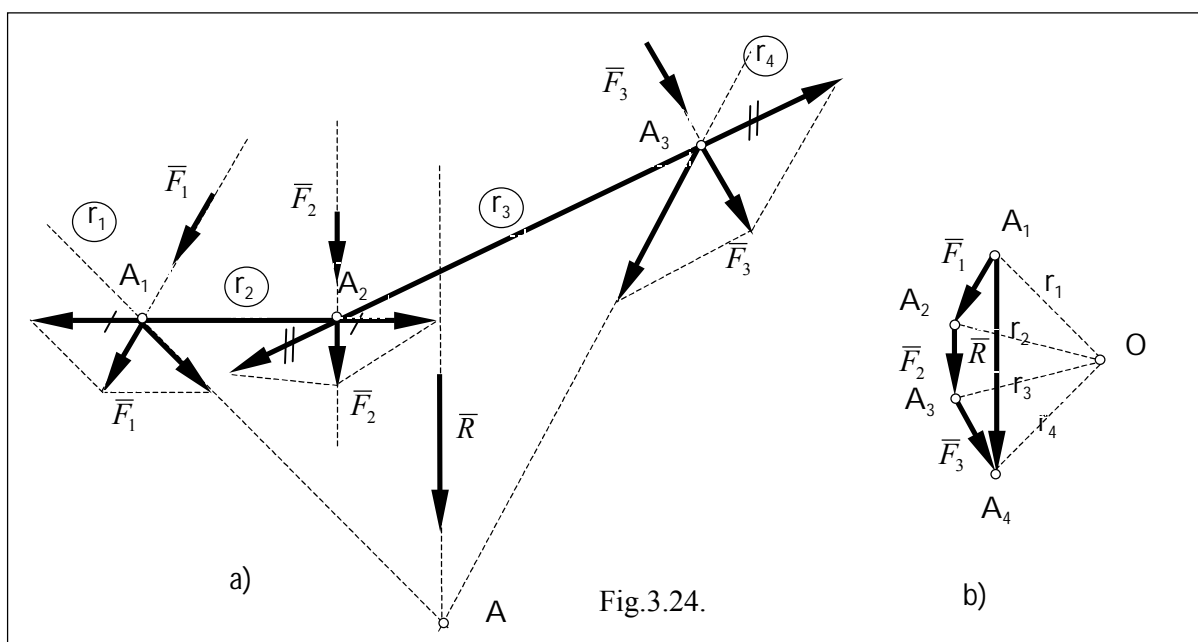
Se presupune că sistemul este compus din vectorii (forțele) \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 (fig.3.24.a). Se pornește de la poligonul forțelor dat în fig. 3.24.b, obținându-se

rezultanta \bar{R} ca mărime, direcție și sens. Dacă se cunoaște și suportul ei, rezultanta \bar{R} este determinată complet. Pentru o găsi suportul se efectuează construcția din figura 3.24. a și b, procedându-se astfel:

- se alege un punct O arbitrar numit *pol*, în planul forțelor și se unește acest punct cu extremitățile A_1, A_2, A_3, A_4 ale forțelor (vectorilor). Se obțin *raze polare* r_1, r_2, r_3, r_4 ;
- se duc paralele la aceste raze (fig.3.24.a) limitându-le la suporturile celor trei vectori;
- se prelungesc laturile extreme ale *poligonului funicular astfel obținut* (adică razele r_1 și r_4), și se obține punctul A care se află chiar pe suportul lui \bar{R} .
- prin punctul A se duce o paralelă la vectorul \bar{R} din poligonul forțelor obținându-se astfel suportul rezultantei; \bar{R} este un vector alunecător pe acest suport.

Această construcție se justifică astfel:

- razele vectoriale r_1 și r_2 pot fi considerate două componente ale vectorului \bar{F}_1 ; în mod analog r_2 și r_3 pentru \bar{F}_2 și r_3 și r_4 pentru \bar{F}_3 ; descopunând fiecare din vectorii $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ după direcțiile laturilor poligonului funicular, putem înlocui cei trei vectori ai sistemului cu componentele (vectorii) acționând în lungul laturilor poligonului funicular.
- se observă că vectorii care acționează pe laturile intermediare r_2 și r_3 se reduc, fiind egali și de sens opus, rămânând doar vectorii de pe laturile extreme, deci sistemul s-a redus la doi vectori situați pe laturile extreme și rezultanta sistemului va trece evident prin punctul A de intersecție a acestor laturi. Se observă că vectorii de pe laturile extreme $\overline{OA_1}, \overline{OA_4}$ au aceeași rezultantă \bar{R} ca și vectorii $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ verificarea se face cu ajutorul fig. 3.24.b.



3.5.2. Reducerea unui sistem de vectori paraleli. Centrul vectorilor paraleli

Fie \vec{F}_i un sistem (S) de n forțe reprezentate de vectorii paraleli aplicați în punctele A_i ($i=1, 2, \dots, n$). Să notăm cu \vec{u} versorul direcției comune vectorilor \vec{F}_i (fig.3.25). În acest caz se poate scrie: $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{u}$ (3.51)

unde F_i este mărimea algebrică a lui \vec{F}_i , adică proiecția lui pe direcția lui \vec{u} (deci F_i poate fi un scalar pozitiv sau negativ după cum vectorul \vec{F}_i are același sens sau sens contrar cu \vec{u} ; a nu se confunda cu valoarea sau mărimea absolută a vectorului \vec{F}_i).

Vectorul rezultat al sistemului va fi: $\vec{R}_o = \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \vec{u}$ (3.52)

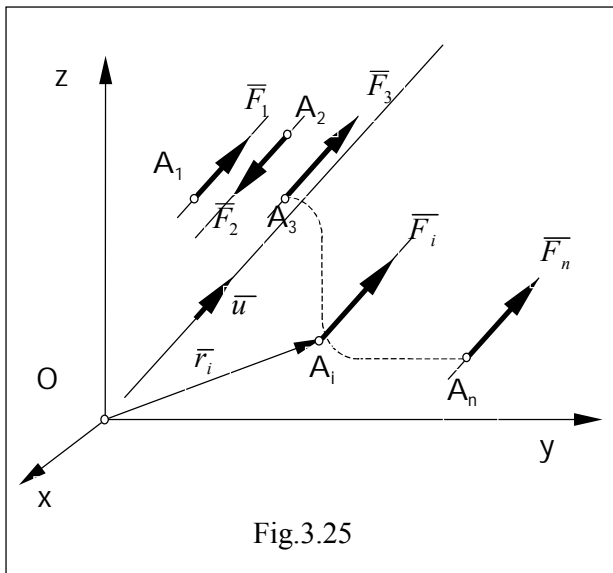


Fig.3.25

Din formula (3.52) rezultă că vectorul rezultat are aceeași direcție ca și vectorii sistemului, iar mărimea lui \vec{R} se obține prin însumarea mărimilor vectorilor. Momentul rezultat al sistemului este dat de:

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \overline{OA_i} \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times F_i \vec{u}$$

sau:

$$\vec{M}_o = \left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i \right) \times \vec{u} \quad (3.53)$$

Se observă din această relație că \vec{M}_o este perpendicular vectorului \vec{u} și deci vectorului \vec{R} , adică și în cazul vectorilor paraleli avem trinomial invariant nul: $\vec{R} \cdot \vec{M}_o = 0$.

Prin urmare și aici - ca și în cazul vectorilor coplanari - se deosebesc următoarele trei cazuri de reducere:

- 1) $\vec{R} = 0, \vec{M}_o = 0$, sistem echivalent cu zero;
- 2) $\vec{R} = 0, \vec{M}_o \neq 0$, sistem echivalent cu un cuplu;
- 3) $\vec{R} \neq 0$, sistem echivalent cu un vector unic aplicat pe axa centrală, vector care trece prin punctul O când $\vec{M}_o = 0$ și nu trece prin O când $\vec{M}_o \neq 0$.

Pentru determinarea axei centrale se folosește proprietatea că trinomial invariant este nul $\vec{R} \cdot \vec{M}_o = 0$ și se ține seama că valoarea minimă a momentului este zero. Deci, în acest caz, axa centrală este locul geometric al punctelor unde momentul este nul.

Fie P un punct curent pe axa centrală; conform relației (3.26) avem:

$$\overline{M}_P = \overline{M}_O - \overline{OP} \times \overline{R} = 0 \quad (3.54)$$

Scriind că $\overline{OP} = \overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ și ținând seama de (3.52) și (3.53), relația (3.54) devine:

$$\left(\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i \right) \times \overline{u} - \overline{r} \times \overline{u} \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) = 0, \quad \text{sau:} \quad \left(\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i \right) \times \overline{u} - \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \overline{r} \times \overline{u} = 0$$

$$\text{sau:} \quad \left[\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i - \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \overline{r} \right] \times \overline{u} = 0 \quad (3.55)$$

Produsul vectorial (3.55) fiind nul, rezultă că cei doi vectori sunt coliniari și prin urmare între acești vectori există relația:

$$\sum F_i \overline{r}_i - \left(\sum F_i \right) \overline{r} = \lambda \overline{u}, \quad \text{unde } \lambda \text{ este un scalar,}$$

deci, vectorul de poziție al punctului curent de pe axa centrală $\overline{OP} = \overline{r}$ are

$$\text{expresia:} \quad \overline{r} = \frac{\sum F_i \overline{r}_i}{\sum F_i} - \lambda \frac{\overline{u}}{\sum F_i} \quad (3.56)$$

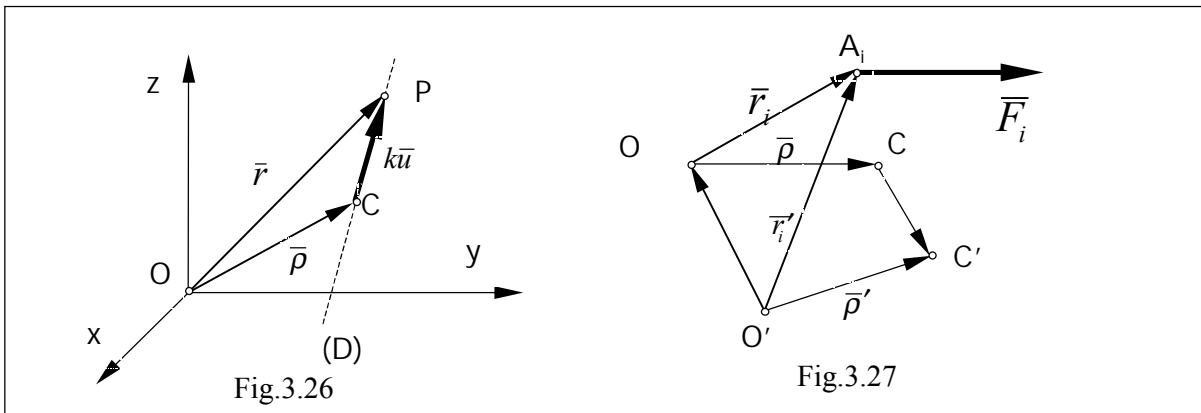
$$\text{Dacă se notează cu : } k = -\frac{\lambda}{\sum F_i} \text{ și } \overline{\rho} = \frac{\sum F_i \overline{r}_i}{\sum F_i},$$

se obține ecuația vectorială a axei centrale sub forma:

$$\overline{r} = \overline{\rho} + k\overline{u}, \quad (3.57)$$

unde, atunci când k variază, punctul P descrie o dreaptă (D) care trece printr-un punct fix C care are vectorul de poziție $\overline{\rho}$ (care nu depinde de orientarea \overline{u} a vectorilor paraleli). Ecuația (3.57) este ecuația vectorială a unei drepte paralelă cu \overline{u} (fig.3.26), ce trece printr-un punct fix C numit *centrul vectorilor paraleli* (forțelor paralele). Vectorul de poziție al acestui punct este:

$$\overline{r}_c = \overline{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (3.58)$$



Coordonatele centrului vectorilor paraleli $C(\xi, \eta, \zeta)$ sunt date de relațiile:

$$\xi = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad \eta = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad \zeta = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i} \quad (3.58')$$

Proprietăți ale centrului vectorilor paraleli:

- a) deoarece $\bar{\rho}$ nu depinde de \bar{u} , se poate schimba direcția tuturor vectorilor cu același unghi și axa centrală va trece tot prin C .
- b) se poate multiplica mărimea tuturor vectorilor cu un scalar pozitiv λ și centrul vectorilor paraleli rămâne același. Într-adevăr, presupunând prin absurd că s-ar schimba mărimea tuturor vectorilor cu λ , avem:

$$\bar{\rho}' = \frac{\sum F_i' \bar{r}_i}{\sum F_i'} = \frac{\sum \lambda F_i \bar{r}_i}{\sum \lambda F_i} = \frac{\lambda \sum F_i \bar{r}_i}{\lambda \sum F_i} = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i} = \bar{\rho}$$

- c) centrul C al vectorilor paraleli nu depinde de originea sistemului de referință ales (este un element intrinsec al sistemului de vectori).

Pentru demonstrație se admite, prin absurd, că folosind polul O' se găsește ca centru a vectorilor paraleli punctul C' și deci $\overline{O'C'} = \bar{\rho}'$ (fig.3.27).

Avem evident relațiile:
$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i}{\sum F_i}, \quad \bar{\rho}' = \frac{\sum F_i \bar{r}_i'}{\sum F_i} \quad (3.59)$$

unde: $\bar{\rho}' = \overline{O'O} + \bar{\rho} + \overline{CC'}$

Pe de altă parte, deoarece $\bar{r}_i' = \bar{r}_i + \overline{O'O}$, avem:

$$\bar{\rho}' = \frac{\sum F_i \bar{r}_i'}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i (\bar{r}_i + \overline{O'O})}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i} + \overline{O'O} = \bar{\rho} + \overline{O'O} \quad (3.60)$$

Comparând relațiile (3.59) și (3.60) obținute pentru $\bar{\rho}'$ se deduce că $\overline{CC'} = 0$, deci punctele C și C' coincid. Adică centrul vectorilor paraleli nu depinde de sistemul de referință.

A p l i c a ț i e :

Dacă se consideră două forțe paralele aplicate astfel: \bar{F}_1 în $A_1(x_1, y_1, z_1)$ și \bar{F}_2 în $A_2(x_2, y_2, z_2)$, se obține centrul $C(\xi, \eta, \zeta)$ al acestor forțe, aplicând formulele (3.58')

$$\xi = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}, \quad \eta = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2}, \quad \zeta = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_1 + F_2}$$

Dacă se notează cu $\lambda = \frac{F_2}{F_1}$ rezultă:

$$\xi = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \eta = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad \zeta = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Deci, punctul C împarte segmentul A_1A_2 în raportul $\lambda = \frac{|CA_1|}{|CA_2|}$ și se găsește în interiorul segmentului A_1A_2 când forțele au același sens și în afara lui când sunt de sens opus.

3.6. Metode matriciale pentru reducerea unui sistem de vectori alunecători.

Pe lângă metodele vectoriale, analitice și grafice pentru studiul sistemelor de vectori, prezentate mai sus, în prezent se utilizează și metode matriciale, care s-au dezvoltat datorită progresului în domeniul tehnicii de calcul. Aceste metode se bazează pe matricea coordonatelor pluckeriene prezentă în paragraful 1.10: dându-se o direcție (Δ) caracterizată prin versorul \bar{u} s-a definit din matricea coloană : $\{u\} = \{a \ b \ c \ l \ m \ n\}^T$.

Astfel cu ajutorul acestor coordonate se pot determina:

- torsorul de reducere al unei forțe în raport cu punctul O , τ_o care se scrie sub forma matricială:

$$\{\tau_o\} = \{u\}\{F\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} \{F\} \Leftrightarrow \begin{cases} X = aF \\ Y = bF \\ Z = cF \\ L = lF \\ M = mF \\ N = nF \end{cases} \quad (3.61)$$

- torsorul de reducere al unui sistem de forțe \bar{F}_i , ($i=1, \dots, n$) și de cupluri \bar{C}_j , ($j=1, \dots, p$) în punctul O : τ_o care se scrie sub forma matricială astfel:

$$\{\tau_o\} = [u]\{F\} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n & l_1^* & l_2^* & \dots & l_p^* \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n & m_1^* & m_2^* & \dots & m_p^* \\ n_1 & n_2 & \dots & n_n & n_1^* & n_2^* & \dots & n_p^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_n \\ C_1 \\ \dots \\ C_p \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

unde cu $(a_i, b_i, c_i, l_i, m_i, n_i)$ s-au notat coordonatele pluckeriene ale forței \bar{F}_i , iar cu (l_j^*, m_j^*, n_j^*) s-au notat cosinuşii directori ai cuplului \bar{C}_j .

Aplicație

Se consideră un paralelipiped dreptunghic $OABCO'A'B'C'$ având laturile: $OA=a$, $OC=3a$ și $OO'=2a$, acționat de forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ având suporturile determinate respectiv de dreptele $AB', BC', O'B'$ și de cuplurile $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$, având suporturile determinate respectiv de dreptele: $AA', C'O', B'C'$ (fig.3.28).

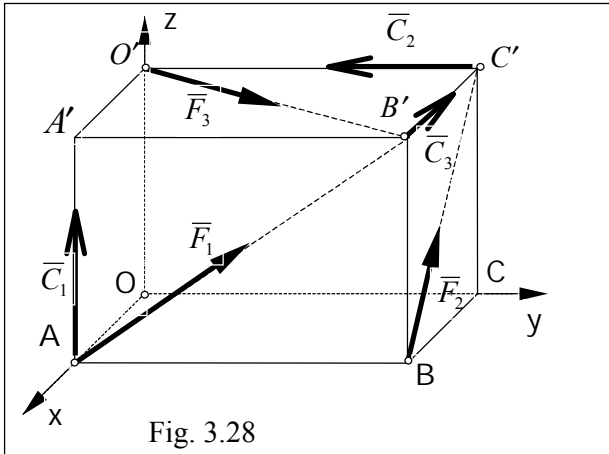


Fig. 3.28

Se cunosc mărimile acestor forțe și cupluri:

$$|\vec{F}_1| = P\sqrt{13}, \quad |\vec{F}_2| = P\sqrt{5}, \quad |\vec{F}_3| = P\sqrt{10}$$

$$|\vec{C}_1| = aP, \quad |\vec{C}_2| = 2aP, \quad |\vec{C}_3| = 3aP.$$

Se cere, folosind metoda matricială, să se calculeze torsorul de reducere al sistemului de forțe și cupluri în punctul O.

Rezolvare:

Se determină mai întâi, coordonatele punctelor $O, A, B, C, O', A', B', C'$

punctul	O	A	B	C	O'	A'	B'	C'
X	0	a	a	0	0	a	a	0
Y	0	0	3a	3a	0	0	3a	3a
Z	0	0	0	0	2a	2a	2a	2a

Se determină apoi lungimile și cosinuzii directori ai dreptelor-suport ale forțelor (coordonatele plukeriene notate cu: a, b, c), momentele versorilor corespunzatori forțelor (coordonatele plukeriene notate cu: l, m, n), și respectiv cosinuzii directori ai dreptelor-suport ale cuplurilor (coordonatele plukeriene notate cu l^*, m^*, n^*).

Torsorul τ_o de reducere a forțelor și cuplurilor în punctul O, conform (3.62) se scrie sub forma matricială astfel:

$$\{\tau_o\} = [u]\{F\} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 3/\sqrt{13} & 0 & 3/\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{13} & 2/\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6a/\sqrt{5} & -6a/\sqrt{10} & 0 & 0 & -1 \\ 2a/\sqrt{13} & -2a/\sqrt{5} & 2a/\sqrt{10} & 0 & -1 & 0 \\ 3a/\sqrt{13} & -3a/\sqrt{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P\sqrt{13} \\ P\sqrt{5} \\ P\sqrt{10} \\ aP \\ 2aP \\ 3aP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6P \\ 4P \\ -3aP \\ 0 \\ aP \end{bmatrix}$$

CAPITOLUL 4

CENTRUL MASELOR

CENTRUL DE GREUTATE

4.1. Greutatea corpurilor. Centrul de greutate. Centrul maselor.

Experiențele efectuate arată că la suprafața pământului există un câmp gravitațional, care se manifestă prin aceea că un corp de masă m este acționat de o forță verticală proporțională cu masa și orientată în jos:

$$\vec{G} = m\vec{g} \quad (4.1)$$

S-a constatat că *intensitatea câmpului gravitațional terestru* g este variabilă cu latitudinea și altitudinea. Însă pentru variații mici ale latitudinii și altitudinii, mărimea intensității câmpului gravitațional g poate fi considerată constantă. În țara noastră se consideră pentru intensitatea g *ovaloare medie*: $g=9,81 \text{ m/s}^2$.

S-a constatat de asemenea că accelerația gravitațională \vec{g} este aproximativ dirijată către centrul pământului (după direcția razei), abaterea maximă față de direcția razei fiind de cca. 6 minute.

Considerând un sistem discret de puncte materiale A_i de mase m_i , atunci greutatea lor $\vec{G}_i = m_i\vec{g}$ ($i=1, 2, \dots, n$) pot fi considerate aproximativ ca *un sistem de forțe paralele*, deci lor li se aplică rezultatele obținute în paragraful 3.5.2. Greutatea acestui sistem (rezultanta forțelor) este:

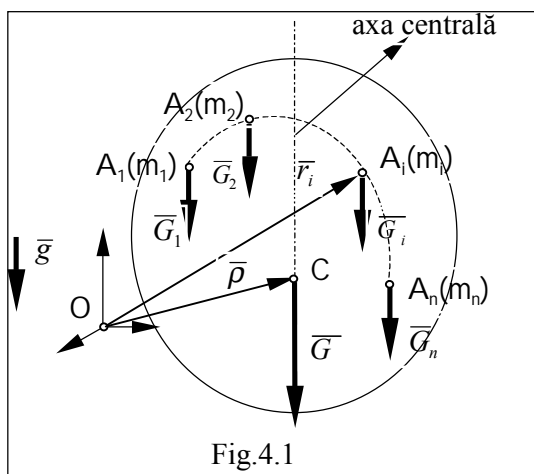
$$\vec{G} = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i \quad (4.2)$$

sau:
$$\vec{G} = \vec{g} \sum_{i=1}^n m_i = M \cdot \vec{g} \quad (4.3)$$

unde : $M = \sum_{i=1}^n m_i$ este masa întregului sistem.

Pentru sistemul discret de puncte materiale A_i de mase m_i și vectori de poziție \vec{r}_i , în raport cu originea O a unui sistem de axe, suportul rezultantei \vec{G} a forțelor de greutate \vec{G}_i , trece prin centrul vectorilor paraleli (punctul C, fig.4.1), care mai este numit *centrul de greutate al sistemului*; acest punct are vectorul de poziție (conform

3.58) dat de :
$$\vec{p} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i}{\sum G_i} \quad (4.4)$$



sau
$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g \cdot \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (4.5)$$

ceea ce arată că centrul de greutate este un element geometric al sistemului de puncte materiale, o caracteristică intrinsecă a sistemului, ce ilustrează modul de distribuție a maselor în spațiu și nu depinde de intensitatea câmpului gravitațional, fapt care justifică și denumirea de *centrul maselor*.

Centrul maselor poate fi definit față de un sistem de referință fix sau mobil, indiferent dacă sistemul de puncte materiale se găsește sau nu în câmp gravitațional, prin vectorul de poziție $\bar{\rho}$ dat de formula (4.5). Deci această noțiune are sens și pentru corpurile care nu sunt situate la suprafața Pământului.

4.2. Momente statice

Proiecțiile pe axe ale vectorului de poziție al centrului de masă $\bar{\rho}$ ne furnizează coordonatele acestuia notate cu (ξ, η, ζ) :

$$\xi = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad \eta = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad \zeta = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \quad (4.6)$$

Expresiile $\sum m_i x_i$, $\sum m_i y_i$, $\sum m_i z_i$ se numesc *momente statice* ale sistemului față de planele de coordonate yOz , zOx și respectiv xOy .

În general, se poate defini *momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan (P)*, ca suma produselor dintre masele punctelor materiale care alcătuiesc sistemul și distanțele corespunzătoare ale acestora, până la planul (P).

De exemplu, suma $\sum m_i x_i$, reprezintă *momentul static al sistemului de puncte de mase m_i în raport cu planul yOz* , deoarece abscisele x_i reprezintă distanțele de la punctele A_i până la acest plan. Distanțele sunt considerate pozitive dacă punctele se află în semispațiul dat de sensul axei Ox și negative când se află în celălalt semispațiu. Momentele statice dau posibilitatea de a aprecia modul de distribuire a maselor sistemului de puncte materiale în raport cu un plan.

Din formulele (4.5) și (4.6) se deduce:

$$\sum m_i \bar{r}_i = M \bar{\rho} \quad (4.7)$$

și:
$$\sum m_i x_i = M \xi, \sum m_i y_i = M \eta, \sum m_i z_i = M \zeta. \quad (4.8)$$

Aceste relații permit formularea *teoremei generale a momentelor statice*:
 “*Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este egal*

cu produsul dintre masa întregului sistem și distanța de la centrul de masă al sistemului la acel plan”.

Rezultă din această teoremă că pentru calculul momentelor statice al unui sistem de puncte materiale, acesta poate fi redus la *un punct material în care se consideră concentrată întreaga masă a sistemului*, situat în centrul de masă al sistemului.

O consecință a teoremei momentelor statice este următoarea leamnă: “*dacă momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este nul, centrul de greutate al sistemului se găsește în acel plan*”.

În cazul unui sistem de puncte materiale situate într-un plan (de exemplu în planul xOy) sumele $\sum m_i y_i$, $\sum m_i x_i$, pot fi considerate ca momente statice în raport cu axele Ox și respectiv Oy din planul xOy , iar teorema momentelor statice se modifică corespunzător.

4.3. Proprietățile centrului maselor

1. *Dacă un sistem de puncte materiale are un plan, o axă sau un centru de simetrie, centrul maselor se află în acel plan, pe acea axă sau în acel centru.*

Pentru demonstrație, să presupunem că sistemul de puncte materiale are un plan de simetrie și acesta este planul xOy (fig.4.2). Fie două puncte simetrice față de acest plan: $A_i(x_i, y_i, z_i)$ de masă m_i și $A'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$ de masă m'_i ($m'_i = m_i$); în această situație există relațiile: $x'_i = x_i$, $y'_i = y_i$, $z'_i = -z_i$ și un punct B_j situat în planul xOy de masă m_j și coordonatele $x_j \neq 0$, $y_j \neq 0$, $z_j = 0$.

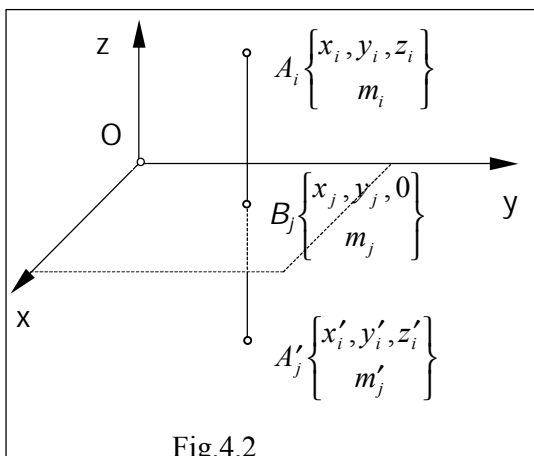


Fig.4.2

Folosind ultima relație (4.8) și grupând termenii sumelor după poziția punctelor față de planul de simetrie avem:

$$\zeta = \frac{\sum m_i z_i + \sum m_i z'_i + \sum m_j z_j}{\sum m_i + \sum m'_i + \sum m_j}$$

și deoarece :

$$\sum m'_i z'_i = -\sum m_i z_i, \quad \sum m_j z_j = 0,$$

rezultă $\zeta = 0$, ceea ce justifică proprietatea enunțată.

Pentru centrul maselor aparținând axei de simetrie Oz , se obține $\xi = 0, \eta = 0$ iar dacă centrul maselor este un centru de simetrie, atunci el devine $\xi = \eta = \zeta = 0$.

2. *Dacă un sistem de puncte materiale (S) se compune dintr-un număr p de subsisteme: (S₁), (S₂), ..., (S_p) de mase: M₁, M₂, ..., M_p și centre de masă (C₁, C₂, ..., C_p) cunoscute, atunci poziția centrului de masă al sistemului se poate determina cu relația:*

$$\bar{\rho} = \frac{M_1 \bar{\rho}_1 + M_2 \bar{\rho}_2 + \dots + M_p \bar{\rho}_p}{M_1 + M_2 + \dots + M_p} = \frac{\sum_{i=1}^p M_i \bar{\rho}_i}{\sum_{i=1}^p M_i}, \quad (4.9)$$

unde: $\bar{\rho}_i$ sunt vectorii de poziție ai centrelor maselor subsist. C_i ($i=1, 2, \dots, p$)

Într-adevăr, pentru subsistemele $(S_1), (S_2), \dots, (S_p)$ rezultă relațiile:

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i}, \bar{\rho}_2 = \frac{\sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_2)} m_i}, \dots, \bar{\rho}_p = \frac{\sum_{(S_p)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_p)} m_i}$$

care mai pot fi scrise și astfel:

$$\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i = M_1 \bar{\rho}_1, \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i = M_2 \bar{\rho}_2, \dots, \sum_{(S_p)} m_i \bar{r}_i = M_p \bar{\rho}_p.$$

Apoi, pentru sistemul (S) , vectorul de poziție $\bar{\rho}$ este dat de:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S)} m_i} = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i + \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i + \dots + \sum_{(S_p)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i + \sum_{(S_2)} m_i + \dots + \sum_{(S_p)} m_i} = \\ &= \frac{M_1 \bar{\rho}_1 + M_2 \bar{\rho}_2 + \dots + M_p \bar{\rho}_p}{M_1 + M_2 + \dots + M_p} = \frac{\sum_{i=1}^p M_i \bar{\rho}_i}{\sum_{i=1}^p M_i} \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează proprietatea enunțată.

3. Dacă un sistem de puncte materiale (S) considerat ca rezultând dintr-un sistem (S_1) din care a fost eliminat un subsistem (S_2) pentru care se cunosc masele M_1, M_2 și centrele de masă C_1, C_2 corespunzătoare, atunci vectorul de poziție al centrului de masă C al sistemului (S) se determină cu relația:

$$\bar{\rho} = \frac{M_1 \bar{\rho}_1 - M_2 \bar{\rho}_2}{M_1 - M_2} \quad (4.10)$$

Demonstrația este analogă celei de la punctul precedent.

Referitor la sistemele (S_1) și (S_2) avem:

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i}, \bar{\rho}_2 = \frac{\sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_2)} m_i} \text{ sau: } \sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i = M_1 \bar{\rho}_1, \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i = M_2 \bar{\rho}_2,$$

iar pentru sistemul (S) :

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S)} m_i} = \frac{\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i + \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i - \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S)} m_i + \sum_{(S_2)} m_i - \sum_{(S_2)} m_i}$$

$$\text{sau: } \bar{\rho} = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i - \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i - \sum_{(S_2)} m_i} = \frac{M_1 \bar{\rho}_1 - M_2 \bar{\rho}_2}{M_1 - M_2}, \text{ ceea ce trebuia demonstrat.}$$

Formulele (4.9) și (4.10) sunt importante pentru calculul centrelor de masă ale corpurilor omogene compuse. Un astfel de exemplu este prezentat la sfârșitul capitolului.

4.4. Centrul maselor pentru corpuri omogene

Un corp material omogen poate fi considerat ca un sistem format dintr-o infinitate de puncte materiale. În Mecanică se folosește conceptul de *mediu continuu* sau *continuu material*. În baza acestui concept se consideră că nu există în interiorul corpului nici un volum, oricât de mic, care să nu fie “umplut” de materie.

Să considerăm un volum elementar de materie ΔV_i (foarte mic) și să notăm cu Δm_i masa sa și centrul de masă situat în punctul geometric C_i , având vectorul de poziție \bar{r}_i . Vectorul de poziție al centrului de masă al corpului conform (4.5) este:

$$\bar{\rho} = \frac{\sum r_i \Delta m_i}{\sum \Delta m_i} \quad (4.11)$$

Trecând la limită, adică făcând pe $\Delta V_i \rightarrow 0$, $\Delta m_i \rightarrow 0$ și $n \rightarrow \infty$ (numărul volumelor elementare tinde către infinit), sumele de mai sus devin integrale pe domeniul (D) ocupat de corp, adică:

$$\sum \bar{r}_i \Delta m_i \rightarrow \int_{(D)} \bar{r} dm \text{ și } \sum \Delta m_i \rightarrow \int_{(D)} dm$$

și prin urmare (4.11) devine:
$$\bar{\rho} = \frac{\int_{(D)} \bar{r} dm}{\int_{(D)} dm} \quad (4.12)$$

Coordonatele centrului de masă $C(\xi, \eta, \zeta)$ vor fi în acest caz date de :

$$\xi = \frac{\int_{(D)} x dm}{\int_{(D)} dm}, \eta = \frac{\int_{(D)} y dm}{\int_{(D)} dm}, \zeta = \frac{\int_{(D)} z dm}{\int_{(D)} dm} \quad (4.13)$$

unde \bar{r} și (x, y, z) reprezintă vectorul de poziție, respectiv coordonatele unui punct oarecare al unui element de masă dm luat în calcul, iar expresiile $\int_{(D)} x dm, \int_{(D)} y dm, \int_{(D)} z dm$ reprezintă tocmai momentele statice ale corpului în raport cu planele yOz, xOz, xOy .

$$\text{Notând cu } M = \int_{(D)} dm \text{, masa corpului, se deduce: } \int_{(D)} \bar{r} dm = M \bar{\rho} \quad (4.14)$$

și teorema *momentelor statice* pentru cazul *continuuului material*:

$$\int_{(D)} x dm = M \xi, \int_{(D)} y dm = M \eta, \int_{(D)} z dm = M \zeta \quad (4.15)$$

4.5. Masa specifică. Corpuri omogene.

Centre de greutate geometrice.

Pentru studiul centrului de greutate al corpurilor reale se introduce noțiunea de *densitate medie sau masă specifică medie* a volumului elementar ΔV de masă Δm :

$$\mu_{med} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (4.16)$$

Masa specifică (sau densitatea) a corpului într-un punct oarecare este dată de limita raportului (4.16), adică:

$$\mu_V = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv} \quad (4.17)$$

Cunoscând legea de variație a masei specifice $\mu = \mu(x, y, z)$ din interiorul corpului (care are întotdeauna o valoare finită și pozitivă) se poate calcula masa sa cu ajutorul relației:

$$M = \int_{(D)} dm = \int_{(V)} \mu_V dV \quad (4.18)$$

În cazul în care densitatea μ_V are aceeași valoare pentru întreg volumul ocupat (în toate punctele), spunem că acel corp este *omogen* (de exemplu: un corp executat din același material este omogen). În cazul unui corp omogen, vectorul de poziție al centrului său de greutate este dat de expresia:

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{(D)} \bar{r} dm}{\int_{(D)} dm} = \frac{\int_{(V)} \bar{r} \mu dV}{\int_{(V)} \mu dV} = \frac{\mu \int_{(V)} \bar{r} dV}{\mu \int_{(V)} dV} = \frac{\int_{(V)} \bar{r} dV}{\int_{(V)} dV} \quad (4.19)$$

iar coordonatele sale sunt date de relațiile:

$$\xi = \frac{\int_{(V)} x dV}{\int_{(V)} dV}, \quad \eta = \frac{\int_{(V)} y dV}{\int_{(V)} dV}, \quad \zeta = \frac{\int_{(V)} z dV}{\int_{(V)} dV} \quad (4.20)$$

Se deosebesc următoarele cazuri particulare:

A. Dacă corpul are una din dimensiuni (grosimea) mult mai mică în raport cu celelalte două, corpul respectiv se numește *placă*, iar densitatea se numește *densitate superficială (de suprafață)*

Densitatea superficială într-un punct, este în acest caz:

$$\mu_A = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dA} \quad (4.21)$$

unde dA este aria unui element de placă, iar masa plăcii este determinată cu ajutorul formulei: $M = \int_{(A)} \mu_A dA$. (4.22)

În cazul plăcii omogene ($\mu_A = \text{constant}$), avem:

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{(A)} \bar{r} dA}{\int_{(A)} dA} \quad \text{sau:} \quad \xi = \frac{\int_{(A)} x dA}{\int_{(A)} dA}, \quad \eta = \frac{\int_{(A)} y dA}{\int_{(A)} dA}, \quad \zeta = \frac{\int_{(A)} z dA}{\int_{(A)} dA}. \quad (4.23)$$

B. În cazul în care corpul are una din dimensiuni (lungimea), mult mai mare în raport cu celelalte două, corpul respectiv se numește *bară* (sau după caz *fir*), iar densitatea se numește *densitate liniară sau masa specifică liniară*:

$$\mu_l = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \frac{dm}{ds} \quad (4.24)$$

unde ds este lungimea unui element de bară, iar masa barei: $M = \int_{(l)} \mu_l ds$.

Dacă barele sunt omogene ($\mu_l = \text{constant}$) se obțin expresiile pentru vectorul de poziție și coordonatele centrului de greutate al barelor:

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{(l)} \bar{r} ds}{\int_{(l)} ds} \quad \text{sau:} \quad \xi = \frac{\int_{(l)} \bar{r} ds}{\int_{(l)} ds}, \quad \eta = \frac{\int_{(l)} y ds}{\int_{(l)} ds}, \quad \zeta = \frac{\int_{(l)} z ds}{\int_{(l)} ds} \quad (4.25)$$

Analizând formulele (4.19), (4.23) și (4.25) - ca relații scalare corespunzătoare - valabile respectiv pentru corpuri, plăci și bare omogene, se observă că în ele nu intervine masa corpului, ci volume, arii și lungimi, deci elemente geometrice. Astfel se ajunge la noțiunea de *centru de greutate geometric*.

A p l i c a Ț i i

1) *Bara omogenă dreaptă.*

Mijlocul barei fiind centru de simetrie, va fi în același timp și centrul de greutate al barei.

2) *Bara omogenă curbă în formă de arc de cerc (fig.4.3)*

Notăm unghiul la centru al arcului 2α și raza barei circulare cu R , se alege axa Ox să coincidă cu bisectoarea unghiului, iar axa Oy în planul arcului. Bara fiind plană, avem: $\zeta = 0$. Axa Ox fiind axă de simetrie, avem: $\eta = 0$.

Pentru determinarea abscisei $\xi = OC$ se aplică formula: $\xi = \frac{\int_{(l)} x ds}{\int_{(l)} ds}$

unde (fig.4.3) pentru elementul de arc: $ds = R d\theta$, $x = OP' = R \cos \theta$.

Rezultă așadar:

$$\xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \theta \cdot R d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R d\theta} = \frac{R \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

În particular relația de mai sus devine

- pentru sfertul de cerc: $\alpha = \frac{\pi}{4}, \xi = R \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$

- iar pentru arcul semicircular: $\alpha = \frac{\pi}{2}, \xi = \frac{2R}{\pi}.$

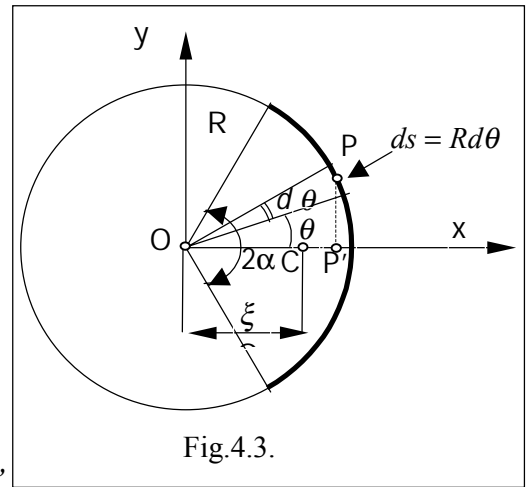


Fig.4.3.

3. Placă plană omogenă dreptunghiulară.

Punctul de intersecție a diagonalelor este centrul de simetrie al plăcii dreptunghiulare, deci acesta este și centrul de greutate.

4. Placa plană omogenă triunghiulară.

Se consideră triunghiul oarecare PQR (fig.4.4). Dacă se descompune triunghiul în fâșii elementare paralele cu o latură (de exemplu PQ) care se asimilează cu bare, atunci se poate arăta că locul geometric al centrelor de greutate al acestor bare îl constituie mediana $R'R$ a triunghiului. Repetând operația aceasta față de celelalte laturi, se obțin medianele PP' și QQ' .

Centrul de greutate al triunghiului se găsește prin urmare, în punctul C de intersecție a medianelor, adică la două treimi din înălțime ($2h/3$) față de vârful triunghiului, respectiv la o treime ($h/3$) față de bază.

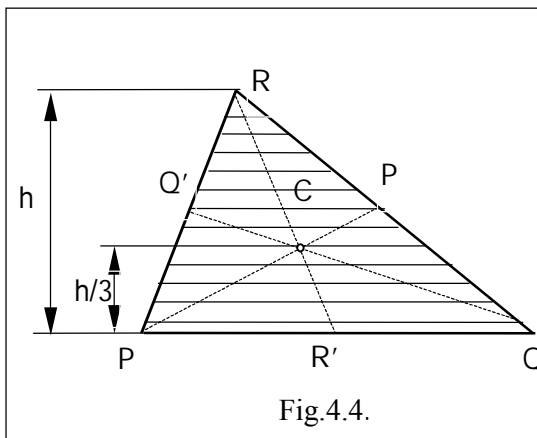


Fig.4.4.

Din geometria analitică se știe că dacă se cunosc coordonatele vârfurilor triunghiului: P, Q și R atunci coordonatele centrului de masă C sunt:

$$\xi = \frac{x_P + x_Q + x_R}{3};$$

$$\eta = \frac{y_P + y_Q + y_R}{3};$$

$$\zeta = \frac{z_P + z_Q + z_R}{3}$$

5. Placa plană omogenă în forma unui sector de cerc

Notăm unghiul la centru cu 2α și raza cu R (fig.4.5).

Alegem ca axă Ox bisectoarea unghiului, care este și axă de simetrie. Se alege Oy în planul figurii, deci $\zeta = 0$ și $\eta = 0$. În aceste condiții pentru determinarea lui $C(\xi, 0, 0)$ se folosește formula:

$$\xi = \frac{\int_{(A)} x dA}{\int_{(A)} dA}, \quad \text{unde folosind coordonatele polare } (\rho, \theta) \text{ cu:}$$

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta \quad (0 \leq \rho \leq R, -\alpha \leq \theta \leq \alpha); \quad dA = dx dy = \rho d\rho d\theta$$

Se obține:

$$OC = \xi = \frac{\iint_{(D)} \rho \cos \theta \cdot \rho d\rho d\theta}{\iint_{(D)} \rho d\rho d\theta}$$

$$OC = \frac{\int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_0^R \rho d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}$$

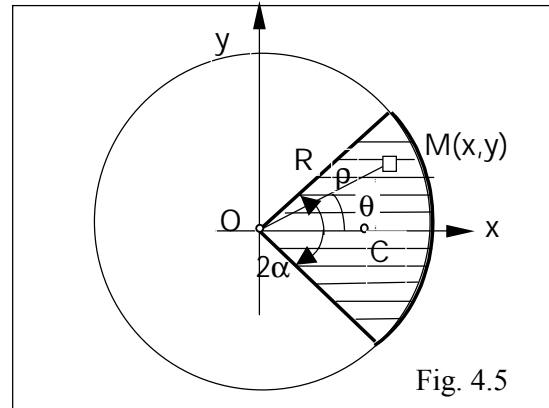


Fig. 4.5

Cazuri particulare:

- a) pentru sfertul de cerc: $\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad OC = \xi = \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi},$
- b) pentru placa semicirculară: $\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad OC = \xi = \frac{4R}{3\pi}.$
- c) pentru placa circulară: $\alpha = 2\pi, \quad OC = \xi = 0.$

6. Plăci plane omogene compuse

Se consideră problema determinării centrului de greutate al plăcii plane omogene din figura 4.6. formată dintr-un dreptunghi $ADFC$ ($AD=CF=4a$; $AC=DF=2a$) din care se taie triunghiul dreptunghic ABC ($AB=a$, $AC=2a$) și se adaugă sfertul de cerc DEF (cu raza $R=DE=DF=2a$). Se alege sistemul de axe cu originea în A iar axele Ox după AE , iar Oy după AC (fig.4.6.).

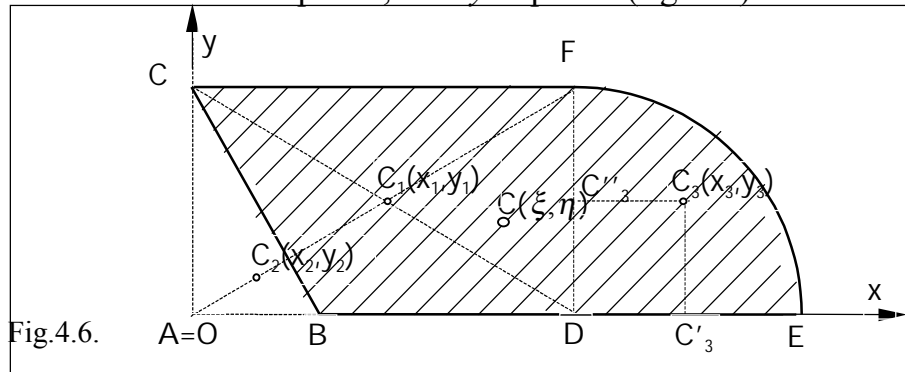


Fig.4.6.

Calculul centrului de greutate $C(\xi, \eta)$ se face cu ajutorul formulelor:

$$\xi = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2 + x_3 A_3}{A_1 - A_2 + A_3}, \quad \eta = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 - A_2 + A_3}$$

unde ariile sunt: $A_1 = 4a \cdot 2a = 8a^2$, $A_2 = \frac{1}{2}a \cdot 2a = a^2$, $A_3 = \frac{1}{4}\pi(2a)^2 = \pi a^2$

Centrele de greutate ale fiecărei figuri sunt: $C_1(2a, a)$, $C_2\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$

$$\left. \begin{aligned} DC'_3 &= DC_3 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{8a}{3\pi} \\ DC''_3 &= DC_3 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{4R\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4R}{3} = \frac{8a}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_3 \left(4a + \frac{8a}{3\pi}, \frac{8a}{3\pi} \right)$$

și prin urmare: $A = A_1 - A_2 + A_3 = 7a^2 + \pi a^2$, avem:

$$\xi = \frac{2a \cdot 8a^2 - \frac{a}{3} \cdot a^2 + \left(4a + \frac{8a}{3\pi} \right) \pi a^2}{7a^2 + \pi a^2} = \frac{55 + 12\pi}{3(7 + \pi)} a$$

$$\eta = \frac{a \cdot 8a^2 - \frac{2a}{3} \cdot a^2 + \frac{8a}{3\pi} \cdot \pi a^2}{7a^2 + \pi a^2} = \frac{10a}{7 + \pi}$$

7. Cadre spațiale omogene compuse

Se cere să se determine centrul de greutate al cadrului spațial format din barele omogene sudate și dispuse în raport cu un sistem de axe Oxyz, ca în figura 4.7. Se cunosc razele sferturilor de cerc și lungimile barelor (toate egale cu a).

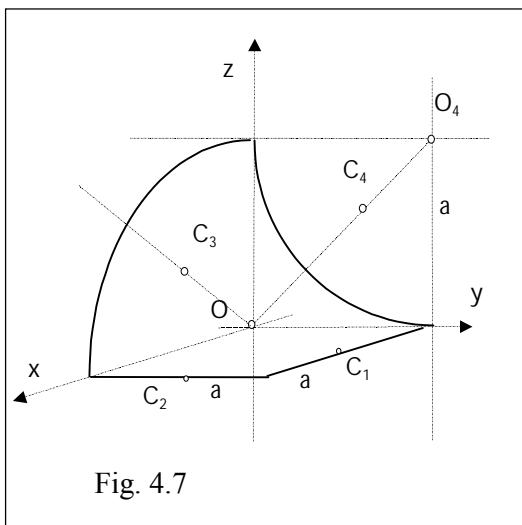


Fig. 4.7

Rezolvare:

Pentru arcele de cerc poziția centrului de masă se calculează conform formulelor cunoscute:

$$OC_3 = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\pi}, \quad O_4 C_4 = a \frac{2a\sqrt{2}}{\pi}$$

Centrele de greutate ale figurilor elementare și lungimile acestora vor fi:

$$C_1 \left(\frac{a}{2}, a, 0 \right), \quad \ell_1 = a; \quad C_2 \left(a, \frac{a}{2}, 0 \right), \quad \ell_2 = a;$$

$$C_3 \left(\frac{2a}{\pi}, 0, \frac{2a}{\pi} \right), \quad \ell_3 = \frac{\pi a}{2}; \quad C_4 \left(a, \frac{a(\pi - 2)}{\pi}, \frac{a(\pi - 2)}{\pi} \right), \quad \ell_4 = \frac{\pi a}{2}$$

Pentru determinarea lui $C(\xi, \eta, \zeta)$ aplică formulele:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^4 l_i x_i}{\sum_{i=1}^4 l_i}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^4 l_i y_i}{\sum_{i=1}^4 l_i}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^4 l_i z_i}{\sum_{i=1}^4 l_i}.$$

Și se obțin valorile: $\xi = \frac{5}{2(\pi+2)}a$, $\eta = \frac{\pi+1}{2(\pi+2)}a$, $\zeta = \frac{\pi}{2(\pi+2)}a$.

Metoda a IIa: Se completează tabelul:

Corp nr.	Forma corpului	l_i	x_i	y_i	z_i	$l_i x_i$	$l_i y_i$	$l_i z_i$
1	bara dreaptă	a	$\frac{a}{2}$	a	0	$\frac{a^2}{2}$	a^2	0
2	bara dreaptă	a	a	$\frac{a}{2}$	0	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
3	bara circulară	$\frac{\pi a}{2}$	$\frac{2a}{\pi}$	0	$\frac{2a}{\pi}$	a^2	0	a^2
4	bara circulară	$\frac{\pi a}{2}$	0	$\frac{a(\pi-2)}{\pi}$	$\frac{a(\pi-2)}{\pi}$	0	$\frac{a^2(\pi-2)}{2}$	$\frac{a^2(\pi-2)}{2}$
Σ		$a(2+\pi)$	—	—	—	$\frac{5a^2}{2}$	$\frac{(\pi+2)a^2}{2}$	$\frac{\pi a^2}{2}$

Alicând formulele: $\xi = \frac{\sum_{i=1}^4 l_i x_i}{\sum_{i=1}^4 l_i}$, $\eta = \frac{\sum_{i=1}^4 l_i y_i}{\sum_{i=1}^4 l_i}$, $\zeta = \frac{\sum_{i=1}^4 l_i z_i}{\sum_{i=1}^4 l_i}$,

se obține poziția centrului de masă:

$$C \left(\frac{5}{2(\pi+2)}a, \frac{\pi+1}{2(\pi+2)}a, \frac{\pi}{2(\pi+2)}a \right).$$

8. Corpuri omogene compuse

A. Figura 4.8 reprezintă un nit, care este format dintr-o semisferă de diametru $D=2R=40\text{mm}$ și un cilindru de lungime $L=50\text{mm}$ și diametrul $d=2r=22\text{mm}$.

Se cere să se determine poziția centrului de greutate al nitului $C(0,0,\zeta)$.

Rezolvare:

Pentru sistemul de axe Oxyz considerat în fig. 4.8, ambele centre de greutate se află pe axa Oz.

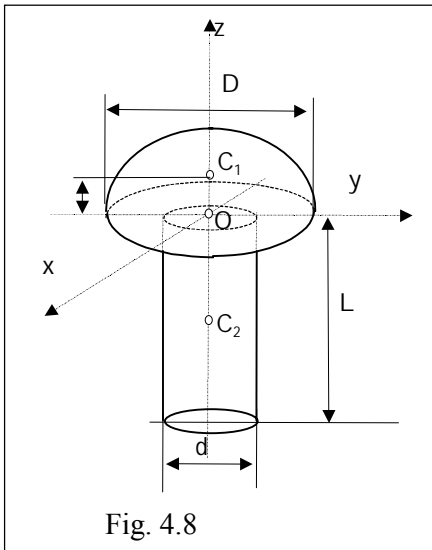


Fig. 4.8

Înlocuind rezultă:

$$\text{Semisfera : } z_1 = \frac{3}{8}R = \frac{3}{16}D, \quad V_1 = \frac{\pi D^3}{12}$$

$$\text{Cilindrul : } z_2 = -\frac{L}{2}, \quad V_2 = \pi r^2 L = \frac{\pi d^2}{4}L.$$

Centrul de greutate al nitului se calculează cu ajutorul formulei:

$$\zeta = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2}$$

$$\zeta = \frac{\frac{\pi D^3}{12} \cdot \frac{3}{16}D - \frac{L}{2} \frac{\pi d^2 L}{4}}{\frac{\pi D^3}{12} + \frac{\pi d^2 L}{4}} = \frac{3(D^4 - 8d^2 L^2)}{16(D^3 + 3d^2 L)}$$

Înlocuind valorile numerice pentru D , d și L se obține

$$\zeta \approx -0,977 \Rightarrow \zeta \approx -1 \text{ cm}$$

B. Se consideră un corp tridimensional omogen format dintr-o semisferă și un con ca în fig 4.9. Se cunoaște R , raza comună a semisferei și conului.

Se cere înălțimea h a conului astfel încât centrul de greutate C al piesei compuse să se afle în originea sistemului de axe ($C \equiv O$)

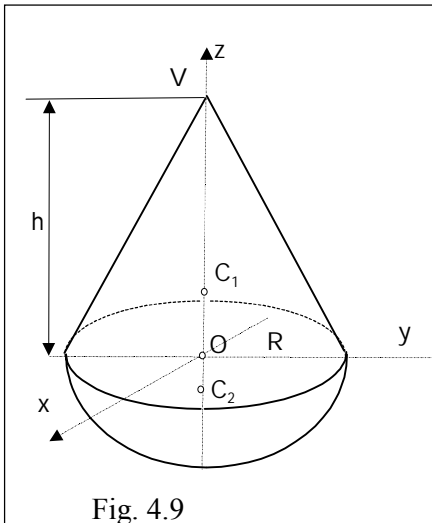


Fig. 4.9

Rezolvare:

Conul și semisfera au centrele de greutate C_1 și C_2 pe

$$\text{axa } OZ : z_1 = \frac{h}{4}, z_2 = -\frac{3}{8}R$$

iar volumele sunt respectiv:

$$V_1 = \frac{\pi}{3}R^2 h; \quad V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

prin urmare:

$$\zeta = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h^2 - 3R^2}{h + 2R}$$

Impunând condiția: $C \equiv O$, adică $\zeta = 0$

$$\text{rezultă: } h^2 - 3R^2 = 0$$

$$\text{adică: } h = R\sqrt{3}.$$

CAPITOLUL 5

STATICA RIGIDULUI

5.1. Condițiile de echilibru pentru rigidul liber

Rigidul liber este un corp care poate ocupa orice poziție în spațiu, poziția lui depinzând numai de forțele care acționează asupra lui.

În capitolul 3, s-a arătat la primul caz de reducere, că dacă rezultanta generală și momentul resultant al unui sistem de vectori (forțe) sunt nule: $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_o = 0$, atunci *sistemul este echivalent cu zero*.

Aceasta este o *condiție suficientă pentru echilibru*.

Analizând celelalte cazuri de reducere a sistemelor de vectori, se constată că nu există alte cazuri pentru care sistemul să fie echivalent cu zero; înseamnă că $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_o = 0$ este și o *condiție necesară de echilibru* a unui sistem de forțe.

Teoremă: “Dacă asupra unui solid rigid liber, care se află în repaus, acționează un sistem de forțe, condiția necesară și suficientă pentru ca rigidul să rămână în repaus este ca sistemul să fie echivalent cu zero”:

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M}_o = 0 \quad (5.1)$$

Ținând seama că:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad \bar{M}_o = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n \bar{M}_o(\bar{F}_i) \quad (5.2)$$

condițiile (5.1) devin:

$$\sum \bar{F}_i = 0, \quad \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i) = 0 \quad (5.3)$$

sau în proiecții pe axele sistemului de axe $Oxyz$:

$$X = \sum X_i = 0; \quad Y = \sum Y_i = 0; \quad Z = \sum Z_i = 0 \quad (5.4)$$

$$L = \sum L_i = 0; \quad M = \sum M_i = 0; \quad N = \sum N_i = 0 \quad (5.5)$$

Echilibrul unui rigid asupra căruia acționează un sistem de forțe, este condiționat deci de șase ecuații scalare: trei ecuații de proiecții ale forțelor pe axele de coordonate și trei ecuații de momente în raport cu axele sistemului de coordonate.

În conformitate cu teoria sistemelor liniare de ecuații din Algebră, în general sistemul de ecuații (5.4) și (5.5) este compatibil dacă conține maxim șase necunoscute și dacă sunt îndeplinite condițiile cerute de teorema lui Rouché.

În cazul unor sisteme particulare de forțe, numărul ecuațiilor scalare de echilibru se reduce, astfel:

- a) în cazul unui *sistem de forțe coplanare* care acționează asupra rigidului (de exemplu în Oxy) se reduc la un sistem trei ecuații scalare de echilibru distincte:

$$X = \sum X_i = 0, \quad Y = \sum Y_i = 0, \quad N = \sum N_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5.6)$$

întrucât celelalte ecuații ale sistemului devin identități ($Z=0, L=0, M=0$);

- b) în cazul unui *sistem de forțe paralele* care acționează asupra rigidului (de exemplu, axa Ox) se reduc la un sistem trei ecuații scalare de echilibru distincte:

$$X = \sum X_i = 0, \quad M = \sum M_i = 0, \quad N = \sum N_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5.7)$$

întrucât celelalte ecuații ale sistemului devin identități ($Y=0, Z=0, L=0$);

- c) în cazul unui *sistem de forțe paralele și coplanare* care acționează asupra rigidului (de exemplu, axa Ox și planul Oxy) se reduc la un sistem două ecuații scalare de echilibru distincte:

$$X = \sum X_i = 0, \quad N = \sum N_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5.8)$$

întrucât celelalte ecuații ale sistemului devin identități ($Y=0, Z=0, L=0, M=0$);

- d) în cazul unui *sistem de forțe concurente*, trei dintre ecuațiile sistemului devin identități (de exemplu, alegând originea sistemului de axe în punctul de concurență al forțelor rezultă: $L=0, M=0, N=0$) rămânând numai trei ecuații scalare de echilibru distincte:

$$X = \sum X_i = 0, \quad Y = \sum Y_i = 0, \quad Z = \sum Z_i = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

Se observă că acestea sunt condițiile de echilibru ale punctului material liber.

- e) În cazul unui *sistem de cupluri*, ecuațiile de proiecții ale forțelor devin identități ($X=0, Y=0, Z=0$) rămânând numai trei ecuații scalare de echilibru distincte:

$$L = \sum L_i = 0, \quad M = \sum M_i = 0, \quad N = \sum N_i = 0 \quad (5.10)$$

Pentru a vedea în ce măsură aceste ecuații conduc la soluționarea problemei echilibrului rigidului liber, este necesar să se determine *numărul gradelor de libertate* ale unui rigid liber. Se știe că pentru a determina poziția unui corp în spațiu este necesar să se cunoască coordonatele a trei puncte necoliniare ale sale: $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Aceste nouă coordonate (sau parametri) nu sunt independente, deoarece distanțele dintre cele trei puncte rămân constante, în cazul solidului nedeformabil, adică există relațiile:

$$\begin{aligned} d_1 &= |A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \text{const.} \\ d_2 &= |A_2A_3| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2} = \text{const.} \\ d_3 &= |A_1A_3| = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} = \text{const.} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Deoarece între cei nouă parametri scalari ($x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3$) există trei relații de legătură, rezultă că sunt independenți doar șase parametri.

În concluzie, *un rigid liber în spațiu are șase grade de libertate*. Aceste grade de libertate corespund de exemplu, posibilităților rigidului de a efectua independent trei translații în lungul axelor Ox, Oy, Oz și trei rotații în jurul aceluiași axe.

Pentru a determina poziția unui corp *în plan* este necesar să se cunoască poziția a două puncte ale sale: $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$. Acești patru parametri nu sunt independenți, deoarece distanța dintre cele două puncte rămâne constantă, adică între cei patru parametri există relația:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \text{const.}$$

Deci *rigidul liber în plan are trei grade de libertate*. Acestea corespund de exemplu, posibilităților rigidului de a efectua independent două deplasări în lungul axelor de coordonate Ox și Oy și o rotație în jurul axei Oz.

Problemele echilibrului rigidului liber sunt:

- Se dau forțele care acționează asupra rigidului și se cere poziția de echilibru (în general problema este static determinată);
- Se dă poziția de echilibru și se cer forțele pentru echilibru. Problema este static determinată numai dacă numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor.

5.2. Rigidul supus la legături fără frecare

5.2.1. Generalități. Condițiile de echilibru

Rigidul supus la legături este un corp căruia i se impune cel puțin o restricție geometrică (de exemplu un punct al rigidului este obligat să rămână pe o suprafață, pe o curbă sau într-un punct fix în spațiu).

În cazul *solidului rigid supus la legături* problemele de echilibru sunt mai complicate decât în cazul punctului material; ca și în cazul punctului material se aplică **axioma legăturilor**:

“legăturile se înlocuiesc cu forțe și momente de legătură, numite reacțiuni “.

Aplicând această axiomă, rigidul poate fi privit ca un *rigid liber* sub acțiunea *forțelor direct aplicate* (în general cunoscute) și a *reacțiunilor* (necunoscute).

Fie corpul (C_1) supus la forțele direct aplicate F_i ($i=1, 2, \dots, n$), având o legătură cu corpul (C_2); ne propunem să studiem echilibrul acestui corp (C_1) (fig.5.2.a).

Se consideră punctul O ca punct teoretic de contact al celor două corpuri. Conform axiomei legăturilor, prin înlăturarea corpului (C_2) se suprimă legătura corpului (C_1) cu (C_2) înlocuindu-se cu forțe și cupluri de legătură (fig.5.2.b).

Se notează cu:

- $\tau_o^{(a)} : (\bar{R}_o^{(a)}, \bar{M}_o^{(a)})$ tursorul de reducere în O al forțelor exterioare date;
- $\tau_o^{(leg)} : (\bar{R}_o^{(leg)}, \bar{M}_o^{(leg)})$ tursorul de reducere în punctul O a forțelor de legătură.

Condiția de echilibru se exprimă prin relațiile vectoriale:

$$\bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(leg)} = 0, \quad \bar{M}_o^{(a)} + \bar{M}_o^{(leg)} = 0 \quad (5.11)$$

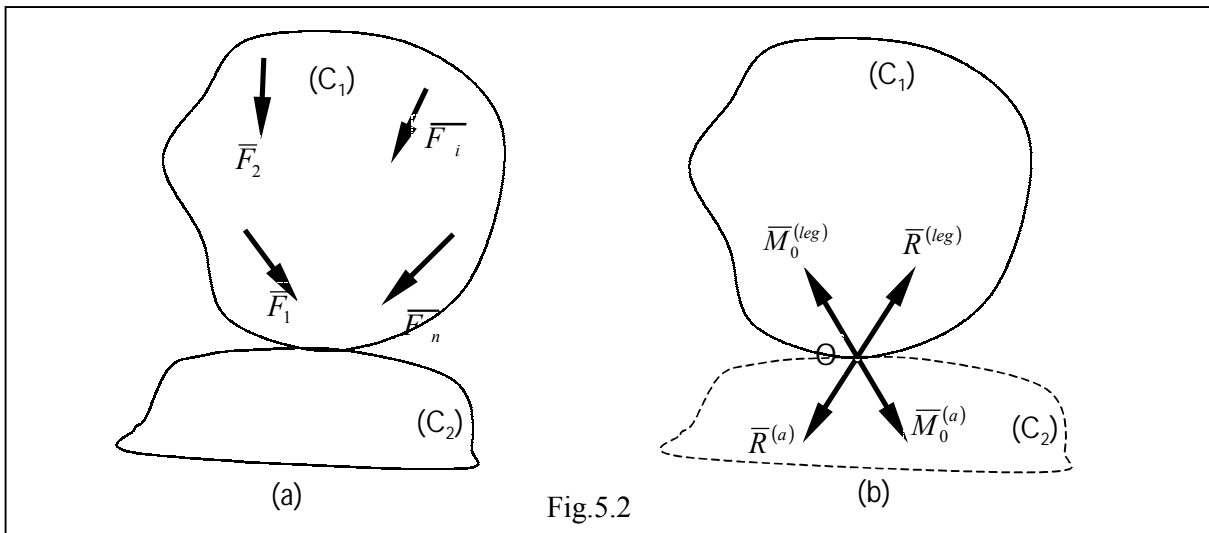


Fig.5.2

care, în cazul general, conduc la șase ecuații scalare de echilibru de forma ecuațiilor (5.4) și (5.5):

$$X^a + X^{leg} = 0, \quad Y^a + Y^{leg} = 0, \quad Z^a + Z^{leg} = 0 \quad (5.12)$$

$$L^a + L^{leg} = 0, \quad M^a + M^{leg} = 0, \quad N^a + N^{leg} = 0 \quad (5.12')$$

iar dacă forțele se află în planul xOy se obțin trei ecuații scalare, respectiv:

$$X^a + X^{leg} = 0, \quad Y^a + Y^{leg} = 0, \quad N^a + N^{leg} = 0 \quad (5.13)$$

Relațiile (5.11) se mai scriu:

$$\bar{R}^{(a)} = -\bar{R}^{(leg)}, \quad \bar{M}_O^{(a)} = -\bar{M}_O^{(leg)} \quad (5.14)$$

Aceste relații exprimă faptul că forțele de legătură care îndeplinesc condițiile de echilibru (5.14) au același torsesor și anume, cel opus torsesorului forțelor efectiv aplicate solidului rigid. Prin introducerea legăturilor se micșorează numărul gradelor de libertate ale rigidului.

Legăturile ideale (fără frecare) ale rigidului sunt: *reazemul simplu*, *articulația (cilindrică, sferică)*, *încastrarea și prinderea cu fire*.

În studiul legăturilor rigidului se deosebesc două aspecte :

- *aspectul geometric*, legat de numărul gradelor de libertate (adică a posibilităților de mișcare independente care îi sunt răpite rigidului datorită legăturii)
- *aspectul mecanic*, legat de elementele mecanice cu care se înlocuiesc legăturile (forțele și momentele pe care le introduce legătura sau reacțiunile).

Observație

O forță aplicată rigidului are ca efect mișcarea de translație în lungul suportului ei, iar un cuplu are ca efect mișcarea de rotație în jurul unei axe coliniare cu suportul său. În consecință, prin suprimarea unei legături care permitea o translație în lungul unei direcții se introduce o *forță*, iar prin suprimarea unei legături ce permitea o rotație în lungul unei direcții se introduce un *cuplu*.

5.2.2. Reazemul simplu

Un rigid are o legătură de tip *reazem simplu* (sau mobil) într-un punct al său, dacă acest punct este obligat să rămână tot timpul pe o suprafață (Σ) (fig.5.3.a.) sau pe o curbă dată (C). Se face ipoteza că *suprafețele* sau *curbele sunt lucii*, fixe și suficient de rezistente, astfel încât acestea să nu se deformeze oricât de mari ar fi forțele care acționează asupra rigidului.

Din punct de vedere geometric reazemul simplu micșorează numărul gradelor de libertate al rigidului cu o unitate; deci un rigid având o legătură de tip reazem simplu are *cinci grade de libertate*.

Am văzut în capitolul 2, că în cazul unui punct material obligat să rămână pe o suprafață lucie, reacțiunea este normală la suprafață. Acest rezultat se poate extinde și în cazul rigidului: *din punct de vedere mecanic* un reazem simplu pe o suprafață lucie poate fi înlocuit cu o *reacțiune* \bar{N} normală la suprafața de sprijin (Σ) (fig.5.3.a).

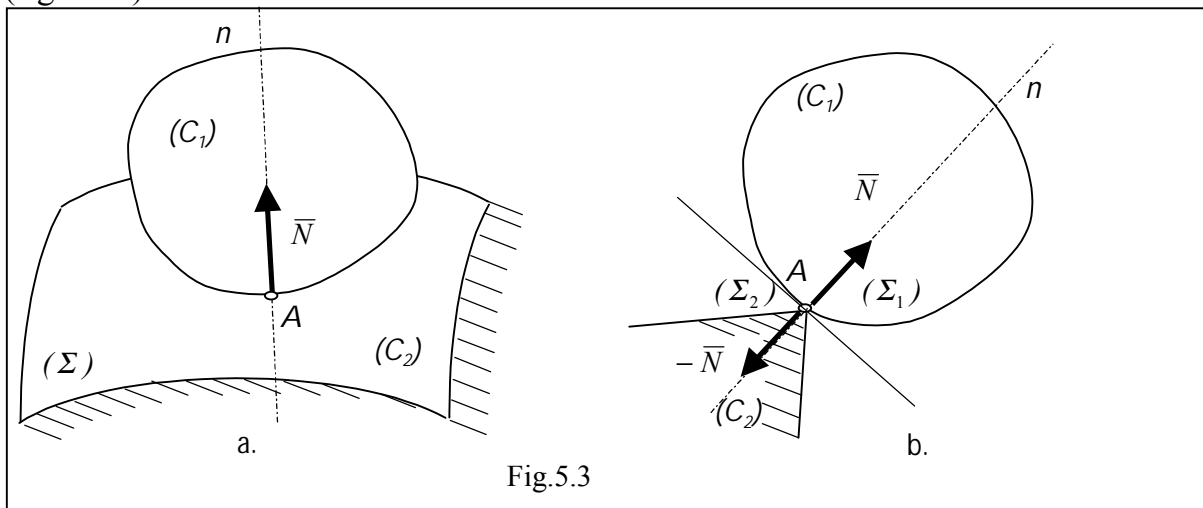


Fig.5.3

Observații:

1. Dacă reazemarea rigidului se face într-un punct singular al suprafeței (unghiular sau vârf, fig.5.3.b) atunci suportul reacțiunii este determinat de normala la suprafața corpului (Σ_1).
2. Dacă există mai multe reazeme simple ale rigidului, atunci *din punct de vedere mecanic* fiecare dintre acestea se înlocuiește cu câte o reacțiune normală în punctul considerat pe suprafața de reazem respectivă (fig. 5.4).
3. În cazul când rigidul are mai multe reazeme simple, se poate considera *din punct de vedere geometric*, că fiecare reazem micșorează numărul gradelor de libertate cu câte o unitate.

În general, pentru a imobiliza un rigid va trebui să fie rezat în șase puncte ale sale. Dacă el are un număr mai mare decât șase reazeme simple, problema devine *static nedeterminată*, iar dacă are mai puțin de șase reazeme simple, atunci echilibrul nu este posibil decât pentru anumite sisteme particulare de forțe.

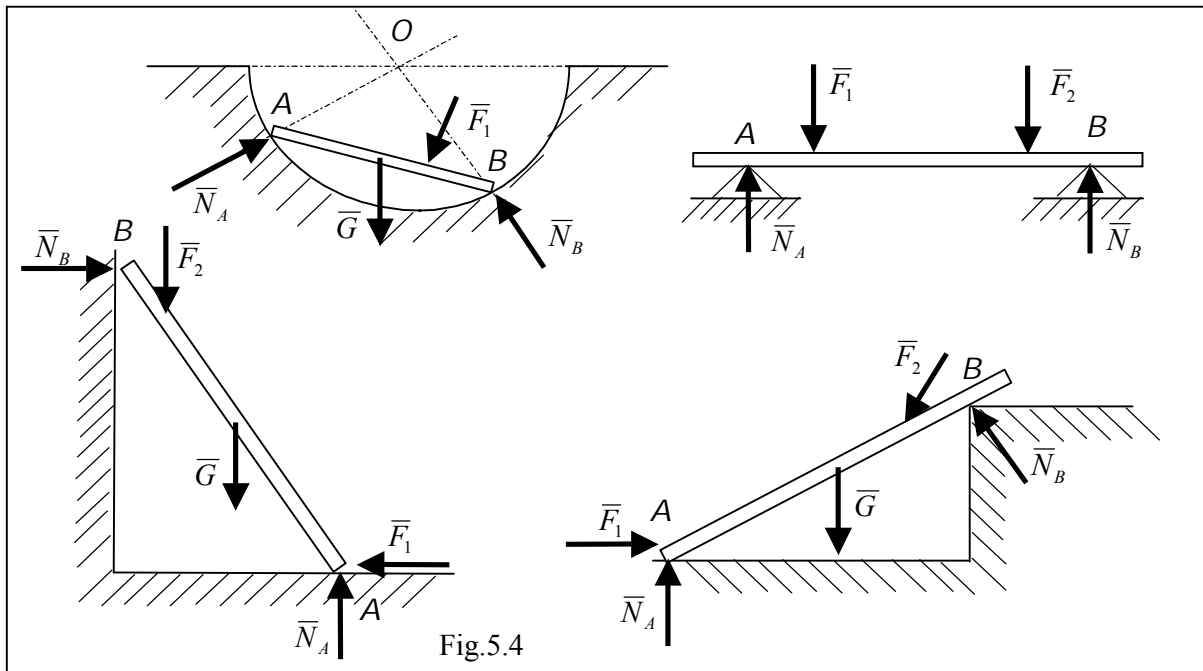


Fig.5.4

Se menționează însă că există cazuri când un rigid rezemat în șase punct ale sale, nu este totuși complet imobilizat. Astfel, de exemplu, dacă cele șase suporturi întâlnesc aceeași dreaptă (fig.5.5.a) sau sunt paralele cu același plan (fig.5.5.b), rigidul nu este complet imobilizat; în aceste cazuri este evidentă libertatea de mișcare a rigidului: astfel, în primul caz acesta se poate roti în jurul dreptei pe care o întâlnesc suporturile forțelor, iar în al doilea caz acesta se poate translata pe direcția normalei la planul forțelor.

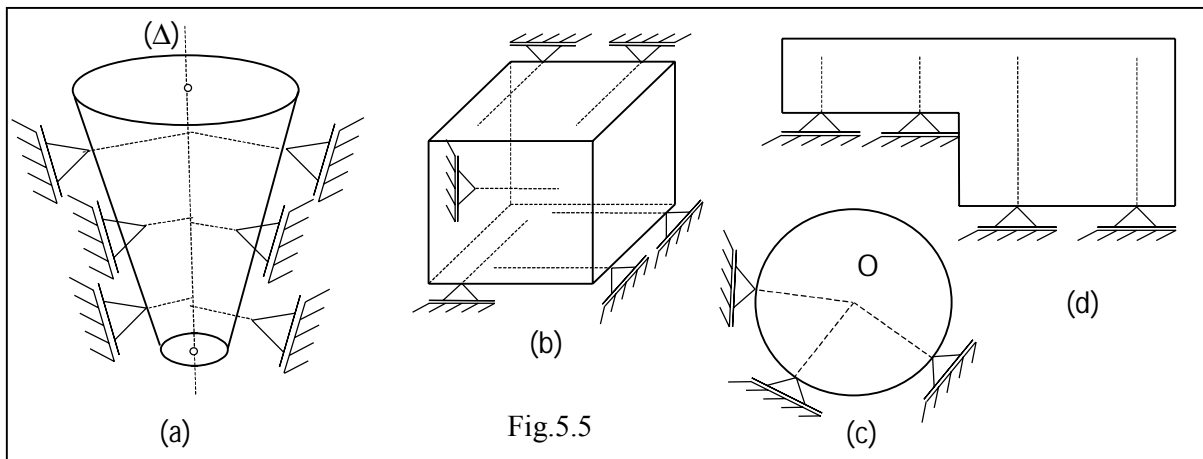
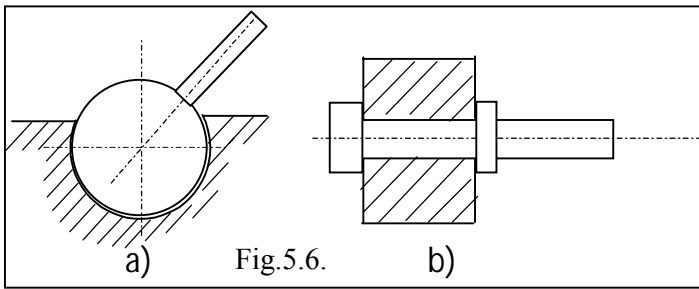


Fig.5.5

De asemenea în cazul unei plăci la care suporturile sunt concurente (fig.5.5.c), aceasta se poate roti în jurul punctului de concurență sau în cazul când suporturile sunt paralele între ele (fig.5.5.d), acesta se poate translata pe direcția normală la suporturile reacțiunii.

5.2.3. Articulația

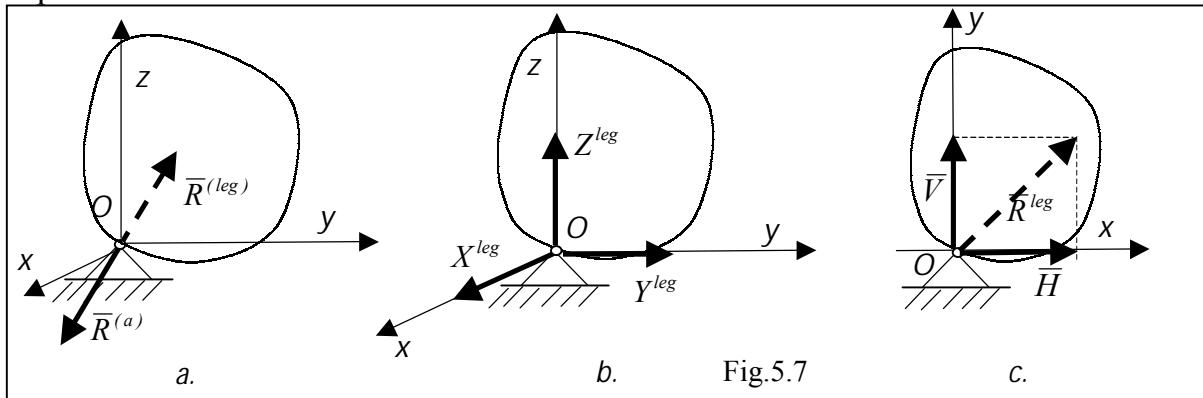
Un rigid este articulat într-un punct al său dacă acest punct este imobilizat (fix). Articulația poate fi: *plană (cilindrică)*, atunci când rigidul este supus acțiunii unui sistem de forțe coplanare (fig.5.6.a) sau *spațială (sferică)* (fig.5.6.b).



a. Articulația sferică

Un rigid cu o legătură de tip *articulație sferică* (cu un punct fix) are trei grade de libertate.

Din punct de vedere geometric articulația sferică reduce numărul gradelor de libertate cu trei unități, iar din punct de vedere mecanic poate fi înlocuită cu o reacțiune $\bar{R}^{(leg)}$ de mărime și direcție necunoscute (fig.5.7.a), sau cu trei necunoscute scalare, proiecțiile după direcțiile axelor sistemului cartezian $Oxyz$ X^{leg} , Y^{leg} , Z^{leg} (fig.5.7.b). Deci articulația sferică este echivalentă din punct de vedere mecanic, cu trei rezeme simple, situate în același punct, ale căror reacțiuni nu sunt toate coplanare.

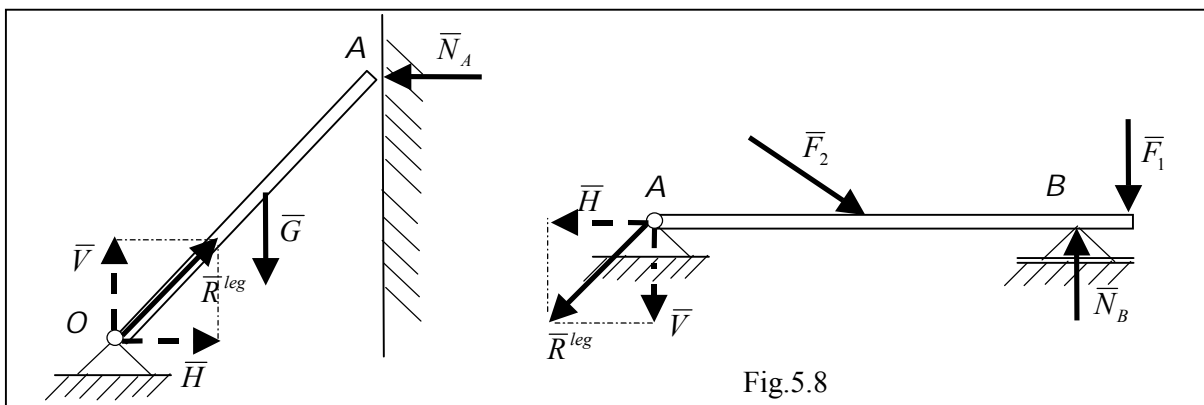


b. Articulația cilindrică (plană)

Este un caz particular al articulației sferice, când asupra rigidului acționează un sistem de forțe coplanare situate într-un plan perpendicular pe axa articulației.

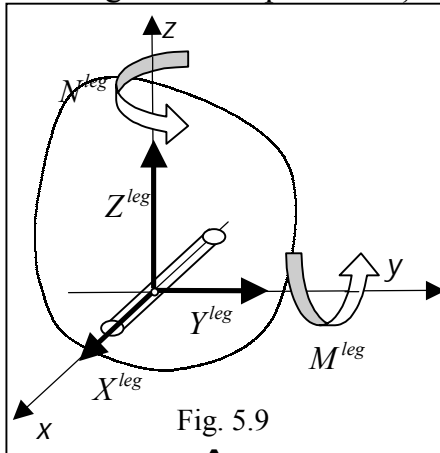
Din punct de vedere geometric, articulația plană reduce numărul gradelor de libertate ale rigidului cu două unități; deci din cele trei grade de libertate în plan, rigidului îi mai rămâne unul singur. Din punct de vedere mecanic această legătură se înlocuiește cu o reacțiune $\bar{R}^{(leg)}$ de mărime și direcție necunoscute, sau cu două necunoscute scalare, proiecțiile după Ox și Oy : $X^{leg}=H$, $Y^{leg}=V$ (fig.5.7.c).

În figura 5.8 sunt date două exemple de bare cu articulații și rezeme simple și forțele de legătură corespunzătoare.



c. Articulația cilindrică spațială

Dacă un rigid acționat de un sistem de forțe în spațiu are o axă fixă, spunem că are o legătură de tip *articulație cilindrică spațială* și *un singur grad de libertate*.



Din punct de vedere geometric articulația cilindrică spațială reduce numărul gradelor de libertate cu cinci unități, deci rigidul mai are un singur grad de libertate (ca și în cazul articulației plane).

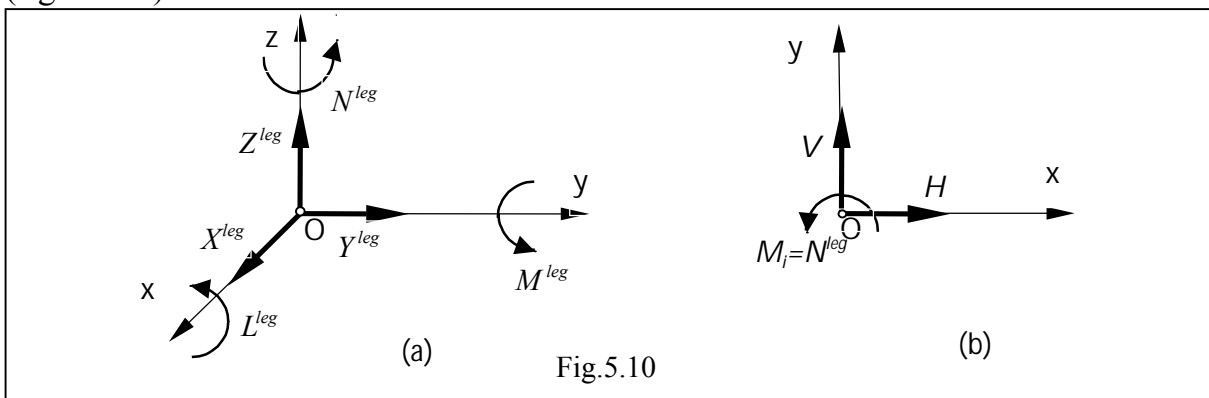
Din punct de vedere mecanic articulația sferică poate fi înlocuită cu trei necunoscute scalare (X^{leg} , Y^{leg} , Z^{leg}) (adică proiecțiile reacțiunii $\bar{R}^{(leg)}$ după direcțiile axelor sistemului cartezian Oxyz, și două momente de legătură (M^{leg} , N^{leg}) (fig.5.9).

5.2.4. Încăstrarea (legătura rigidă)

Încăstrarea este legătura prin care rigidul este complet fixat (întepenit) de un alt corp fix. Din definiție rezultă că, *din punct de vedere geometric*, această legătură îi răpește rigidului toate cele șase grade de libertate.

Din punct de vedere mecanic, încăstrarea poate fi înlocuită cu trei forțe de legătură (X^{leg} , Y^{leg} , Z^{leg} adică proiecțiile reacțiunii $\bar{R}^{(leg)}$ după direcțiile axelor sistemului cartezian Oxyz) și trei momente de legătură (L^{leg} , M^{leg} , N^{leg} , adică proiecțiile reacțiunii $\bar{M}^{(leg)}$ după direcțiile axelor sistemului cartezian Oxyz, fig. 5.10); aceste reacțiuni corespund celor *șase posibilități de mișcare anulate*, deci *în spațiu încăstrarea introduce șase necunoscute scalare* (fig.5.10.a).

Dacă rigidul este acționat de un sistem coplanar de forțe (de exemplu în planul vertical xOy) încăstrarea va introduce trei necunoscute scalare: H , V și M_i (fig.5.10.b).



Pentru a studia forțele și momentele de legătură pe care le introduce o încăstrare, se consideră că în zona de contact acționează forțele locale elementare de legătură $F_j^{(leg)}$ ($j=1,2,\dots,m$), care reprezintă acțiunea pe care o exercită corpul (C_2) asupra corpului (C_1) (fig.5.11.a).

Torsorul de reducere ai acestor forțe locale elementare de legătură în punctul teoretic de contact O , (centrul de greutate al secțiunii de încastrare) este:

$$\tau^{(leg)} : \begin{cases} \bar{R}^{(leg)} = \sum \bar{F}_j^{(leg)}, \\ \bar{M}_O^{(leg)} = \sum \bar{r}_j \times \bar{F}_j^{(leg)} \end{cases} \quad (5.15)$$

unde \bar{r}_j este vectorul de poziție al forței de legătură $\bar{F}_j^{(leg)}$.

Torsorul de reducere al forțelor exterioare $\bar{F}_i^{(a)}$ $i=1,2,\dots,n$, (fig.5.11.b) este:

$$\tau^{(a)} : \begin{cases} \bar{R}^{(a)} = \sum \bar{F}_i^{(a)}, \\ \bar{M}_O^{(a)} = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{(a)} \end{cases} \quad (5.16)$$

unde \bar{r}_i este vectorul de poziție al forței exterioare $\bar{F}_i^{(a)}$.

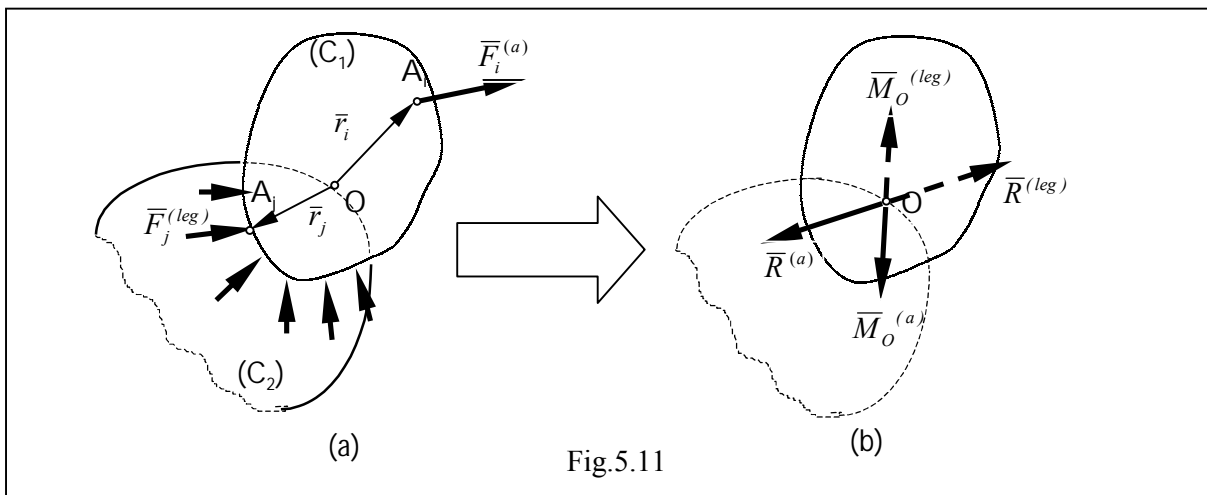


Fig.5.11

5.2.5. Legătura cu fire (prinderea cu fire)

Prinderea cu fire este echivalentă cu o rezemare unilaterală pe o sferă având raza egală cu lungimea firului (ca în cazul legăturii punctului material pe o suprafață). Deci această legătură se înlocuiește cu o forță având direcția în lungul firului (în punctul în care acesta se secționează cu un plan imaginar) și sensul ales, astfel încât aceasta să întindă porțiunea din fir legată de rigid (întrucât firul este flexibil și inextensibil, nu poate prelua decât solicitări de întindere), *forță de întindere* numită *tensiune în fir* (S_A sau S_B în fig.5.12)

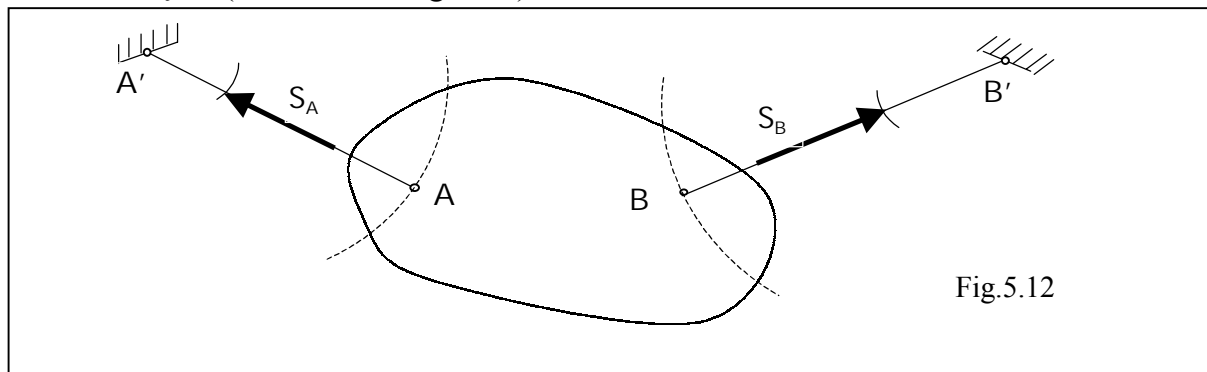
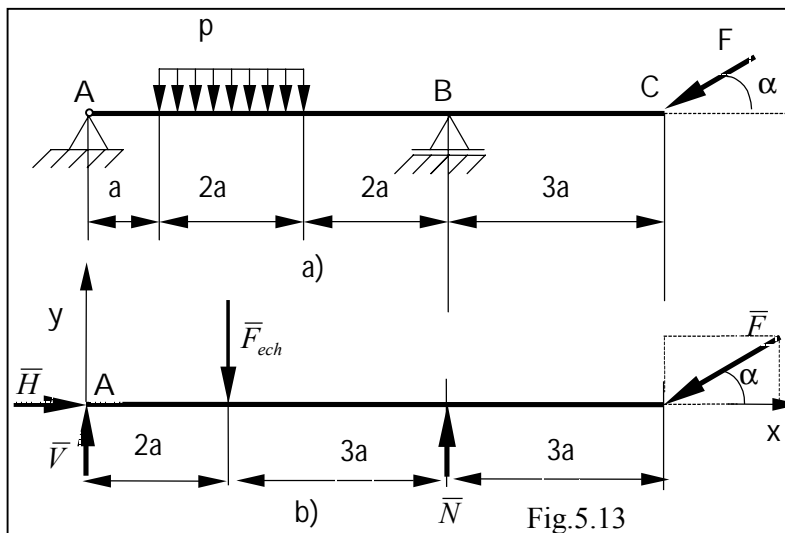


Fig.5.12

Pentru studiul echilibrului rigidului prins cu fire, se introduc mai întâi tensiunile din fire și apoi se studiază echilibrul rigidului ca și cum acesta ar fi liber. În tabelul următor sunt prezentate în rezumat legăturile rigidului, cu simbolurile respective și elementele mecanice cu care se înlocuiesc.

În tabelul de mai jos sunt prezentate principalele tipuri de legături ale rigidului:

Legătura	Simbol	Cu ce se înlocuiește	Nr. necunoscute
Reazemul simplu			1
Articulația	cilindrică plană 		2
	spațială (sferică) 		3
Încadrarea	Plană 		3
	Spațială 		6
Prinderea cu fire			1



Aplicația 1

Să se calculeze reacțiunile din grinda articulată în punctul A și rezemată în B din fig.5.13.a, acționată de forțele F (concentrată) și p (uniform distribuită), cunoscute.

Rezolvare:

După eliberarea grinzii de legături (axioma legăturilor) se introduc în articulația A forțele de legătură V și H și în reazemul B reacțiunea normală N , iar sarcina uniform distribuită p (daN/m) pe lungimea $2a$, se înlocuiește cu o forță echivalentă concentrată $F_{ech} = 2ap$, aplicată într-un punct la distanța $2a$ de capătul A (centrul forțelor paralele). Alegând sistemul de axe xOy cu originea O în capătul A (fig.5.13.b), cele trei ecuații de echilibru se scriu:

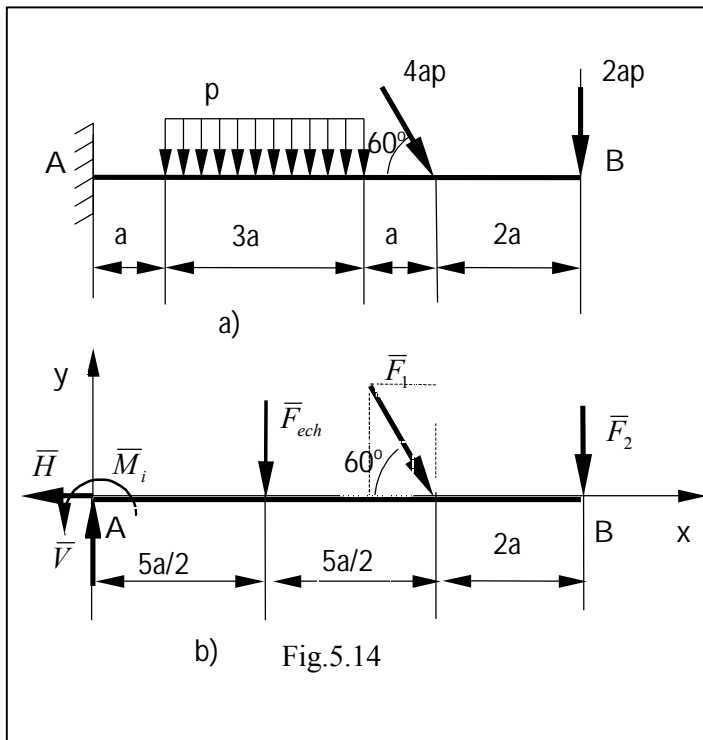
$$\begin{aligned}\sum X_i = 0: & \quad H - F \cos \alpha = 0 \\ \sum Y_i = 0: & \quad V - 2ap + N - F \sin \alpha = 0 \\ \sum M_A = 0: & \quad -2ap \cdot 2a + N \cdot 5a - F \sin \alpha \cdot 8a = 0\end{aligned}$$

Rezultă reacțiunile:

$$H = F \cos \alpha; \quad N = \frac{1}{5}(8F \sin \alpha + 4ap); \quad V = -\frac{1}{5}(13F \sin \alpha - 6ap)$$

Se observă că sensul lui V poate fi:

- cel indicat în desen, dacă: $13F \sin \alpha < 6ap$
- de sens contrar, dacă: $13F \sin \alpha > 6ap$.

Aplicația 2

Să se calculeze reacțiunile grinzii încastrată în A și suspusă la forțele exterioare reprezentate în figura 5.14.

Rezolvare:

Se aleg axele de coordonate ca în figură și se eliberează grinda de legătura din A (încastrare) introducându-se forțele și cuplul de legătură corespunzătoare: H , V , M_i . Se înlocuiește sarcina uniform distribuită p printr-o forță echivalentă $F_{ech} = 3ap$ (în centrul forțelor paralele) care se află la distanța $3a/2$ de punctul A (fig.5.14.b).

În aceste condiții, cele trei ecuații de echilibru sunt:

$$\sum X_i = 0: \quad -H + 4ap \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum Y_i = 0: \quad V - 3ap - 4ap \sin 60^\circ - 2ap = 0$$

$$\sum N_A = 0: \quad M_i - 3ap \cdot 1,5a - 4ap \sin 60^\circ \cdot 5a - 2ap \cdot 7a = 0$$

de unde se obțin forțele și cuplul de legătură:

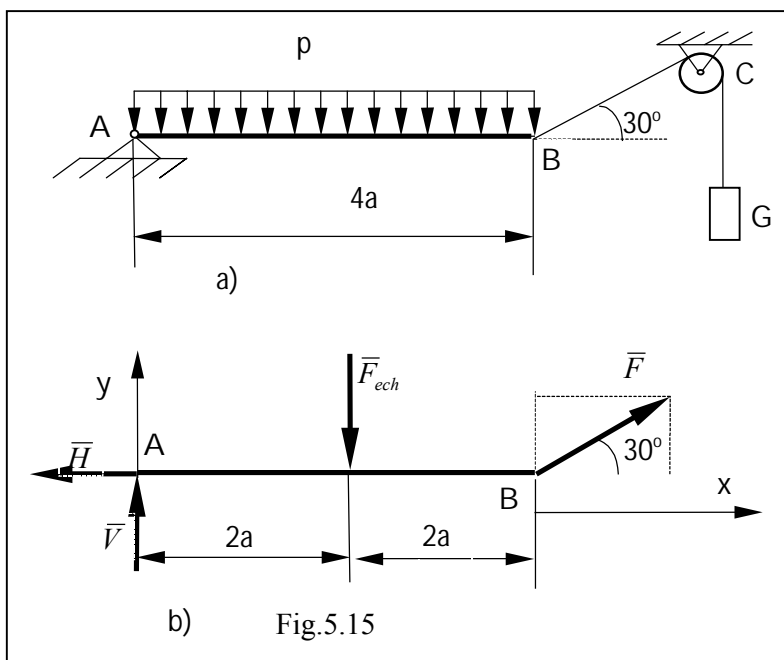
$$H = 2ap; \quad V = (5 + 2\sqrt{3})ap; \quad M_i = (21,5 + 10\sqrt{3})a^2 p$$

Aplicația 3

Se consideră grinda $AB=4a$, de greutate uniform distribuită p , articulată în A și menținută în poziție orizontală de greutatea G , prin intermediul unui fir (fig.5.15). Firul este petrecut peste scripetele C (fără a se lua în considerare eventualele frecări) și face cu orizontala unghiul $\alpha=30^\circ$. Să se determine forțele de legătură din articulația A și mărimea greutății G necesară menținerii grinzii în echilibru în poziție orizontală.

Rezolvare:

Se procedează ca și în problemele anterioare, scriind ecuațiile de echilibru pentru bara supusă la forțe din fig.5.15.b. Se înlocuiește forța uniform distribuită p prin forța echivalentă $F_{ech}=4ap$ care se află la distanța $2a$ de punctul A, iar în B forța $F = G$, înclinată cu unghiul $\alpha=30^\circ$. Ecuațiile de echilibru se scriu:



$$-H + F \cos 30^\circ = 0$$

$$V - 4ap + F \sin 30^\circ = 0$$

$$-4ap \cdot 2a + F \sin 30^\circ \cdot 4a = 0$$

Rezolvând sistemul de ecuații se obțin valorile necunoscutelor:

$$F = G = 4ap,$$

$$H = 2\sqrt{3}ap,$$

$$V = 2ap.$$

5.3. Rigidul supus la legături cu frecare

5.3.1. Aspectul general al frecărilor

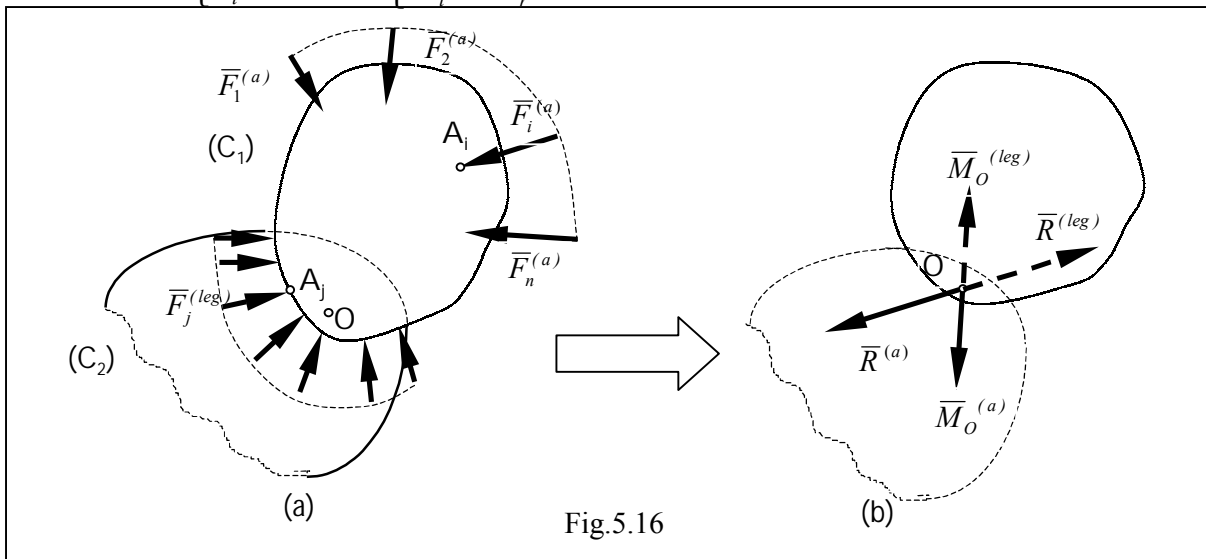
Se consideră un corp rigid (C_1) care are un reazem simplu într-un punct O (punctul teoretic de contact) pe corpul (C_2). În realitate corpul considerat se deformează sub acțiunea forțelor exterioare (efectiv aplicate) $\bar{F}_i^{(a)}$, astfel încât contactul se realizează pe o mică suprafață (fig.5.16.a). În fiecare punct al suprafeței se dezvoltă câte o reacțiune de mărime și direcție necunoscute, pe care o notăm cu $\bar{F}_j^{(leg)}$ ($j=1, 2, \dots, m$).

Fie punctul teoretic de contact O , punctul în care ar fi avut loc contactul celor două corpuri dacă ele nu s-ar fi deformat. Reducând sistemele de forțe $\bar{F}_i^{(a)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) și $\bar{F}_j^{(leg)}$ ($j=1, 2, \dots, m$) în punctul O (fig.5.16.b), condițiile de echilibru vectoriale date de formulele (5.11), sunt:

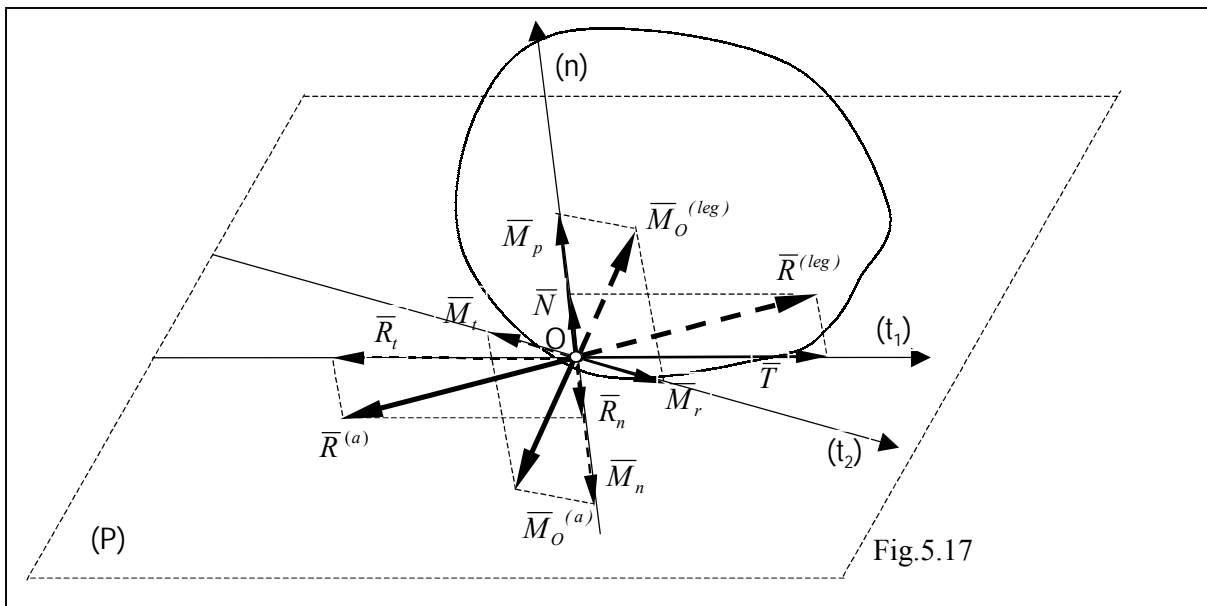
$$\bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(leg)} = 0; \quad \bar{M}_O^{(a)} + \bar{M}_O^{(leg)} = 0 \quad (5.16)$$

Se descompun vectorii celor doi torsori (al forțelor aplicate și de legătură, care la echilibru sunt egali și opuși) după normala (On) la planul tangent în O și după cate o direcție din acest plan (Ot_1, Ot_2) (fig.5.17) și se obțin relațiile vectoriale:

$$\begin{cases} \bar{R}_n + \bar{N} = 0 \\ \bar{R}_t + \bar{T} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{M}_n + \bar{M}_p = 0 \\ \bar{M}_t + \bar{M}_r = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$



În baza teoremei de echivalență a sistemelor de vectori, rezultă că sistemul de forțe aplicate $\bar{F}_i^{(a)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) este echivalent cu două forțe \bar{R}_n , \bar{R}_t și două cupluri de moment \bar{M}_n , \bar{M}_t aplicate în O , iar sistemul de forțe de legătură $\bar{F}_j^{(leg)}$ ($j=1, 2, \dots, m$) este echivalent cu două forțe \bar{N} , \bar{T} și două cupluri de momente \bar{M}_p, \bar{M}_r aplicate în O (fig.5.17).



Efectele acestor componente sunt:

- Forța \bar{R}_n tinde să deplaseze corpul în direcția normală la suprafața de contact, deplasarea fiind împiedicată de *reacțiunea normală* \bar{N} .
- Forța \bar{R}_t tinde să deplaseze corpul în planul tangent la suprafața de sprijin după o axă din planul tangent (t_1) . Această deplasare poartă numele de *alunecare* și este împiedicată de reacțiunea \bar{T} numită *forță de frecare de alunecare*.
- Cuplul de moment \bar{M}_n are tendința de a roti corpul în jurul normalei la suprafața de contact, rotire care se numește *pivotare* și este împiedicată de cuplul \bar{M}_p , numit *cuplu de frecare de pivotare*.
- Cuplul de moment \bar{M}_t are tendința de a roti corpul în jurul unei axe din planul tangent la suprafața de contact (t_2) , rotire care poartă numele de *rostopogolire* și este împiedicată de cuplul \bar{M}_r , numit *cuplu de frecare de rostopogolire*.

Reiese de aici complexitatea fenomenelor de frecare în cazul solidului rigid. Se analizează în continuare aceste aspecte.

5.3.2. Frecarea de alunecare

Acest tip de frecare se produce în cazul când torsorul de reducere al forțelor exterioare (aplicate) este alcătuit numai din forța:

$$\bar{R}^{(a)} = \bar{R}_n + \bar{R}_t \quad (\bar{M}^{(a)} = 0).$$

Conform principiului acțiunii și reacțiunii apare reacțiunea $\bar{R}^{(leg)} = \bar{N} + \bar{T}$. În cazul echilibrului cu frecare reacțiunea $\bar{R}^{(leg)}$ este înclinată cu unghiul α , față de normala (On) , iar la limită este înclinată cu unghiul φ , numit *unghi de frecare de alunecare* (fig.5.18).

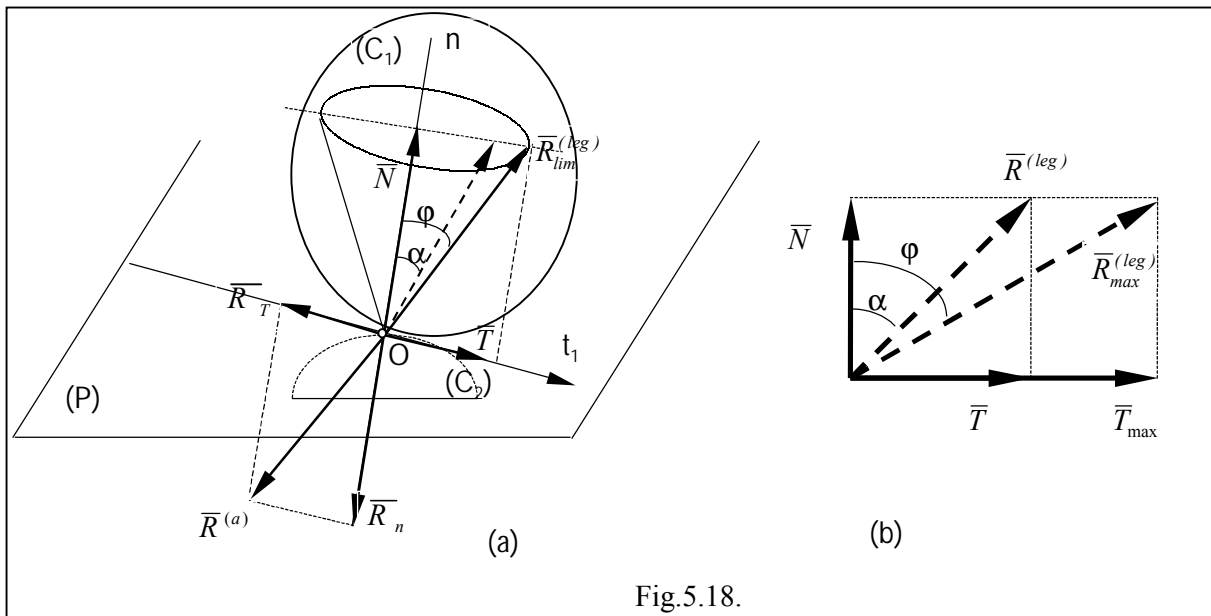


Fig.5.18.

Avem evident relațiile:

$$|\bar{T}| = |\bar{N}| \operatorname{tg} \alpha; \quad |\bar{T}_{\max}| = |\bar{N}| \operatorname{tg} \varphi$$

Dacă se notează $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, unde μ se numește *coeficient de frecare de alunecare*, se obține:

$$|\bar{T}| \leq \mu |\bar{N}| \quad (\text{pentru echilibru în general}) \quad (5.18)$$

$$|\bar{T}_{\max}| = \mu |\bar{N}| \quad (\text{pentru echilibru la limită})$$

Legile frecării uscate (Coulomb) studiate în cazul echilibrului punctului material pe o suprafață cu frecare, rămân valabile și în acest caz. Aspectul geometric al frecării are aceeași expresie.

Rotind suportul reacțiunii $\bar{R}^{(leg)}$ se obține *conul de frecare*, care are ca axă normala comună (On), iar unghiul de vârf 2φ . Corpul (C_1) rămâne în echilibru când reacțiunea $\bar{R}^{(leg)}$ respectiv $\bar{R}^{(a)}$, sunt în interiorul conului de frecare sau la limită pe pânza acestuia. Forța de frecare \bar{T} acționează în planul tangent comun, fiind perpendiculară pe reacțiunea \bar{N} și se opune tendinței de mișcare. Echilibrul se studiază cu ajutorul relațiilor:

$$\bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(leg)} = 0, \quad \bar{M}_0^{(a)} = 0$$

$$\text{și condiția fizică: } |\bar{T}| \leq \mu |\bar{N}|.$$

A p l i c a ț i e . Problema scării.

O bară A_1A_2 de greutate G și de lungime $2L$, omogenă, situată într-un plan vertical, se reazemă cu extremitatea A_1 pe un plan orizontal și cu extremitatea A_2 pe planul vertical (fig. 5.19).

Să se determine unghiul α de înclinare a barei cu orizontala, pentru poziția de echilibru știind că coeficienții de frecare de alunecare sunt respectiv μ_1 și μ_2 .

Rezolvare

Se aleg axele sistemului de coordonate ca în figura 5.19. și se introduc în punctele A_1, A_2 reacțiunile normale \bar{N}_1, \bar{N}_2 și forțele de frecare de alunecare \bar{T}_1, \bar{T}_2 . Condițiile de echilibru sunt date de ecuațiile de echilibru sunt date de ecuațiile de echilibru și relațiile fizice:

$$\sum X_1 = 0 : \quad N_2 - T_1 = 0$$

$$\sum Y_1 = 0 : \quad N_1 + T_2 - G = 0$$

$$\sum M_{A_1} \bar{F}_i = 0: \quad GL \cos \alpha - N_2 2L \sin \alpha - T_2 2L \cos \alpha = 0$$

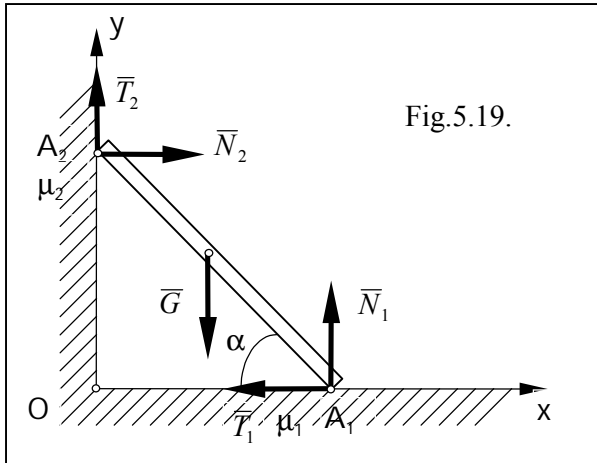


Fig.5.19.

Condițiile fizice ale frecării sunt

$$T_1 \leq \mu_1 N_1, T_2 \leq \mu_2 N_2.$$

Din primele trei ecuații avem:

$$N_1 = \frac{G}{2} + N_2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$T_1 = N_2,$$

$$T_2 = \frac{G}{2} - N_2 \operatorname{tg} \alpha$$

care introduse în ultimele două inegalități conduc la:

$$N_2 \leq \mu_1 \left(\frac{G}{2} + N_2 \operatorname{tg} \alpha \right) \quad \frac{G}{2} - N_2 \operatorname{tg} \alpha \leq \mu_2 N_2.$$

care se mai scriu sub forma:

$$(1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha) N_2 \leq \mu_1 \frac{G}{2}; \quad \frac{G}{2} \leq (\mu_2 + \operatorname{tg} \alpha) N_2.$$

Înmulțind ultima inegalitate cu μ_1 și adunând-o cu cea dinaintea ei obținem:

$$(1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha) N_2 \leq \mu_1 (\mu_2 + \operatorname{tg} \alpha) N_2$$

de unde rezultă:

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2\mu_1}.$$

Dacă notăm $\alpha_0 = \alpha_{\min}$ unghiul definit prin relația: $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2\mu_1}$

putem avea următoarele trei cazuri:

- $\alpha > \alpha_0$ pentru echilibru,
- $\alpha < \alpha_0$ pentru ieșirea din echilibru,
- $\alpha = \alpha_0$ pentru echilibru la limită.

5.3.3. Frecarea de rostogolire

Se consideră un rigid (C_1) simplu rezemat pe un rigid fix (C_2) și se studiază echilibrul lui (C_1) în cazul existenței frecării de rostogolire. Din analiza făcută în paragraful 5.3.1, în acest caz tursorul forțelor exterioare date, calculat în punctul teoretic de contact O este :

$$\tau_o^{(a)} : \quad \bar{R}^{(a)} = \bar{R}_n + \bar{R}_t, \quad \bar{M}_o^{(a)} = \bar{M}_t$$

iar tursorul forțelor de legătură, în același punct, forțe ce apar în zona de contact, este:

$$\tau_o^{(leg)} : \quad \bar{R}^{(leg)} = \bar{N} + \bar{T}, \quad \bar{M}_o^{(leg)} = \bar{M}_r.$$

Așa cum s-a arătat, frecarea de rostogolire se manifestă printr-un cuplu \bar{M}_r , care se opune cuplului forțelor exterioare \bar{M}_t , care tinde să producă rostogolirea corpului (C_1) peste corpul (C_2) în jurul unei axe din planul tangent comun. Deci condițiile de echilibru sunt:

$$\bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(leg)} = 0; \quad |\bar{M}_t| \leq |\bar{M}_r|$$

Frecarea de rostogolire se întâlnește frecvent în aplicațiile tehnice (de exemplu, în cazul roților de autovehicule, lagărelor și rulmenților, etc).

Pentru analiza fenomenului frecării de rostogolire se consideră o roată acționată de greutatea proprie \bar{G} și forța de tracțiune \bar{F} (fig.5.20).

Considerând mai întâi, că se realizează un contact punctual între roată și calea de rulare (planul orizontal) și scriind ecuațiile de echilibru (fig.5.18.a):

$$F - T = 0, \quad N - G = 0, \quad -F \cdot R = 0$$

se obține că $F = 0$, ceea ce contrazice realitatea (experiența).

În realitate, din cauza deformabilității celor două corpuri, contactul dintre roată și calea de rulare se face pe o mică suprafață (fig.5.20.b), pe care apar reacțiunile normale elementare \bar{N}_i și forțele de frecare elementare tangențiale \bar{T}_i (de frecare de alunecare). Aceste forțe se înlocuiesc prin rezultantele lor \bar{N} , \bar{T} (fig. 5.20.c) cu observația că suportul lui \bar{N} acționează la distanța e (nunită excentricitate) față de punctul teoretic de contact O. Suportul lui \bar{T} poate fi considerat cu o bună aproximație, că trece prin punctul teoretic de contact O.

Dacă în punctul teoretic de contact O se introduc două forțe egale cu mărimea și direct opuse: \bar{N} , $-\bar{N}$ (fig.5.20.d), se observă că forțele de legătură sunt echivalente cu forțele: \bar{N} , \bar{T} aplicate în O (ca și când nu ar exista deformații locale) precum și un cuplu de frecare de rostogolire: $M_r = N \cdot e$ (fig.5.20.e).

Numim *coeficient de frecare de rostogolire* (și se notează cu s), distanța maximă e cu care este deplasată reacțiunea normală \bar{N} față de punctul teoretic de contact O (paralelă cu ea însăși), astfel încât rigidul să nu se rostogolească, deci:

$$s = e_{max}.$$

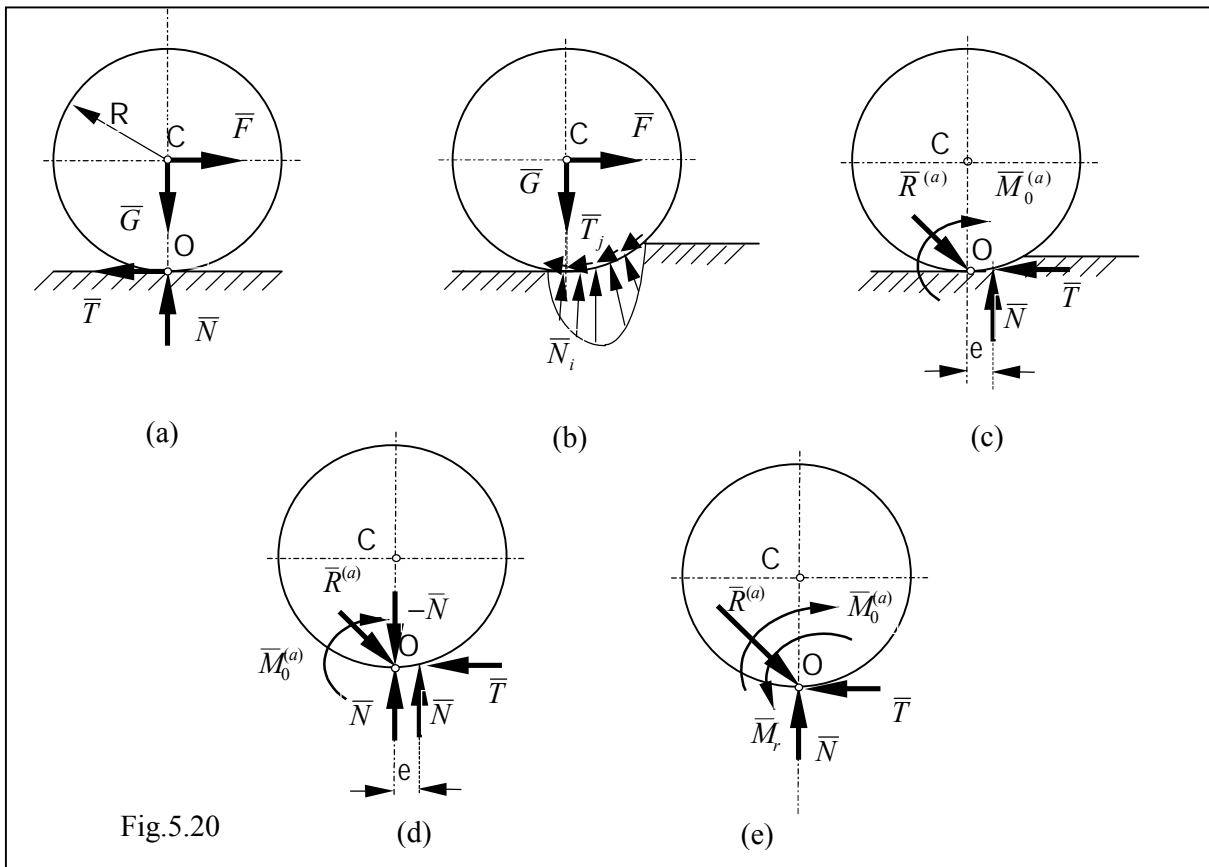


Fig.5.20

Întrucât $(M_r)_{max} = N \cdot e_{max} = N \cdot s$, rezultă că pentru echilibru este necesar să avem: $|\bar{M}_r| \leq s \cdot |\bar{N}|$ (5.19)

În cazul existenței frecării de rostogolire, această condiție se adaugă ecuațiilor de echilibru.

Dimensiunea *coeficientului de frecare de rostogolire* s este cea a unei lungimi și depinde de raza roții și de natura materialelor, iar *cuplul de frecare de rostogolire* M_r este totdeauna opus ca sens tendinței de rostogolire a corpului.

În funcție de valorile pe care le poate lua *forța de frecare de alunecare* T și *cuplul de frecare de rostogolire* M_r , se deosebesc următoarele patru situații:

- $|\bar{M}_r| < s|\bar{N}|$, $|\bar{T}| < \mu|\bar{N}|$, corpul rămâne în repaus;
- $|\bar{M}_r| = s|\bar{N}|$, $|\bar{T}| < \mu|\bar{N}|$, corpul se rostogolește fără să alunece;
- $|\bar{M}_r| < s|\bar{N}|$, $|\bar{T}| = \mu|\bar{N}|$, corpul alunecă fără să se rostogolească;
- $|\bar{M}_r| = s|\bar{N}|$, $|\bar{T}| = \mu|\bar{N}|$, corpul alunecă și se rostogolește în același timp.

Aplicație. Problema roților

Să se studieze echilibrul unei roți pe un plan înclinat cu unghiul α , cunoscând raza roții R , greutatea G și coeficienții de frecare de alunecare μ și de rostogolire s . Se tratează pe rând, *cazul roții trase și al roții motoare*.

a) Roata trasă

Se consideră că asupra roții acționează o forță \bar{F} paralelă cu planul înclinat în sensul de urcare pe plan (sensul axei Ox, fig.5.21). Înlăturând legătura și introducând (conform axiomei legăturilor) în punctul teoretic de contact A, forța de frecare \bar{T} , reacțiunea normală \bar{N} și cuplul de frecare de rostogolire \bar{M}_r , condițiile de echilibru se scriu:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 : & \quad F - G \sin \alpha - T = 0 \\ \sum Y_i = 0 : & \quad N - G \cos \alpha = 0 \\ \sum M_A(\bar{F}_i) = 0 : & \quad -F \cdot R + GR \sin \alpha + M_r = 0 \\ & \quad T \leq \mu N \quad (a) \\ & \quad M_r \leq s \cdot N \quad (b) \end{aligned}$$

Din primele trei ecuații avem:

$$\begin{aligned} T &= F - G \sin \alpha \\ N &= G \cos \alpha \\ M_r &= R(F - G \sin \alpha) \end{aligned}$$

care, introduse în ultimele două inegalități, conduc la :

$$\begin{aligned} F - G \sin \alpha &\leq \mu G \cos \alpha \quad (a') \\ R(F - G \sin \alpha) &\leq Gs \cos \alpha \quad (b') \end{aligned}$$

Deci forța minimă F pentru ca roata să nu alunece și nici să nu se rostogolească este :

$$F \leq G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \text{ și } F \leq G \left(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha \right)$$

Dacă admitem valabilă inegalitatea:

$$G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) > G \left(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha \right)$$

care este echivalentă cu : $\mu > s/R$, rezultă că dacă sunt îndeplinite condițiile:

1. $\mu > s/R$, la ieșirea din echilibru roata mai întâi se rostogolește, când:

$$F > F_{min} = G \left(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha \right);$$

2. $\mu < s/R$, la ieșirea din echilibru roata mai întâi alunecă, când F depășește forța minimă: $F_{min} = G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$;

3. $\mu = \frac{s}{R}$, la ieșirea din echilibru roata va aluneca și se va rostogoli în același

timp, când $F > F_{min}$; $F_{min} = G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = G \left(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha \right)$.

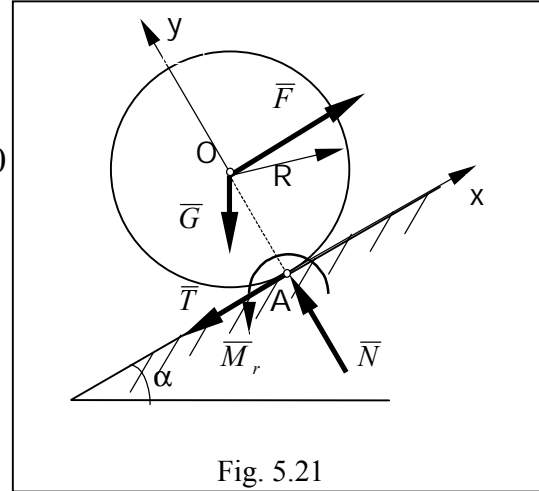


Fig. 5.21

b) Roata motoare

Se consideră că asupra roții acționează o forță rezistentă \bar{F} paralelă cu planul înclinat, în sens invers tendinței de mișcare (care este în sensul axei Ox, fig.5.22) și cuplul motor \bar{M}_m care tinde să urce roata pe planul înclinat. Înlăturând legătura (conform axiomei legăturilor) și introducând în punctul teoretic de contact A, forța de frecare \bar{T} , reacțiunea normală \bar{N} și cuplul de frecare de rostogolire \bar{M}_r , condițiile de echilibru se scriu:

$$T - F - G \sin \alpha = 0$$

$$N - G \cos \alpha = 0$$

$$F \cdot R + GR \sin \alpha + M_r - M_m = 0$$

$$T \leq \mu N,$$

$$M_r \leq sN.$$

Din primele trei ecuații deducem:

$$T = F + G \sin \alpha,$$

$$N = G \cos \alpha,$$

$$M_r = M_m - R(F + G \sin \alpha).$$

care introduse în ultimele două inegalități, se obține: Fig. 5.22

$$F + G \sin \alpha \leq \mu G \cos \alpha,$$

$$M_m - R(F + G \sin \alpha) \leq sG \cos \alpha$$

adică condițiile pentru echilibrul roții motoare:

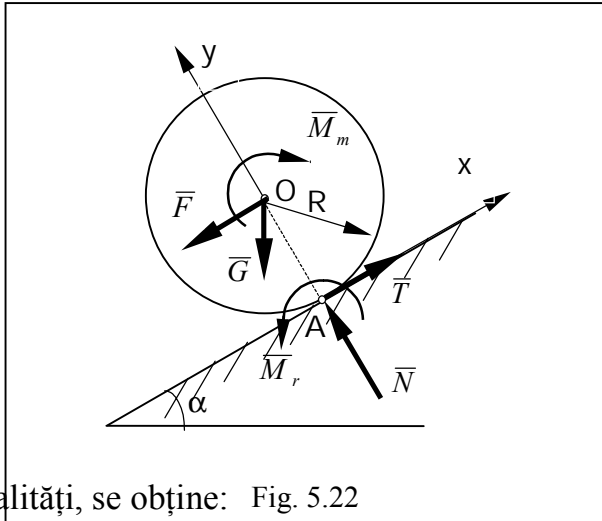
$$F \leq G (\mu \cos \alpha - \sin \alpha),$$

$$M_m \leq F \cdot R + G \cdot R \left(\sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha \right),$$

Acestea reprezintă condițiile ca roata să nu alunece și să nu se rostogolească în același timp, în tendința de urcare a ei pe planul înclinat.

Presupunând prima condiție îndeplinită și admitând că cuplul motor M_m crește, roata motoare se va pune în mișcare rostogolindu-se fără să alunece.

Dacă însă prima condiție nu este îndeplinită, roata motoare se va pune în mișcare alunecând și rostogolindu-se în același timp (spunem că roata “patinează”).



5.3.4. Frecarea în articulații și lagăre

Să considerăm un caz important întâlnit în tehnică și anume frecarea în articulații și lagăre. Se studiază numai frecarea uscată (introducerea lubrifianților schimbă esențial datele și rezultatele problemei). Să considerăm cazul unui lagăr cu joc, contactul având loc într-un punct teoretic de contact A (fig.5.23).

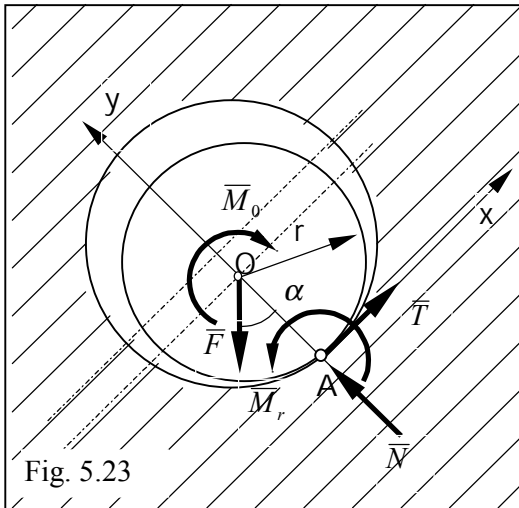


Fig. 5.23

Torsorul forțelor exterioare în O (pe axa arborelui) este alcătuit din \bar{F} , \bar{M}_0 .

Vectorul \bar{M}_0 este dirijat după axa arborelui și are tendința de a imprima arborelui o mișcare de rotație.

Acțiunii momentului \bar{M}_0 i se opune momentul de frecare din lagăr \bar{M}_f . În punctul A are loc, de fapt, un fenomen de frecare de alunecare și unul de rostogolire.

Torsorul forțelor de legătură este format din reacțiunea normală \bar{N} , forța de frecare de alunecare \bar{T} și momentul de frecare de rostogolire \bar{M}_r . Notând cu r raza fusului, se pot scrie condițiile pentru echilibru:

$$\begin{aligned} T - F \sin \alpha &= 0 \\ N - F \cos \alpha &= 0 \\ M_r - M_0 + F r \sin \alpha &= 0 \\ T &\leq \mu N, \\ M_r &\leq sN \end{aligned} \quad (5.20)$$

Din primele trei ecuații avem:

$$T = F \sin \alpha, \quad N = F \cos \alpha, \quad M_r = M_0 - F r \sin \alpha$$

care introduse în cele două inecuații conduc la condițiile de echilibru:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &\leq \mu, \\ M_0 &\leq F_r \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

În cazul echilibrului la limită avem: $\operatorname{tg} \alpha = \mu = \operatorname{tg} \varphi$.

Pe de altă parte, pentru o bună funcționare a mașinilor se urmărește ca frecarea în lagăre să fie mică, adică $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ să aibă valori cât mai mici; deci α fiind mic, se pot face aproximațiile: $\cos \alpha = \cos \varphi \approx 1$; $\sin \alpha = \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \approx \mu$.

$$\text{Deci rezultă: } M_0 \leq F \cdot r \left(\mu + \frac{s}{r} \right)$$

Notând cu: $\mu' = \mu + \frac{s}{r}$ coeficientul de frecare în lagăr, se obține:

$$M_0 \leq \mu' \cdot r \cdot F \quad (5.22)$$

Conform principiului acțiunii și reacțiunii:

$$\bar{M}_f = -\bar{M}_0 \quad \text{și} \quad \bar{F}^{(a)} = \bar{F} = -\bar{F}^{(leg)} \quad (5.23)$$

unde: $|\bar{F}^{(leg)}| = \sqrt{(X^{leg})^2 + (Y^{leg})^2} = \sqrt{H^2 + V^2}$, în articulațiile cilindrice,
 $|\bar{F}^{(leg)}| = \sqrt{(X^{leg})^2 + (Y^{leg})^2 + (Z^{leg})^2}$, în articulațiile sferice:

astfel că expresia momentului (cuplului) de frecare în lagăr se mai scrie:

$$M_f \leq \mu' r \sqrt{H^2 + V^2} \quad (\text{în plan}) \quad (5.24)$$

$$M_f \leq \mu' r \sqrt{(X^{leg})^2 + (Y^{leg})^2 + (Z^{leg})^2} \quad (\text{în spațiu}) \quad (5.24')$$

Observație:

În cazul unui lagăr strâns, în fiecare punct de contact între fus și lagăr apare o reacțiune normală elementară \bar{N}_i și o reacțiune tangențială elementară \bar{T}_i (forță de frecare). Momentul de frecare în lagăr este în acest caz:

$$M_f = \sum T_i r = \sum \mu N_i r = \mu r \sum N_i = \mu \frac{\sum N_i}{F} r F \Rightarrow$$

$$M_f = \mu' r F$$

Pentru echilibru va trebui ca momentul motor M_o să îndeplinească condiția :

$$M_o \leq \mu' r F \quad (5.25)$$

unde coeficientul de frecare are în acest caz expresia:

$$\mu' = \frac{\sum N_i}{F} \mu \quad (5.26)$$

Relația dintre μ' și μ depinde de legea de variație a reacțiunilor N_i în lungul zonei de contact.

A p l i c a ț i e. Troliul cu frecare

Se consideră un troliu de raze R_1, R_2 și greutate G , al cărui fus (lagăr) are raza r , coeficientul de frecare din lagăr fiind μ' . Troliul este acționat de greutatea P și forța Q (fig.5.24). Se cer valorile forței Q pentru care troliul se află în repaus.

R e z o l v a r e :

Se izolează troliul și se tratează problema pentru Q_{max} , ceea ce impune ca sensul lui M_f să fie cel din figura 5.22. Ecuațiile de echilibru sunt:

$$H = 0 \quad (a)$$

$$V - G - P - Q = 0 \quad (b)$$

$$M_f + P \cdot R_2 - Q \cdot R_1 = 0 \quad (c)$$

și relația fizică a frecării (5.25) pentru cazul limită: $M_f = \mu' r \sqrt{H^2 + V^2} = \mu' r V$

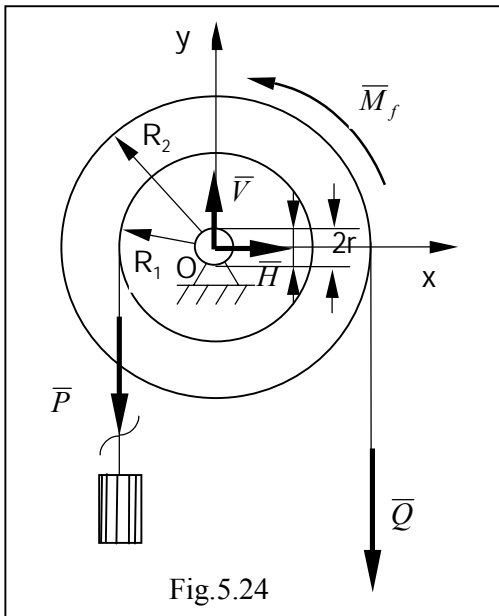


Fig.5.24

Deci, soluția problemei este:

$$\frac{PR_2 - \mu'r(G + P)}{R_1 + \mu'r} \leq Q \leq \frac{PR_2 + \mu'r(G + P)}{R_1 - \mu'r}.$$

unde introducând pe V din (c):

$$M_f = \mu'r(G + P + Q) \quad (d)$$

Egalând expresiile lui M_f din (c) și (d) se obține:

$$Q_{max} = \frac{PR_2 + \mu'r(G + P)}{R_1 - \mu'r}.$$

Schimbând sensul momentului de frecare din lagăr M_f (semnul coeficientului de frecare μ'), se obține valoarea minimă a forței Q :

$$Q_{min} = \frac{PR_2 - \mu'r(G + P)}{R_1 + \mu'r}.$$

5.3.5. Frecarea de pivotare

Se consideră problema echilibrului unui corp când torsorul forțelor efectiv aplicate în punctul teoretic de contact O are componentele:

$$\tau_0^{(a)} : \bar{R}^{(a)} = \bar{R}_n, \bar{M}_0^{(a)} = \bar{M}_n \quad (5.27)$$

iar torsorul forțelor de legătură, în același punct are componentele:

$$\tau_0^{(leg)} : \bar{R}^{(leg)} = \bar{N}, \bar{M}_0^{(leg)} = \bar{M}_p \quad (5.28)$$

Pentru echilibru este necesar ca să fie satisfăcute relațiile:

$$\bar{R}^{(a)} + \bar{N} = 0; \quad \bar{M}^{(a)} + \bar{M}_p = 0 \quad (5.29)$$

Fenomenul frecării de pivotare constă în apariția în punctele de contact A_i a unor reacțiuni elementare \bar{N}_i și a unor forțe tangențiale elementare de frecare \bar{T}_i ($T_i = \mu N_i$) care produc *momentul de pivotare* \bar{M}_p , ce se opune momentului forțelor aplicate \bar{M}_o .

Se consideră pivotul are razele r_1, r_2 , greutatea \bar{G} și moment aplicat \bar{M}_o (fig.5.25). Se presupune că coeficientul de frecare de alunecare între arbore și lagăr μ , este constant pe întreaga suprafață de rezemare a arborelui și presiunea de contact dintre arbore și lagăr este distribuită uniform pe suprafața de contact:

$$p = \frac{G}{A} = \frac{G}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \quad (5.30)$$

Elementul de suprafață (arie) se scrie:

$$dA = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad (5.31)$$

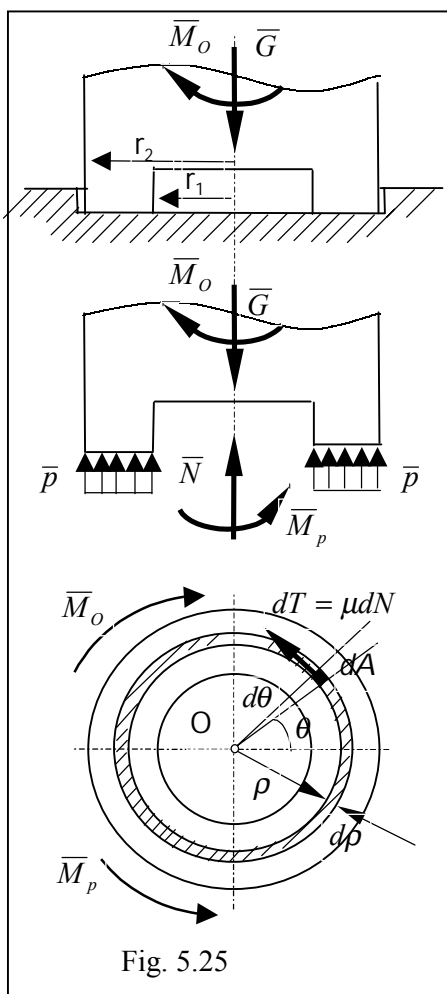


Fig. 5.25

iar forța normală elementară corespunzătoare elementului de arie dA este:

$$dN = p dA = \frac{G}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \rho \cdot d\rho \cdot d\theta ;$$

Forța de frecare de alunecare elementară maximă corespunzătoare, tangentă la cercul de rază ρ este:

$$dT = \mu \cdot dN = \frac{\mu G}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad (5.32)$$

Momentul elementar de frecare produs de forța dT față de axa de rotație, într-un punct de coordonate (ρ, θ) și în raport cu O , la limita echilibrului, este:

$$dM_p = \rho \cdot dT = \frac{\mu G}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \rho^2 \cdot d\rho \cdot d\theta ,$$

iar momentul total în cazul echilibrului la limită se numește *momentul de pivotare* \bar{M}_p el opunându-se momentului exterior \bar{M}_o (fig.5.25):

$$M_p = \int_{(D)} dM_p = \frac{\mu G}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \iint_{(D)} \rho^2 d\rho \cdot d\theta$$

unde: $r_1 \leq \rho \leq r_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Rezolvând integrala pentru cazul particular al suprafeței (de coroană circulară) avem:

$$M_p = \frac{\mu G}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \quad (5.33)$$

$$M_p = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \cdot G$$

Notând cu ν *coeficientul de frecare de pivotare*: $\nu = \frac{2}{3} \mu \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}$ (5.34)

Deoarece $G = N$, se obține în cazul limită: $M_p = \nu N$ (5.35)

În cazul arborelui plin ($r_1 = 0, r_2 = R$) se obține:

$$M_p = \frac{2}{3} \mu R N \quad (5.36)$$

Identificând (5.35) și (5.36) se obține: $\nu = \frac{2}{3} \mu R$ (5.37)

CAPITOLUL 6

STATICA SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE ȘI A SISTEMELOR DE CORPURI

6.1. Sisteme mecanice de puncte materiale.

Forțe interioare și exterioare.

Fie un sistem de puncte materiale $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ (fig.6.1.a). Dacă aceste puncte interacționează mecanic (se atrag sau se resping), atunci acestea formează un *sistem mecanic de puncte materiale*. Pozițiile acestor puncte sunt definite de vectorii de poziție $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n$, în raport cu originea O a unui sistem de axe.

Un sistem de n puncte materiale *libere* în spațiu, are $3n$ grade de libertate (întrucât pentru determinarea poziției unui punct este necesară cunoașterea celor trei coordonate ale sale sau a vectorului de poziție față de sistemul de referință dat).

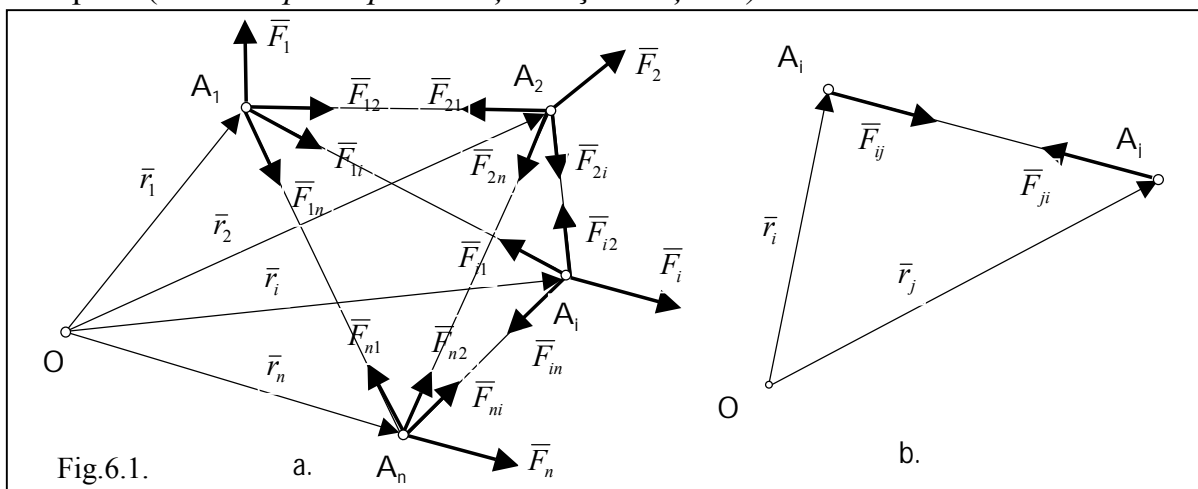
În cazul sistemelor de puncte materiale *supuse la legături*, aceste legături se pot exprima printr-un număr de relații scalare independente între coordonatele punctelor. Dacă m este numărul acestor relații, atunci numărul de parametri independenți care caracterizează poziția sistemului de puncte materiale, este :

$$N = 3n - m \quad (6.1)$$

sau altfel spus, numărul gradelor de libertate se micșorează cu numărul relațiilor independente corespunzătoare legăturilor.

Forțele care acționează asupra sistemului de puncte materiale se clasifică convențional în: *forțe interioare și forțe exterioare*.

a) *Forțele interioare* reprezintă interacțiunea mecanică dintre punctele sistemului și sunt egale ca mărime două câte două, au același suport și sunt dirijate în sensuri opuse (conform *principiului acțiunii și reacțiunii*).



Dacă notăm cu \vec{F}_{ij} forța ce reprezintă acțiunea mecanică a punctului A_j asupra punctului A_i aplicată în A_i , iar \vec{F}_{ji} forța ce reprezintă acțiunea mecanică a punctului A_i asupra punctului A_j , aplicată în A_j (fig.6.1.a), atunci conform principiului acțiunii și reacțiunii avem relația evidentă:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (6.2)$$

sau:
$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j) \quad (6.3)$$

Ținând seama de relația (6.2), momentul unei perechi de forțe interioare care reprezintă interacțiunea mecanică dintre punctele materiale A_i și A_j este nul:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times (-\vec{F}_{ij}) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \overline{A_j A_i} \times \vec{F}_{ij} = 0 \quad (6.4)$$

unde $\overline{A_j A_i}$, \vec{F}_{ij} sunt vectori coliniari, iar \vec{r}_i , \vec{r}_j sunt vectorii de poziție ai punctelor A_i , A_j în raport cu punctul fix O (fig.6.1.b), $i = 1, 2, \dots, n$; $i \neq j$. De subliniat faptul că forțele \vec{F}_{ij} , \vec{F}_{ji} acționează asupra a două puncte materiale diferite și deci efectul lor nu se anulează.

b) *Forțele exterioare sistemului (A)* sunt toate celelalte forțe care acționează asupra punctelor sistemului (A) și le vom nota cu un singur indice, care indică punctul material asupra căruia acestea acționează (de exemplu, forța \vec{F}_i este aplicată punctului A_i); aceste forțe pot fi :

- *forțe active (direct aplicate)*
- *forțe de legătură exterioare sistemului de puncte materiale.*

6.2. Echilibrul sistemelor de puncte

Prin definiție, *un sistem de puncte materiale (A) este în echilibru, dacă fiecare punct al sistemului se află în echilibru și reciproc.* Condiția ca un punct A_i din sistem să fie în echilibru, este ca rezultanta forțelor care acționează asupra lui să fie nulă, adică:

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{in} = 0 \quad (6.5)$$

sau:
$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = 0 \quad (6.6)$$

Rezultă că sistemul de puncte materiale va fi în echilibru dacă:

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = 0, \text{ pentru } i=1, 2, \dots, n; \quad i \neq j. \quad (6.7)$$

Cu privire la echilibrul sistemelor de puncte, se pot deosebi două categorii de probleme:

- a) *fiind date pozițiile punctelor care formează sistemul de puncte materiale în echilibru, se cere să se determine forțele care acționează acest sistem.*
- b) *fiind date forțele care acționează sistemul de puncte materiale, se cere să se determine poziția de echilibru a acestui sistem.*

Condițiile (6.7) sunt echivalente cu $3n$ ecuații scalare. În cazul echilibrului sistemelor de puncte materiale supuse la legături, numărul parametrilor geometrici este egal cu $3n - m$ (legăturile introduc m relații scalare independente). Urmează că din cele $3n$ ecuații de echilibru, numai $3n - m$ vor servi la determinarea poziției sistemului; celelalte m ecuații se vor utiliza pentru determinarea forțelor de legătură. Față de problemele menționate, aceasta este o problemă mixtă, deoarece trebuie să se determine atât poziția sistemului de puncte cât și forțele de legătură respective. Nu întotdeauna sistemul (6.7) este compatibil și determinat.

6.3. Echilibrul sistemelor de rigide

Un corp rigid poate fi considerat ca un *sistem nedeformabil de puncte materiale*. Datorită rigidității sistemului, distanța dintre două puncte oarecare rămâne tot timpul constantă.

Un sistem de corpuri rigide C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) poate fi considerat ca un *sistem de puncte materiale format din subsisteme rigide sau nedeformabile* (fiecare subsistem corespunde unuia dintre corpurile rigide C_i).

Forțele care acționează asupra sistemului de corpuri pot fi: *forțe interioare*, reprezentând interacțiunea mecanică dintre punctele diferitelor corpuri C_i și *forțe exterioare* sistemului de corpuri. Forțele interioare vor satisface, bineînțeles, relațiile (6.3) și (6.4). Pe baza acestor observații, tot ceea ce s-a spus în paragrafele 6.1 și 6.2 despre sistemele de puncte materiale în echilibru, se poate extinde și la sisteme de corpuri rigide.

Sistemul de ecuații (6.7) reprezintă deci relațiile *teoremei izolării corpurilor*, care se enunță astfel: “*Dacă un sistem de corpuri (liber sau supus la legături) se află în echilibru, atunci fiecare corp al sistemului, considerat ca un subsistem rigid, se află de asemenea în echilibru*”.

6.4. Teorema solidificării.

Teorema echilibrului părților

Aplicarea ecuațiilor (6.7) în aplicațiile practice, întâmpină unele dificultăți din cauza forțelor interioare care sunt necunoscute. De aceea este preferabil să se folosească ecuații de echilibru în care nu apar aceste forțe interioare.

Însumând cele n ecuații (6.7) membru cu membru avem:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} = 0 \quad (6.8)$$

Înmulțind vectorial relațiile (6.7) cu vectorii de poziție \bar{r}_i și însumând pentru toate punctele sistemului avem:

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} = 0 \quad (6.9)$$

Pe de altă parte însumând relațiile (6.3) și (6.4) pentru toate punctele din sistem avem:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} = 0 \quad (6.10)$$

care, introduse în relațiile (6.8) și (6.9) conduc la ecuațiile:

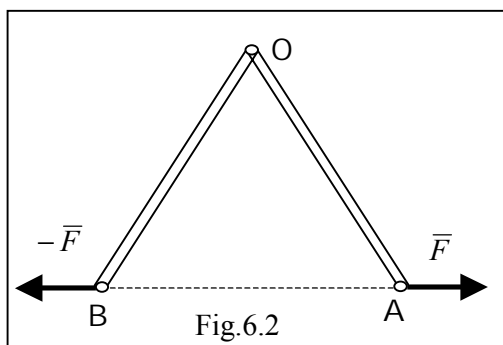
$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 0 \quad (6.11)$$

Aceste relații reprezintă expresia **teoremei solidificării pentru sisteme de puncte materiale**: “dacă un sistem de puncte materiale, libere sau supuse la legături, se află în echilibru sub acțiunea unor forțe direct aplicate, el poate fi considerat ca un sistem rigid (sau nedeformabil) de puncte materiale”

Deoarece relațiile (6.11) reprezintă condițiile de echilibru și pentru un sistem de rigide (ca un caz particular de sisteme materiale, format din subsisteme nedeformabile) se poate da următorul enunț al **teoremei solidificării pentru sisteme de corpuri**: “dacă un sistem de corpuri rigide, liber sau supus la legături exterioare, se află în echilibru sub acțiunea unor forțe direct aplicate, el poate fi considerat ca un sistem rigid (sau nedeformabil) de corpuri, păstrându-se legăturile exterioare inițiale”.

Observații

- Ecuțiile (6.11) sunt valabile pentru un sistem material oarecare (de puncte materiale sau corpuri);
- Pentru un sistem material nedeformabil, ecuațiile (6.11) reprezintă o condiție necesară și suficientă, deoarece ele coincid cu ecuațiile de echilibru ale rigidului;
- Pentru un sistem material deformabil, ecuațiile (6.11) reprezintă condiții necesare dar nu și suficiente așa cum rezultă din următorul exemplu:



Se consideră un sistem format din două bare articulate în punctul O (OA și OB), forțele exterioare $\bar{F}, -\bar{F}$ aplicate în A și respectiv în B și având ca suport dreapta AB; se observă că deși vectorul rezultantei și vectorul moment resultant sunt zero, totuși sistemul nu este în echilibru.

Dacă se consideră numai o parte din ecuațiile (6.7) și anume, cele care exprimă condițiile de echilibru pentru un subsistem izolat de puncte materiale (sau corpuri rigide), aceste ecuații sunt satisfăcute dacă întregul sistem (6.7) este satisfăcut.

Această constatare exprimă așa numita **teoremă a echilibrului părților**: “dacă un sistem de puncte materiale, libere sau cu legături, se află în echilibru sub acțiunea unor forțe aplicate, atunci o parte a lui considerată ca subsistem rigid, va fi de asemenea în echilibru sub acțiunea forțelor corespunzătoare acelei părți”.

Prin urmare, presupunând că sistemul inițial se află în echilibru, se poate studia echilibrul anumitor subsisteme alese convenabil și nu neapărat echilibrul fiecărui subsistem în parte. Această teoremă este de obicei folosită pentru determinarea mai rapidă a unor necunoscute, sau pentru verificări.

În concluzie o problemă de statica sistemelor de corpuri poate fi rezolvată:

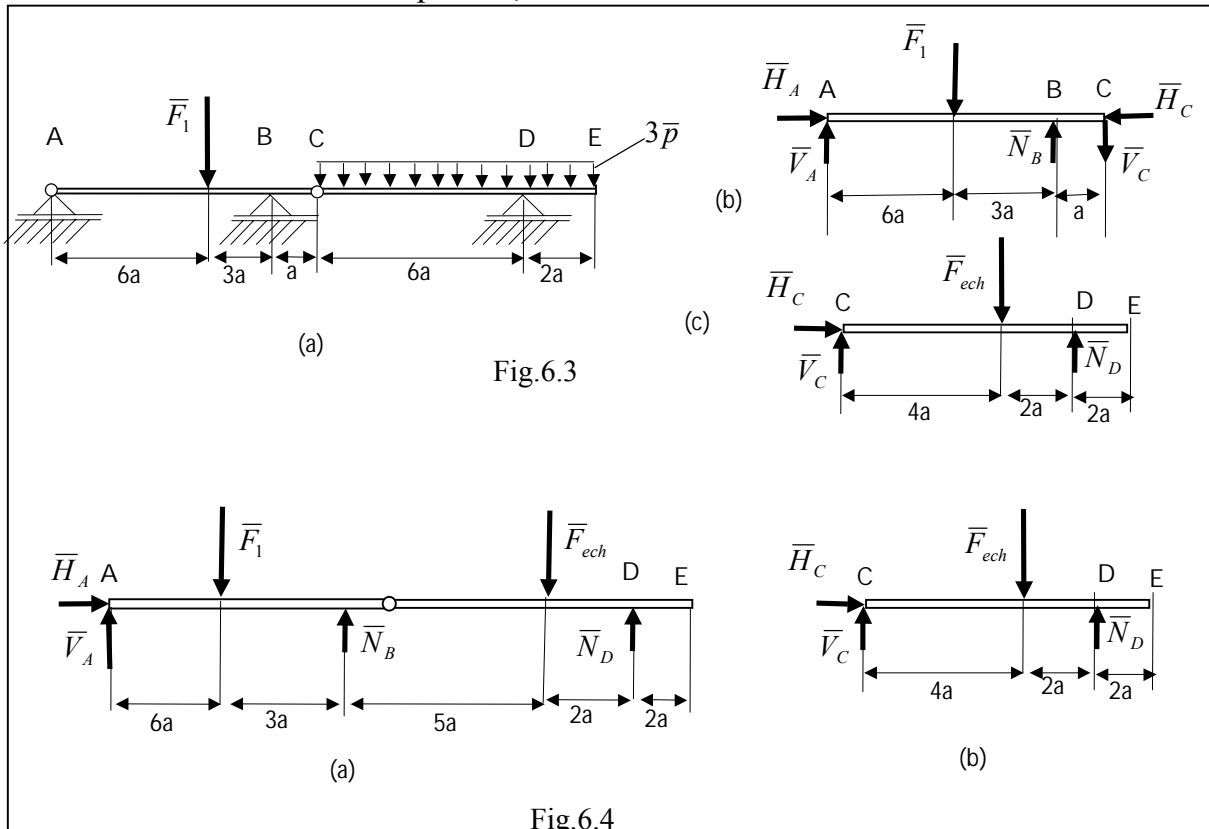
- *izolând corpurile (aplicând metoda izolării corpurilor)* și scriind ecuațiile de echilibru pentru fiecare corp în parte;
- *aplicând teorema solidificării și teorema echilibrului părților* simultan, scriind pentru fiecare caz ecuațiile de echilibru corespunzătoare.

Aplicația 1

Se consideră sistemul format din două bare (grinzi) orizontale AC și CE așezate pe două reazeme, o articulație și legate între ele prin articulația C. Forțele aplicate și elementele geometrice ale barelor sunt date în figura 6.3.a: $F_1=16ap$, sarcina uniform distribuită $3p$. Se cere să se calculeze reacțiunile din articulația A și reazemele simple B și D, precum și forțele de legătură interioare din articulația C. Se neglijează greutatea barelor.

Rezolvare:

Se aplică *metoda izolării corpurilor*: se descompune sistemul în două corpuri, pentru fiecare dintre ele introducându-se forțele aplicate și de legătură (fig.6.3.b,c). Se înlocuiește sarcina uniform distribuită $3p$ cu o forță echivalentă $F_{ech}=24aP$. Conform metodei izolării corpurilor, se studiază echilibrul fiecărei bare.



Bara 1 (AC):

$$\sum X_i = 0: \quad H_A - H_C = 0$$

$$\sum Y_i = 0: \quad V_A - 16ap + N_B - V_C = 0$$

$$\sum M_{A_z}(\bar{F}_i) = 0: \quad -16ap \cdot 5a + N_B \cdot 8a - V_C \cdot 9a = 0$$

Bara 2 (CE):

$$\sum X_i = 0: \quad H_C = 0$$

$$\sum Y_i = 0: \quad V_C - 24ap + N_D = 0$$

$$\sum M_{C_z}(\bar{F}_i) = 0: \quad -24ap \cdot 4a + N_D \cdot 6a = 0$$

Rezultă șase ecuații cu șase necunoscute: $H_A, V_A, N_B, H_C, V_C, N_D$.

Rezolvând acest sistem se obțin valorile:

$$H_A = 0, \quad V_A = 5ap, \quad N_B = 19ap, \quad H_C = 0, \quad V_C = 8ap, \quad N_D = 16ap.$$

Observații

- a) Dacă la introducerea forțelor de legătură, acestea ar fi avut sensul invers celui din figura 6.3.b,c atunci ar fi rezultat aceleași valori dar cu semnul minus; deoarece au rezultat pozitive, rezultă că sensul lor coincide cu cel ales;
- b) Dacă se cere determinarea reacțiunilor din A, B, D și nu a forțelor de legătură din C , atunci pentru rezolvarea problemei este mai comod să se *aplice teorema solidificării și teorema echilibrului părților*: În acest caz se consideră sistemul de două bare ca un rigid (fix în C), se înlocuiesc legăturile din A, B, D cu forțele de legătură corespunzătoare (fig.6.4.a) și se scriu cele trei ecuații de echilibru pentru rigid (fig 6.4.a):

$$\sum X_i = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum Y_i = 0: \quad V_A - 16ap + N_B - 24ap + N_D = 0$$

$$\sum M_{A_z}(\bar{F}_i) = 0: \quad -16ap \cdot 5a + N_B \cdot 8a - 24ap \cdot 13a + N_D \cdot 15a = 0$$

Se mai scrie o relație de momente față de C pentru fig.6.4.b:

$$\sum M_{C_z}(\bar{F}_i) = 0: \quad -24ap \cdot 4a + N_D \cdot 6a = 0$$

Disponem astfel de patru ecuații cu patru necunoscute, care rezolvat conduce la aceleași valori: $H_A = 0, V_A = 5ap, N_B = 19ap, H_C = 0, N_D = 16ap$.

Aplicația 2 : Frâna cu bandă

Se consideră un sistem format dintr-o roată (trotiu), o pârghie AB și o bandă ca în figura 6.5.a, care trebuie să oprească greutatea G din coborârea ei pe verticală. Unghiul de înfășurare pe roată (trotiu) este $\theta = 180^\circ = \pi \text{ rad}$, iar coeficientul de frecare între trotiu și bandă este dat (μ). Se neglijează frecările în articulația A și lagărul O al trotiului precum și greutatea lui. Se cer: a) Tensiunile în bandă ; b) Forța minimă de frânare a trotiului; c) Reacțiunile din A și O .

Rezolvare:

Se studiază echilibrul fiecărui corp separat (prin metoda izolării corpurilor), înlocuindu-se legăturile cu forțe de legătură (fig.6.5.b.c) și scriind relațiile de echilibru respective.

Pentru troliu (fig.6.5.b) avem ecuațiile:

$$\begin{aligned}\sum X_i = 0: & \quad H_o = 0 \\ \sum Y_i = 0: & \quad V_o - G + S_1 + S_2 = 0 \\ \sum M_{O_z}(\bar{F}_i) = 0: & \quad S_2 R - S_1 R - G r = 0\end{aligned}$$

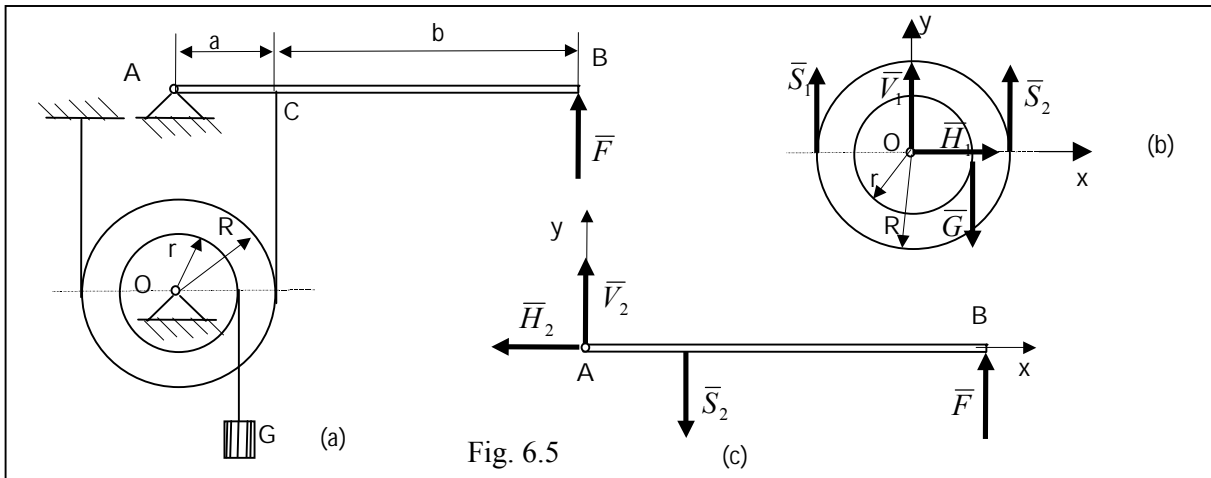


Fig. 6.5

La aceste ecuații se adaugă relația lui Euler pentru frecarea firelor, ținând seama de tendința de mișcare a roții datorită greutateii G: $S_2 = S_1 \cdot e^{\mu\pi}$

Rezultă tensiunile din fir:

$$S_1 = \frac{rG}{R(e^{\mu\pi} - 1)}; \quad S_2 = \frac{rGe^{\mu\pi}}{R(e^{\mu\pi} - 1)}$$

și reacțiunile în O:

$$H_o = 0, \quad V_o = G - S_1 - S_2.$$

Pentru bara AB (fig. 6.5.c) avem ecuațiile:

$$H_A = 0; \quad V_A - S_2 + F = 0; \quad -S_2 a + (a + b) F = 0$$

de unde rezultă forța minimă de frecare:

$$F_{min} = \frac{a}{a+b} \frac{r}{R} \frac{e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi} - 1} G.$$

și reacțiunile în A:

$$H_A = 0; \quad V_A = S_2 \frac{b}{a+b} = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{r}{R} \frac{e^{\mu\pi}}{e^{\mu\pi} - 1} G.$$

6.5. Sisteme din bare articulate (grinzi cu zăbrele)

6.5.1. Generalități. Ipoteze simplificatoare.

Una dintre aplicațiile echilibrului sistemelor de corpuri des întâlnită în practică o reprezintă sistemele de bare articulate: acestea se întâlnesc în construcția podurilor metalice, a podurilor rulante, a macaralelor, a stâlpilor metalici de susținere a cablurilor electrice, a fermelor de susținere a acoperișurilor clădirilor, a schelelor de foraj, etc.

Un sistem de bare articulate (grindă cu zăbrele) este format dintr-un număr de bare rectilinii și rigide, legate între ele prin articulații sferice, pentru care se fac următoarele ipoteze de lucru:

- barele sunt rectilinii (drepte), iar secțiunea lor are dimensiuni neglijabile față de lungimea lor;
- prinderea barelor se face la capete prin articulații ideale (fără frecare) ;
- sistemul de bare este nedeformabil;
- forțele exterioare (date și de legătură) acționează asupra sistemului numai în capetele barelor , în articulații (numite noduri);
- greutatea barelor se neglijează în raport cu forțele exterioare.

În aceste condiții, forțele care acționează în bare (eforturile) sunt numai de tip axial. Dacă toate barele se află în același plan, spunem că avem un *sistem plan de bare articulate (cu articulații plane)*, în celalalt caz avem un *sistem spațial de bare articulate (cu articulații sferice)*.

Sistemele de bare articulate pot fi *static determinate sau static nedeterminate*.

Barele grinzii cu zăbrele sunt supuse la *eforturi pozitive (de întindere)*, când acestea tind să lungescă bara iar sensul este cel corespunzător din fig.6.6.a (iese din nod), sau sunt supuse la *eforturi negative (de compresiune)*, când acestea tind să scurteze bara iar sensul efortului este cel corespunzător din fig.6.6.b (intră din nod).

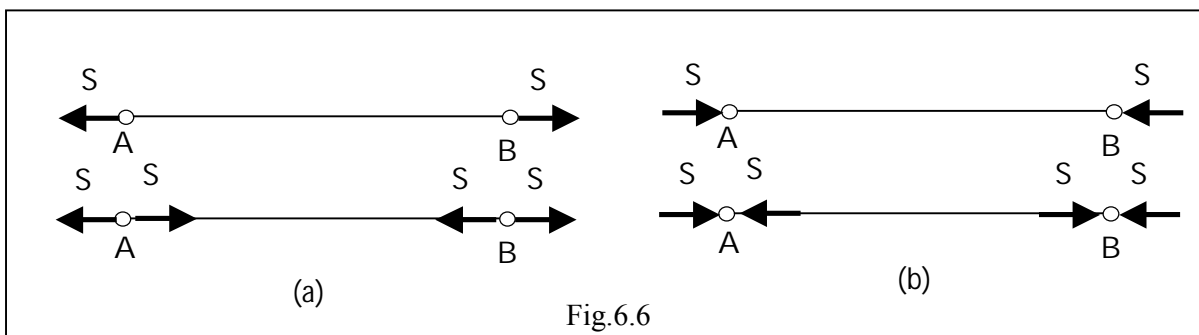


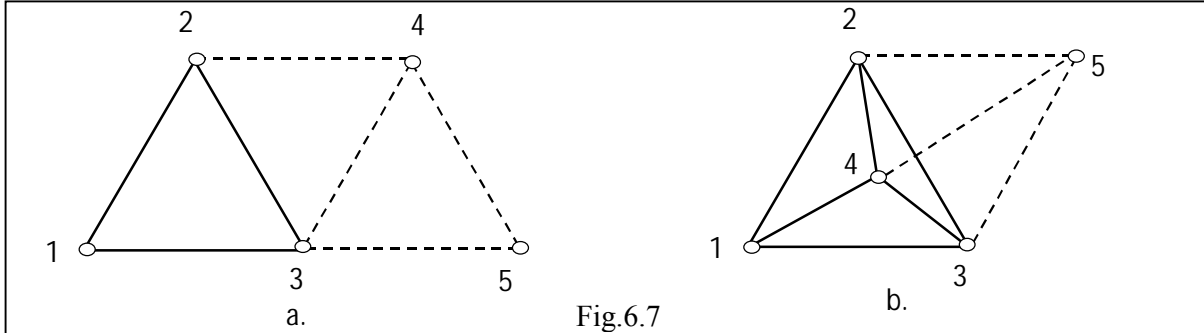
Fig.6.6

Se poate arăta că trei bare articulate la capetele lor formează o construcție nedeformabilă în plan. Prin urmare, dacă grinda cu zăbrele este formată din triunghiuri, sistemul este nedeformabil. Examinând modul de formare al unei *grinzi cu zăbrele plane* (fig.6.7.a) se constată că plecând de la primul triunghi, format din trei bare și trei noduri, se poate obține o nouă grindă cu zăbrele *static determinată* prin adăugarea unui nou triunghi , adică două bare și un nod.

Deci, pentru fiecare nod în plus se introduc câte două bare. Dacă se notează cu n numărul nodurilor și cu b numărul barelor, condiția necesară (dar nu și suficientă) ca un sistem plan de bare articulate să fie static determinat este:

$$b = 3 + 2(n - 3) \quad \text{sau:} \quad b = 2n - 3 \quad (6.12)$$

relație care exprimă și condiția ca grinda cu zăbrele plană să fie nedeformabilă.



Pentru sisteme formate din bare articulate în spațiu, șase bare articulate la capete formează o construcție nedeformabilă, adică muchiile unui tetraedru (fig. 6.7.b). Prin urmare, dacă grinda cu zăbrele este formată din astfel de tetraedre, sistemul este nedeformabil. Examinând modul de formare al grinzii cu zăbrele spațiale (fig. 6.7.b) se constată că plecând de la primul tetraedru, format din 6 bare și patru noduri, se poate obține o nouă grindă cu zăbrele, dacă se adaugă trei bare și un nod. Deci condiția necesară (dar nu și suficientă) ca un sistem spațial de bare articulate să fie static determinat, este:

$$b = 6 + 3(n - 4) \quad \text{sau:} \quad b = 3n - 6 \quad (6.13)$$

Existența inegalităților $b > 2n - 3$, respectiv $b > 3n - 6$ indică faptul că avem sisteme static nedeterminate în plan, respectiv în spațiu.

În cele ce urmează se vor rezolva aplicații de sisteme static determinate articulate plane (nodurile se găsesc în același plan cu forțele aplicate).

Legăturile sistemelor de bare articulate plane pot fi un rezem simplu și o articulație, deci reacțiunile cu care se înlocuiesc aceste legături sunt reprezentate de maximum trei necunoscute (prima categorie de necunoscute), iar pentru calculul lor se aplică *teorema solidificării* (considerând grinda cu zăbrele ca un singur corp rigid acționat de forțele exterioare, date și de legătură).

O a doua categorie de necunoscute în cazul problemelor de grinzi cu zăbrele o constituie eforturile din bare, care sunt forțe interioare ale sistemului și se determină prin diferite metode specifice cum ar fi: *metoda izolării nodurilor*, *metoda secțiunilor* (Ritter) *metoda grafică Cremona* și *metoda matricială*.

6.5.2. Metoda izolării nodurilor

Aceasta este o metodă analitică și se bazează pe *metoda izolării corpurilor* sau pe *teorema echilibrului părților*, considerând ca "parte" a sistemului câte un nod, care fiind izolat, poate fi considerat ca un punct material acționat de forțe concentrate situate în planul grinzii plane (care sunt eforturile din bare și forțele exterioare date

și de legătură). Pentru echilibrul unui astfel de nod se scriu două ecuații de proiecții pe axe. Dacă ecuațiile corespunzătoare nodului au numai două necunoscute, ele pot fi determinate direct și se poate trece la următorul nod cu două necunoscute. Rezolvarea este deci din aproape în aproape.

Dacă nu există nici un nod cu numai două necunoscute, se aplică mai întâi *teorema solidificării* determinându-se reacțiunile, după care se scriu ecuațiile pentru acele noduri cu maximum două necunoscute. Dacă procedând astfel, nu se găsesc noduri cu numai două necunoscute, sistemul de bare este static nedeterminat și se rezolvă cu ajutorul metodelor specifice din Rezistența materialelor.

De menționat că în această metodă se face ipoteza că toate eforturile din bare sunt pozitive (sau de întindere, adică ies din nod). Dacă eforturile care se obțin din calcule sunt pozitive, atunci ele sunt într-adevăr eforturi de întindere, iar dacă rezultă negative, sunt eforturi de compresiune.

6.5.3. Metoda secțiunilor (Ritter).

Metoda anterioară permite determinarea eforturilor în toate barele, din aproape în aproape, trecând de la un nod la altul. Dacă ne interesează efortul într-o singură bară (sau într-un număr de bare), se folosește *metoda secțiunilor* (care permite determinarea acestui efort scriind o singură ecuație) care corespunde *teoremei echilibrului părților* prezentată anterior. Se procedează astfel:

- se secționează grinda cu zăbrele complet cu un plan imaginar, plan ce secționează și bara al cărei efort ne interesează, introducându-se în secțiunile corespunzătoare ale barelor secționate, eforturile necunoscute;
- conform *teoremei echilibrului părților*, fiecare parte a grinzii astfel obținută este în echilibru sub acțiunea forțelor date, a forțelor de legătură și a forțelor interioare (a eforturilor ce reprezintă acțiunea reciprocă a celor două părți).

Pentru determinarea unui efort necunoscut se scrie ecuația de momente față de punctul de intersecție al suporturilor celorlalte două eforturi necunoscute. Dacă cele două eforturi (care nu interesează) sunt paralele, pentru determinarea celui de-al treilea efort necunoscut, se folosește ecuația de proiecții după direcția perpendicularei comune la cele două eforturi.

În general, înainte de aplicarea acestei metode se determină reacțiunile exterioare, alicând *teorema solidificării*.

6.5.4. Metoda grafică Cremona

Acestă metodă reprezintă *corespondentul grafic al metodei izolării nodurilor* și constă în reprezentarea grafică, pentru fiecare nod (considerându-se succesiv nodurile cu numai două necunoscute) a *ecuațiilor vectoriale de echilibru*. Se pornește de la observația că, pentru ca un sistem de forțe concurente să fie în echilibru, *este necesar și suficient ca poligonul forțelor să se închidă*. Aplicarea metodei necesită de obicei, determinarea prealabilă a reacțiunilor.

Pentru calculul eforturilor din bare, se începe cu nodul în care concură cel mult două eforturi necunoscute. Se construiește poligonul forțelor pentru un astfel de nod, *figurând la scară forțele exterioare cunoscute* (direct aplicate și de legătură), care se desenează parcurgând nodul într-un anumit sens, de exemplu în sens orar. În acest caz este necesar ca șirul de forțe cunoscute să nu fie întrerupt de cele necunoscute. Astfel ultimele laturi ale poligonului forțelor corespund tocmai celor două eforturi în bare necunoscute.

Pentru determinarea lor, respectând același sens de parcurgere, se duc paralele la cele două bare prin primul și ultimul punct al poligonului forțelor cunoscute. Din intersecția celor două drepte, rezultă la scară eforturile căutate (ca mărime și sens).

Dacă eforturile ies din nod, ele sunt eforturi de întindere, în caz contrar de compresiune (și se desenează cu o linie dublă). Se procedează astfel cu fiecare nod, de la primul la până la ultimul (care poate servi ca ecuație de verificare).

Epura Cremona constă în alipirea acestor poligoane după laturile comune, construite separat pentru fiecare nod. În acest fel, deoarece s-a aplicat principiul acțiunii și al reacțiunii, pentru fiecare pereche de eforturi corespunzătoare unei bare, laturile care reprezintă eforturile din bare sunt parcurse în ambele sensuri. Laturile celorlalte forțe exterioare (date și de legătură) sunt parcurse o singură dată.

Adesea, la construcția epurei Cremona se folosește notația Bow. Planul în care se găsește grinda cu zăbrele este împărțit în domenii limitate de forțele exterioare și barele grinzii (eforturile din bare). Fiecărui domeniu i se atribuie o literă sau un număr. În acest fel, fiecare forță (interioară sau exterioară) este notată cu literele sau numerele domeniilor adiacente. De menționat că datorită dezvoltării tehnicilor de calcul, a calculatoarelor electronice, importanța metodelor grafice este mai mult de natură istorică și didactică.

6.5.5. Metoda matricială pentru calculul grinzilor cu zăbrele

Această metodă este o metodă modernă ce se pretează calculului numeric și utilizării unor programe de calculator, care permite, pe baza datelor de intrare corespunzătoare, rezolvarea oricărei probleme de acest tip.

De fapt metoda matricială pentru grinzi cu zăbrele este o transcriere sub formă matricială a ecuațiilor metodei izolării nodurilor:

$$[U]\{T\} + [R]\{P\} = 0 \quad (6.14)$$

unde: $[U]$ este matricea pătrată a cosinușilor directori ai barelor sistemului ;

$\{T\}$ - matricea coloană a necunoscutelor (eforturilor din bare)

$[R]$ - matricea a cosinușilor directori ai direcțiilor forțelor exterioare ;

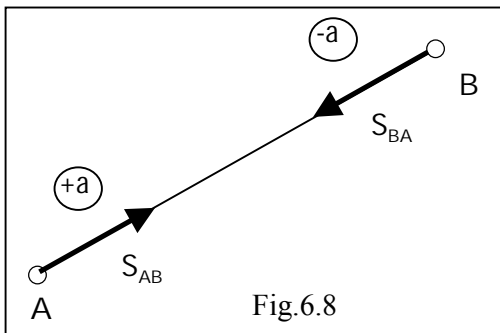
$\{P\}$ - matricea coloană a forțelor exterioare

Pentru determinarea eforturilor din barele sistemului, nu este necesar să se cunoască forțele de legătură cu mediul fix. Se alege un *sistem global de axe de*

coordonate, față de care se determină cosinuşii directori (elementele matricilor de mai sus). Pentru fiecare bară se alege un sens pozitiv (de exemplu $A \rightarrow B$) pentru care se determină cosinuşii directori conform relațiilor:

$$\begin{aligned} a = \cos \alpha &= \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \\ b = \cos \beta &= \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \\ c = \cos \gamma &= \frac{z_B - z_A}{\sqrt{(z_B - z_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Pentru efortul care iese din nodul A, în matricea $[U]$ se completează cosinusul director cu a , în timp ce pentru efortul corespunzător care iese din nodul B, în matricea $[U]$ se completează cosinusul director respectiv cu $-a$ (conform principiului acțiunii și reacțiunii) (fig. 6.8). Cosinuşii directori ai direcțiilor forțelor exterioare se determină direct dacă se cunosc unghiurile forțelor respective cu axele sistemului global de coordonate ales.



Matricile $[U]$ și $[R]$ au același număr de linii, egal cu numărul de necunoscute (eforturi din barele grinzii) și care corespund nodurilor și direcțiilor care nu conțin forțele de legătură cu exteriorul. Acestea se determină separat (dacă este cazul) aplicând teorema solidificării.

Rezolvarea ecuației matriciale (6.14) este sarcina calculatorului și se face după inversarea matricii $[U]$ și înmulțirea acestei ecuații, la stânga, cu matricea inversă, $[U]^{-1}$, obținându-se:

$$\{T\} = -[U]^{-1}[R]\{P\} \quad (6.16)$$

Aplicație

Se consideră grinda cu zăbrele din figura 6.9, legată de mediul fix printr-o articulație în punctul B și o rezemare simplă în A, iar în D și E fiind aplicate forțele exterioare $2F$, respectiv F .

Se cere să se determine:

- forțele de legătură din A și B (folosind teorema solidificării);
- eforturile din toate barele grinzii cu zăbrele (folosind metoda izolării nodurilor);
- eforturile numai din barele BC, BE și A (folosind metoda secțiunilor, Ritter)
- eforturile din toate barele grinzii cu zăbrele (folosind metoda matricială);

Rezolvare:

a) Aplicând **teorema solidificării** și scriind cele trei ecuații de echilibru pentru sistemul rigid din fig.6.9.

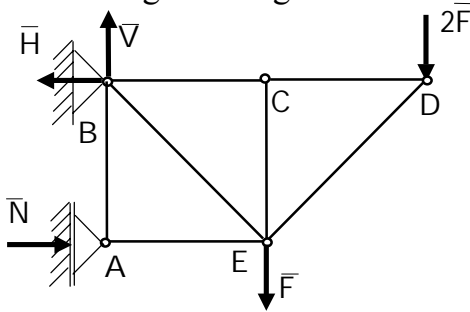


Fig. 6.9

$$\sum X_i = 0: \quad N - H = 0$$

$$\sum Y_i = 0: \quad V - 2F - F = 0$$

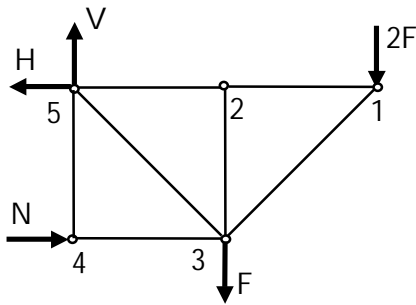
$$\sum M_B(\bar{F}_i) = 0: \quad N \cdot a - F \cdot a - 4F \cdot a = 0$$

de unde rezultă reacțiunile:

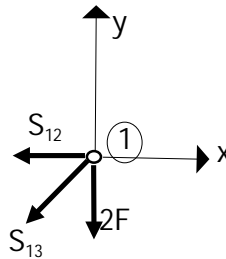
$$N = H = 5F,$$

$$V = 3F.$$

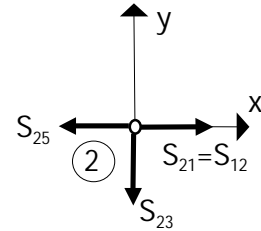
b) Pentru determinarea eforturilor din toate barele se aplică **metoda izolării nodurilor**. Se observă mai întâi, că problema este static determinată deoarece se respectă condiția: $b = 2n - 3$ (numărul nodurilor $n = 5$ și numărul barelor $b = 7$).



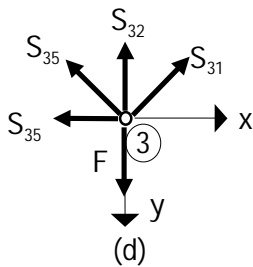
(a)



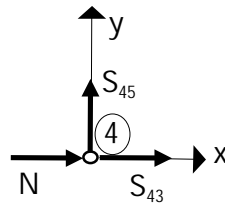
(b)



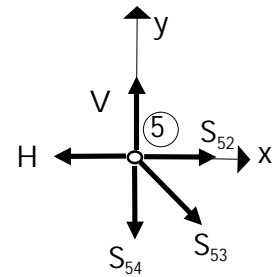
(c)



(d)



(e)



(f)

Fig. 6.10

Vom folosi reacțiunile determinate anterior și vom nota nodurile cu cifre (fig.6.10), începând rezolvarea cu nodul 1 în ordinea indicată în figură și terminând cu nodul 5. Scriind cele două ecuații de proiecții pe axe ($\sum X_i = 0, \sum Y_i = 0$) pentru fiecare nod avem respectiv:

Pentru nodul 1 (fig.6.10.b):

$$-S_{12} - S_{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad -2F - S_{13} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Rezultă: $S_{13} = -2\sqrt{2}F$ (compresiune); $S_{12} = 2F$ (întindere)

Pentru nodul 2 (fig.6.10.c):

$$S_{23} = 0, \quad S_{25} + S_{21} = 0 \text{ sau } -S_{25} + 2F = 0, \quad S_{23} = 0$$

Rezultă: $S_{23} = 0, \quad S_{25} = 2F$ (întindere)

Pentru nodul 3 (fig.6.10.d):

$$-S_{35} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S_{31} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - S_{34} = 0; \quad S_{35} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{32} + S_{31} \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0$$

Înlocuind eforturile determinate anterior, rezultă:

$$S_{35} = 3\sqrt{2}F \text{ (întindere)}; \quad S_{34} = -5F \text{ (compresiune)}$$

Pentru nodul 4 (fig.6.10.e):

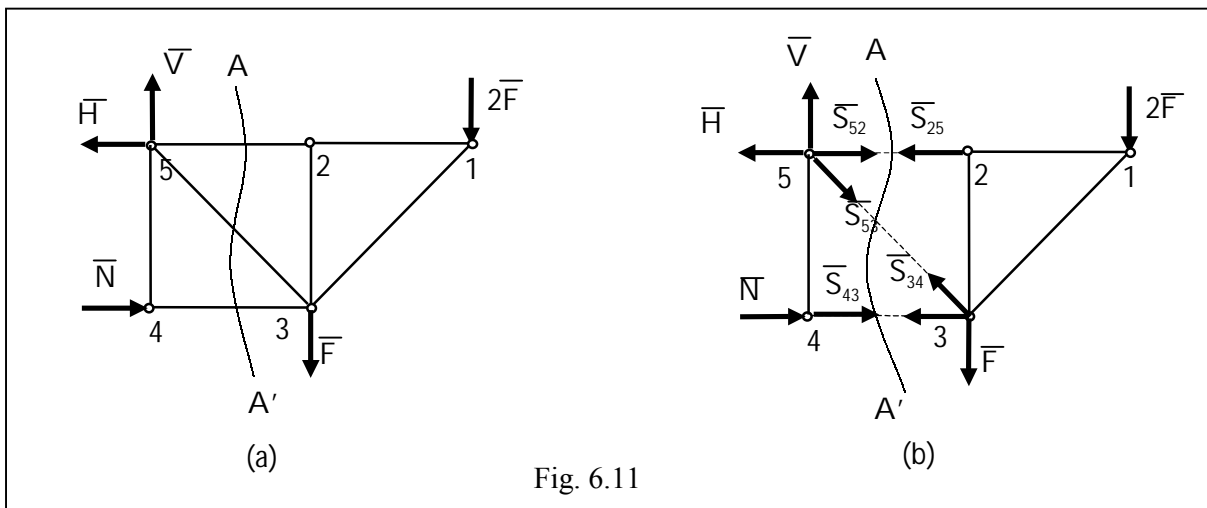
$$5F + S_{43} = 0; \quad 5F - 5F = 0 \text{ (verificare)}$$

Pentru nodul 5 (fig.6.10.f):

Întrucât au fost determinate toate eforturile, se obțin două relații de verificare:

$$-5F + 2F + 3\sqrt{2}F \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; \quad 3F + 0 - 3\sqrt{2}F \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

c) Pentru determinarea eforturilor S_{25} , S_{35} , S_{34} prin **metoda secțiunilor**, se taie barele menționate (fig.6.11.a) și se introduc în secțiunile respective eforturi ca în fig. 6.11.b.



Se studiază echilibrul părții din stânga, scriindu-se ecuațiile după cum urmează:

- pentru determinarea efortului $S_{52}=S_{25}$ se scrie ecuația de momente a forțelor corpului din stânga (sau din dreapta) față de nodul 3 în care se întâlnesc eforturile S_{53} și S_{43} :

$$\sum M_3(\bar{F}_i) = 0: \quad 5F \cdot a - 3F \cdot a - S_{52} \cdot a = 0$$

de unde rezultă: $S_{52} = 2F$ (întindere).

În mod analog, pentru determinarea efortului $S_{43}=S_{34}$ se scrie ecuația de momente față de nodul 5 în care se întâlnesc eforturile S_{53} și S_{52} :

$$\sum M_5 \bar{F}_i = 0 : 5F \cdot a + S_{43} \cdot a = 0,$$

de unde rezultă: $S_{43} = -5F$ (compresiune).

Pentru calculul lui S_{53} se scrie ecuația de proiecții pe direcție verticală (Oy) care este perpendiculară pe barele 3-4 și 5-2:

$$\sum Y_i = 0 : 3F - S_{53} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

de unde rezultă: $S_{53} = 3\sqrt{2}F$ (întindere).

Se observă că rezultatele obținute prin cele două metode (a secțiunilor și a izolării nodurilor) sunt identice.

e) Metoda matricială pentru calculul eforturilor din grindă

Se alege sistemul de coordonate cu originea în punctul A și axa Ox să coincidă cu bara 4-3, ca în fig. 6.12.

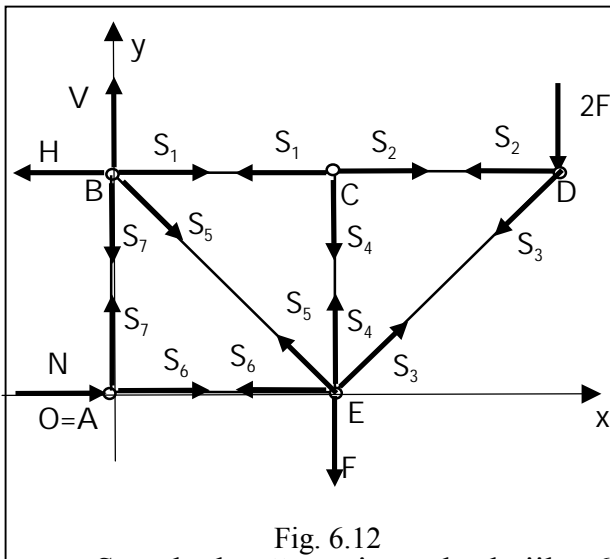


Fig. 6.12

Se aleg sensurile de parcurgere ale barelor sistemului (de regulă de la nodul având numărul mai mic spre cel având numărul mai mare). Se notează eforturile din bare cu S_1, S_2, \dots, S_7 , ca în figură, toate alegându-se pozitive (ies din noduri).

Dacă sensul efortului dintr-un nod coincide cu sensul ales de parcurgere al barei, atunci cosinusul director se ia cu semnul plus, iar în caz contrar cu minus.

Se calculează cu ajutorul relațiilor 6.15 cosinuzii directori ai acestor direcții și se trec în tabelul următor (cu O s-a notat originea și cu V vârful barei orientate):

Bara	Efortul	punctul O		punctul V		lungimea barei	a	b
		x_O	y_O	x_V	y_V			
C-B	S_1	a	a	0	a	a	-1	0
D-C	S_2	$2a$	a	a	a	a	-1	0
D-E	S_3	$2a$	a	a	0	$\sqrt{2}a$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
C-E	S_4	a	a	a	0	a	0	-1
E-B	S_5	a	0	0	a	$\sqrt{2}a$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
E-A	S_6	a	0	0	0	a	-1	0
A-B	S_7	0	0	0	a	a	0	1

Cosinuzii directori ai direcțiilor forțelor exterioare sunt :

- pentru forța $F_1=2F$ (din punctul D): $a=0$, $b=-l$
- pentru forța $F_2=F$ (din punctul E): $a=0$, $b=-l$

Cu ajutorul acestor valori se construiesc matricile:

$$[U] = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_y \\ C_x \\ C_y \\ D_x \\ D_y \\ E_x \\ E_y \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad [R] = \begin{matrix} & \begin{matrix} F_1 & F_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_y \\ C_x \\ C_y \\ D_x \\ D_y \\ E_x \\ E_y \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ecuția matricială (6.14) se scrie:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rezolvând această ecuație matricială se obțin aceleași valori pentru eforturile din barele corespunzătoare ale sistemului cu cele obținute prin metodele clasice de mai sus:

$$S_1=2F; \quad S_2=2F; \quad S_3=-2\sqrt{2}F; \quad S_4=0; \quad S_5=3\sqrt{2}F; \quad S_6=-5F; \quad S_7=0.$$

6.6. Scripetele. Sisteme de scripeți.

Scripetele este un sistem tehnic alcătuit dintr-un disc (circular) prevăzut la periferie cu un șanț, peste care se înfășoară un cablu (sau lanț). Axul scripetelui este fixat într-o furcă prevăzută cu un cârlig. Dacă axul este fix, spunem că *scripetele este fix*, iar dacă axul este mobil, *scripete mobil*.

6.6.1. Scripetele fix

Pe periferia discului de rază R , pe șanțul de ghidaj se înfășoară un cablu la ale cărui capete acționează forța rezistentă Q (greutatea de ridicat) și forța motoare P (forța aplicată pentru ridicarea lui Q) (fig.6.13.a). Se cere să se determine forța motoare P .

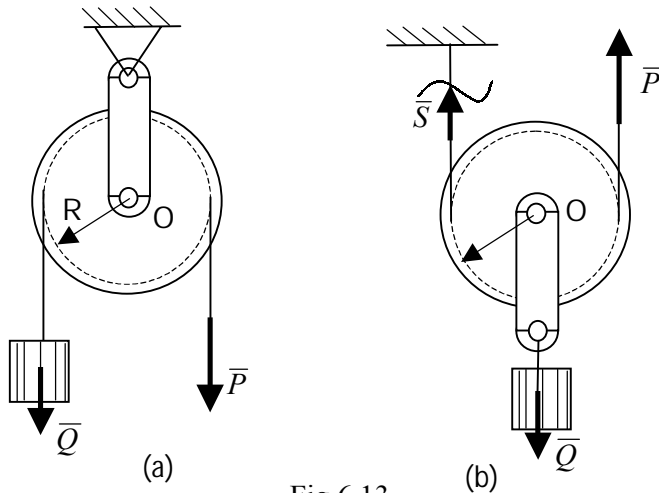


Fig.6.13

Scriind ecuația de momente față de axul scripetelui, neglijând frecările și rigiditatea firului, avem: $-P \cdot R + Q \cdot R = 0$

$$\text{și rezultă: } P = Q \quad (6.17)$$

Acest scripete are dezavantajul că forța motoare P trebuie să fie cel puțin egală cu forța rezistentă Q . Cu ajutorul scripetelui fix se schimbă doar sensul efortului depus pentru ridicarea greutății, ceea ce în unele cazuri poate prezenta un mare avantaj.

6.6.2. Scripetele mobil

Pe axul discului de rază R acționează forța rezistentă Q , iar pe șanțul de ghidaj se înfășoară un cablu care are un capăt fixat iar la celălalt acționează forța motoare P (forța utilă pentru ridicarea greutății Q , forța rezistentă) (fig.6.13.b).

În acest caz, din ecuația de momente în raport cu axa scripetelui :

$$P \cdot R - S \cdot R = 0 \quad \text{conduce la } S = P,$$

iar ecuația de proiecție pe verticală: $S + P + Q = 0$ conduce la :

$$P = 0,5 Q \quad (6.18)$$

Scripetele mobil permite deci ridicarea unei greutăți date Q , folosind o forță motoare P de două ori mai mică.

6.6.3. Rigiditatea firelor de scripeți

În unele aplicații tehnice ale scripetilor se renunță la ipoteza de flexibilitate perfectă a firului, luându-se în considerare și rigiditatea lor.

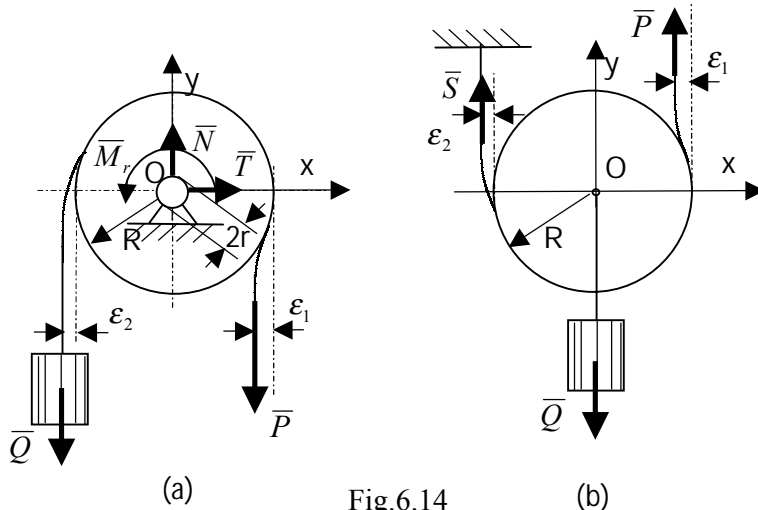


Fig.6.14

Să considerăm pentru început un scripete fix peste care este petrecut un fir (fig.6.14.a). Din cauza rigidității firului, acesta nu poate trece brusc de la forma dreaptă la cea curbă atunci când se înfășoară sau invers, de la forma curbă la forma dreaptă, atunci când se desfășoară de pe scripete, fără a opune o anumită rezistență,

așa cum se observă în figura 6.14, suportul forței rezistente Q se depărtează de axa scripetelui, iar suportul forței P se apropie de axa scripetelui.

Ecuția de momente față de O (dacă se neglijează frecarea în lagăr) se scrie:

$$Q(R + \varepsilon_2) - P(R - \varepsilon_1) = 0 \quad \text{adică:} \quad P = \frac{R + \varepsilon_2}{R - \varepsilon_1} Q \quad (6.19)$$

ceea ce înseamnă că în cazul scripetelui fix, din cauza rigidității firului este necesară o forță motoare P mai mare decât cea rezistentă Q

Dacă se ține seama și de frecările existente în lagăr, caracterizate de forța de frecare de alunecare \bar{T} și de momentul de frecare de rostogolire \bar{M}_r , care pot fi înlocuite prin *cuplul de frecare din articulație* \bar{M}_f (la limită acesta are valoarea $M_f = \mu'Nr$, unde μ' este coeficientul de frecare în lagăr, r - raza fusului și N reacțiunea din lagăr), atunci ecuația de momente se scrie:

$$Q(R + \varepsilon_2) - P(R - \varepsilon_1) + \mu'Nr = 0, \quad (6.20)$$

iar din ecuația de proiecții pe verticală : $N - Q - P = 0$ din care se obține:

$$N = Q + P$$

rezultă:
$$P = \frac{R + \varepsilon_2 + \mu'r}{R - \varepsilon_1 - \mu'r} Q \quad (6.21)$$

Notând cu:
$$h = \frac{R + \varepsilon_2 + \mu'r}{R - \varepsilon_1 - \mu'r}$$

coeficientul de rigiditate și frecare al scripetelui (evident $h > 1$), relația (6.21) devine:

$$P = h \cdot Q \quad (6.22)$$

Din relația (6.22) rezultă că $P > Q$, iar pentru cazul particular al firului perfect flexibil și neglijând frecarea din articulație rezultă $h = 1$, adică relația (6.17) :

$$P = Q. \quad (6.22')$$

Formule analoage se deduc și pentru cazul scripetelui mobil (fig.6.14.b); considerând numai ipoteza rigidității firului, ecuațiile de proiecții a forțelor pe direcție verticală (Oy) și de momente față de punctul O, se scriu:

$$S + P - Q = 0; \quad S(R + \varepsilon_2) - P(R - \varepsilon_1) = 0 \quad (6.23)$$

de unde rezultă:

$$S = Q - P; \quad P = \frac{R + \varepsilon_2}{R - \varepsilon_1} S$$

notând cu: $h = (R + \varepsilon_2) / (R - \varepsilon_1)$, *coeficientul de rigiditate al firului*,

rezultă:
$$P = Q h / (h + 1) \quad (6.24)$$

Este evident faptul că în acest caz rezultă $P < Q$, iar dacă firul este perfect flexibil și se neglijează frecarea din articulație ($h = 1$) rezultă $P = 0,5 Q$.

6.6.4. Sistemul de scripeți macara – geamblac (palanul simplu)

Sistemul de scripeți *macara-geamblac* (fig.6.15) și *palanul simplu* (fig.6.16), sunt două sisteme asemănătoare, ele conducând la aceeași relație între forța motoare P și forța rezistentă Q .

Sistemul de scripeți *macara-geamblac* este frecvent utilizat în instalațiile de foraj, el stând la baza realizării dispozitivelor mecanice amplificatoare cu un raport mare între forța rezistentă Q (care reprezintă de exemplu greutatea garniturii de prăjini) și forța motoare P (care este forța de tracțiune a trolului). Acest sistem este alcătuit din două *muflă* (grupe de scripeți) : o *muflă fixă* (geamblacul) formată din $(n+1)$ scripeți ficși (dintre care un scripete mort) și o *muflă mobilă* formată din (n) scripeți mobili (fig.6.15).

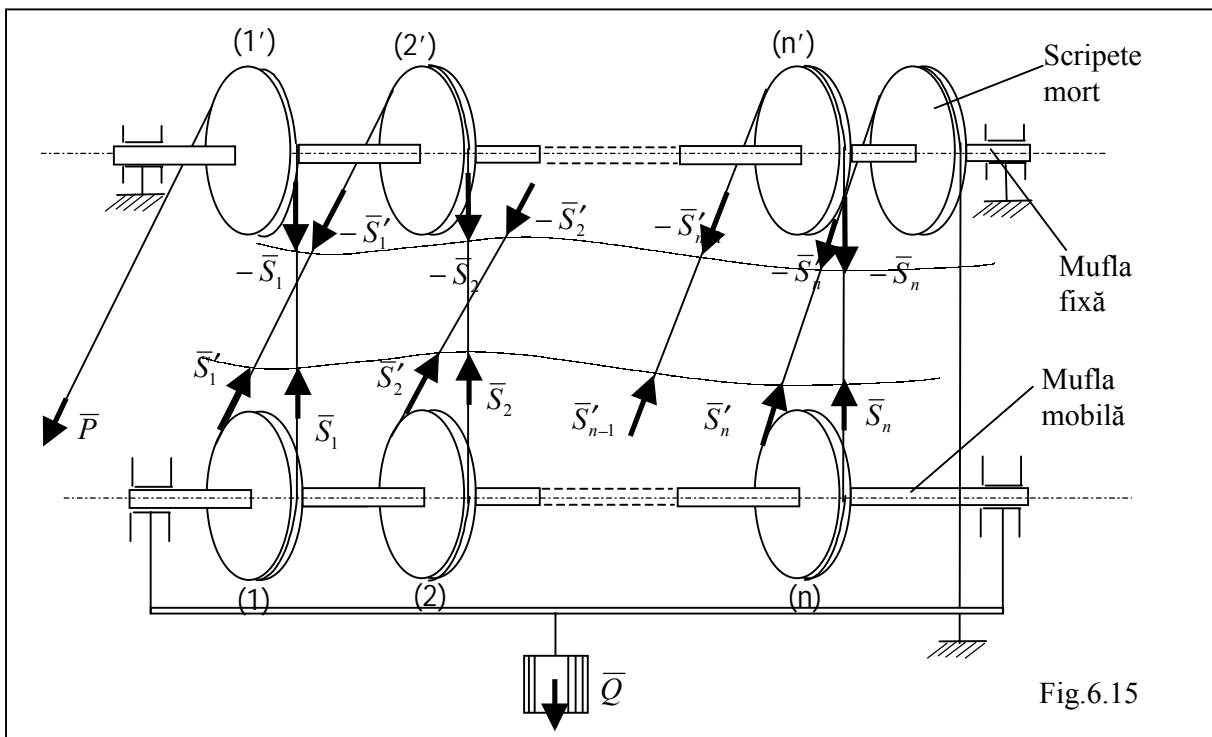


Fig.6.15

Aplicând relația (6.22) pentru fiecare scripete se obțin respectiv relațiile:

$$\begin{aligned}
 (1') P &= h S_1 \quad \text{sau} \quad S_1 = \frac{P}{h} \\
 (1) S_1 &= h S'_1 \quad \text{sau} \quad S'_1 = \frac{S_1}{h} = \frac{P}{h^2} \\
 (2') S'_1 &= h S_2 \quad \text{sau} \quad S_2 = \frac{S'_1}{n} = \frac{P}{h^3} \\
 (2) S_2 &= h S'_2 \quad \text{sau} \quad S'_2 = \frac{S_2}{h} = \frac{P}{h^4}
 \end{aligned}
 \tag{6.26}$$

$$(n') S'_{n-1} = h S_n \text{ sau } S_n = \frac{S'_{n-1}}{h} = \frac{P}{h^{2n-1}}$$

$$(n) S_n = h S'_n \text{ sau } S'_n = \frac{S_n}{h} = \frac{P}{h^{2n}}$$

Introducând relațiile (6.26) în (6.25) se obține:

$$Q = \frac{P}{h} \left(1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} + \dots + \frac{1}{h^{2n-1}} \right) \quad (6.27)$$

unde paranteza este suma unei progresii geometrice cu rația $1/h$ ($h > 1$):

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} + \dots + \frac{1}{h^{2n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{h^{2n}}}{1 - \frac{1}{h}} = \frac{h^{2n} - 1}{(h-1)h^{2n-1}}$$

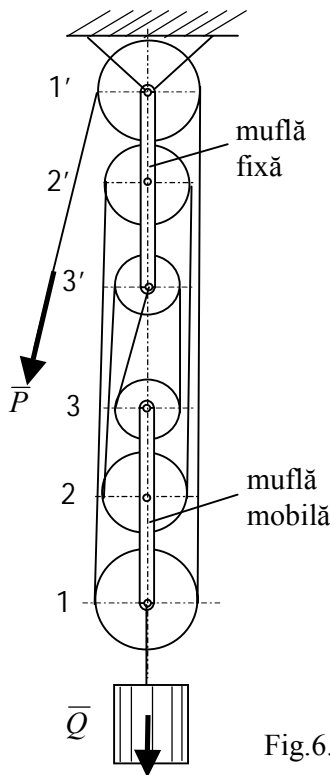


Fig.6.16

$$\text{deci: } Q = P \frac{h^{2n} - 1}{h^{2n}(h-1)} \quad (6.28)$$

sau, forța motoare P funcție de Q este :

$$P = Q \frac{h^{2n}(h-1)}{h^{2n} - 1} \quad (6.29)$$

Dacă se neglijează frecările și rigiditatea firelor (se face h să tindă la 1) și aplicând teorema lui l' Hospital se obține expresia forței motoare P în funcție de forța rezistentă și de numărul scripetilor mobili n :

$$P = Q / 2n \quad (6.29')$$

Palanul simplu (fig. 6.16) se deosebește de sistemul macara-geamblac prin aceea că nu mai are scripetele mort, iar capătul cablului este legat de mufla fixă și nu de pământ. Relația dintre forța motoare P și cea

rezistentă Q are aceeași formă: $P = Q \frac{h^{2n}(h-1)}{h^{2n} - 1}$.

6.6.5. Palanul exponențial

Acest sistem de scripeti este alcătuit dintr-un scripete fix și n scripeti mobili legați prin n cabluri ca în fig.6.17.

Dacă se izolează fiecare scripete mobil (prin secționarea firelor) se scriu relațiile de echilibru:

- pentru scripetii mobili, folosind relația (6.24):

$$\begin{aligned}
 (1): \quad S_1 &= \frac{h}{h+1} Q \\
 (2): \quad S_2 &= \frac{h}{h+1} S_1 = \left(\frac{h}{h+1} \right)^2 Q \\
 &\dots\dots\dots \\
 (n-1): \quad S_{n-1} &= \frac{h}{h+1} S_{n-2} = \left(\frac{h}{h+1} \right)^{n-1} Q \\
 (n): \quad S_n &= \frac{h}{h+1} S_{n-1} = \left(\frac{h}{h+1} \right)^n Q
 \end{aligned}
 \tag{6.30}$$

- pentru scripetele fix, folosind relația (6.22):

$$P = h \cdot S_n$$

Înlocuind în ultima relație pe S_n obținut prin relațiile (6.30) se obține:

$$P = \frac{h^{n+1}}{(h+1)^n} Q \tag{6.31}$$

Dacă se neglijează frecările și rigiditatea firelor (se face h să tindă spre 1) se obține expresia forței motoare P în funcție de forța rezistentă Q și de numărul scripetilor mobili n : $P = Q/2^n$ (6.31')

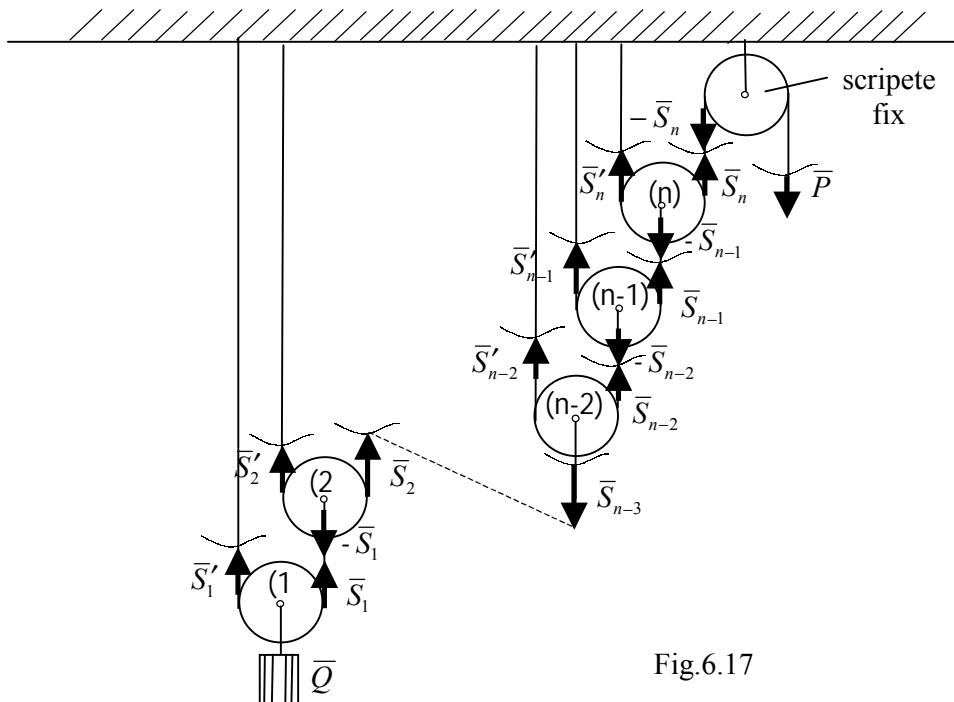


Fig.6.17

6.6.6. Scripetele diferențial

Acest sistem de scripete se mai numește și *macara diferențială*, și este compus dintr-un troliu și un scripete mobil având raza $O_1A = (R+r)/2$, peste care este trecut un cablu (lanț) continuu (fig.6.18). Neglijând frecările și rigiditatea firului și izolând scripetele mobil (prin secționarea firelor) se scrie pentru acest caz, următoarea relație de echilibru:

$$S = 0,5 Q$$

și următoarea relație de momente față de O_2 :

$$P \cdot R + S \cdot r - S \cdot R = 0$$

unde înlocuind valoarea lui S se obține:

$$P = \frac{R-r}{2R} Q \quad (6.32)$$

Prin alegerea convenabilă a razelor troliului R și r (făcând diferența $R - r$ suficient de mică) este posibil a se învinge forțe rezistente Q foarte mari, folosind forțe motoare P relativ mici.

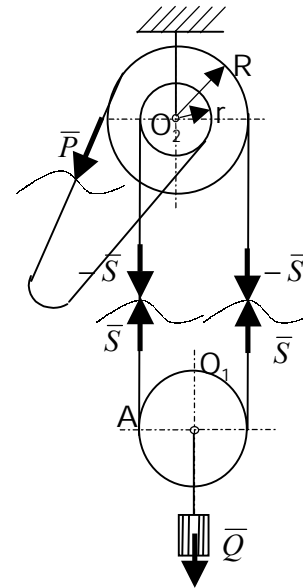


Fig.6.18

6.7. Statica firului

6.7.1. Generalități

Conceptul de fir presupune următoarele ipoteze:

- are o dimensiune (lungimea) mult mai mare decât celelalte două ;
- este *inextensibil, flexibil* (poate lua orice formă fără a opune rezistență);
- *poate fi întins, este torsionabil și nu poate prelua sarcini de compresie sau încovoiere;*

Exemple de fire: cabluri, lanțuri, curele de transmisie, conductoare electrice, etc.

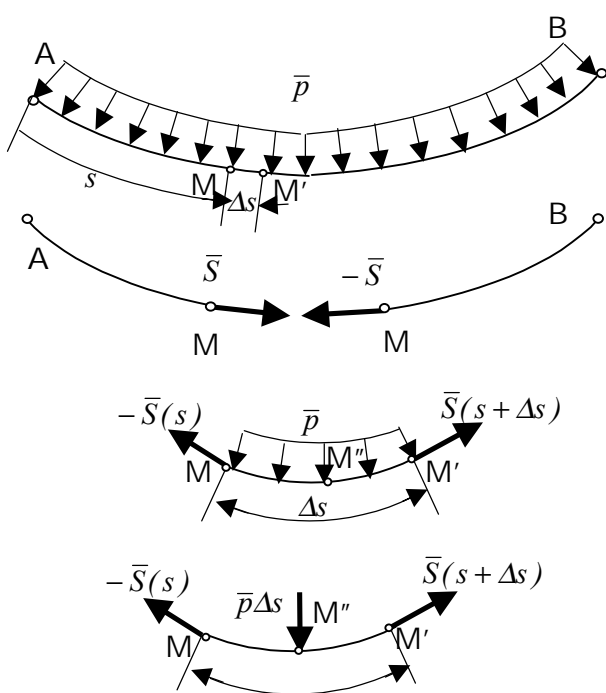
Principalele probleme ale staticii firelor sunt:

1. *stabilirea formei de echilibru a acestora sub acțiunea unor sarcini exterioare;*
2. *determinarea eforturilor interioare dintr-o secțiune oarecare a firului, sub acțiunea unor sarcini exterioare.*

În ipotezele de *flexibilitate și torsionabilitate* a firului, se poate afirma că în orice secțiune a firului, torsorul de reducere este rezultatul unor sarcini exterioare uniform distribuite sau concentrate (care acționează separat sau simultan asupra firului).

6.7.2. Ecuațiile generale de echilibru ale firelor

Se consideră o porțiune de fir AB sollicitată de o forță distribuită de intensitate p (această forță distribuită liniar poate fi de exemplu: greutatea specifică a firului material, a zăpezii sau chiciurei de pe conductoarele electrice) (fig.6.19).



În general, \bar{p} este funcție de coordonata curbilinie s , adică:

$$\bar{p} = \bar{p}(s).$$

Dacă se face o secțiune imaginară în punctul M al firului, atunci pentru a restabili echilibrul firului, se introduc forțele interioare: \bar{S} care acționează în secțiunea din stânga și $-\bar{S}$ care acționează în secțiunea din dreapta (numite și tensiuni din fir) (fig. 6.19).

Se studiază în continuare echilibrul unui arc de lungime elementară $\Delta s = \widehat{MM'}$ la ale cărei extremități M și M' acționează respectiv forțele de legătură (tensiunile din fir, fig. 6.19):

$$-\bar{S}(s) \text{ și } \bar{S}(s + \Delta s).$$

Fig.6.19

Rezultanta forțelor exterioare care acționează pe arcul elementar $\bar{p} \cdot \Delta s$, acționează la mijlocul distanței între M și M', iar ecuațiile de echilibru se scriu:

$$\left. \begin{aligned} (\sum \bar{F}_i = 0): & \quad -\bar{S}(s) + \bar{S}(s + \Delta s) + \bar{p} \Delta s = 0 \\ (\sum \overline{M}_{M'}(\bar{F}_i) = 0): & \quad -\overline{MM'} \times \bar{S}(s) + \overline{M'M''} \times \bar{p} \cdot \Delta s = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

Împărțind ecuațiile (6.33) cu Δs și făcând la limită $\Delta s \rightarrow 0$, avem respectiv:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{S}(s + \Delta s) - \bar{S}(s)}{\Delta s} + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{p} \Delta s}{\Delta s} &= 0 \\ -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\overline{MM'}}{\Delta s} \times \bar{S}(s) \right] + \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\overline{M'M''} \times \frac{\bar{p} \cdot \Delta s}{\Delta s} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.33')$$

$$\text{Avem: } \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta s} = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\overline{MM'}}{|\overline{MM'}|} \cdot \frac{|\overline{MM'}|}{\Delta s} = \lim_{M' \rightarrow M} (\text{vers } \overline{MM'}) \cdot 1 = -\bar{\tau} \cdot 1 = -\bar{\tau},$$

întrucât vectorul $\frac{\overline{MM'}}{\Delta s}$ la limită când $\Delta s \rightarrow 0$, tinde către un vector unitate tangent la curbă, adică versorul $\bar{\tau}$ al tangentei la curbă în punctul M.

$$\text{Întrucât } \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\overline{M'M''} \times \frac{\bar{p} \cdot \Delta s}{\Delta s} \right] = 0, \text{ sistemul de ecuații vectoriale (6.33')} \text{ devine:}$$

$$\frac{d\bar{S}}{ds} + \bar{p} = 0 ; \quad \bar{\tau} \times \bar{S} = 0 \quad (6.34)$$

Întrucât, în general $\bar{S} \neq 0$, din a doua relație (6.34) se deduce că tensiunea \bar{S} și versorul $\bar{\tau}$ sunt coliniare, sau \bar{S} este tangentă la fir, adică a doua relație (6.34) este echivalentă cu : $\bar{S} = S\bar{\tau}$ (6.35)

unde cu $S = S(s)$ s-a notat scalarul tensiunii \bar{S} , care este totdeauna pozitiv, firele nefiind supuse la compresiune.

Cu ajutorul primei ecuații (6.34) și a ecuației (6.35) se rezolvă orice problemă a firelor.

6.7.3. Ecuațiile de echilibru ale firelor în coordonate carteziane

Se consideră un fir având forma curbei \widehat{AB} raportată la sistemul de axe carteziane $Oxyz$ (fig.6.20). Se pot scrie expresiile analitice ale vectorilor \bar{r} , $\bar{\tau}$, \bar{S} astfel:

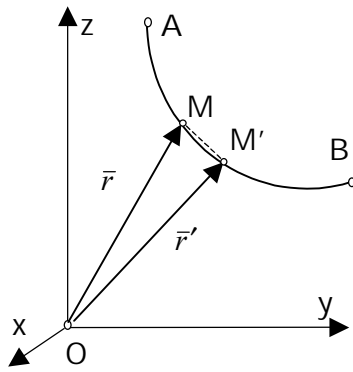


Fig. 6.20

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = x(s)\bar{i} + y(s)\bar{j} + z(s)\bar{k} \quad (6.36)$$

$$\bar{\tau} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\bar{i} + \frac{dy}{ds}\bar{j} + \frac{dz}{ds}\bar{k} \quad (6.37)$$

$$\bar{S} = S_x\bar{i} + S_y\bar{j} + S_z\bar{k} \quad (6.38)$$

unde: $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos \beta$, $\frac{dz}{ds} = \cos \gamma$ sunt cosinusurile directoare ale tangentei $\bar{\tau}$ la curbă (fir) în raport cu sistemul de referință ales.

Ecuația vectorială (6.35) se scrie în proiecție pe axele de coordonate astfel:

$$S_x = S \frac{dx}{ds}, \quad S_y = S \frac{dy}{ds}, \quad S_z = S \frac{dz}{ds} \quad (6.39)$$

iar ecuația vectorială (6.34), ținând seama de relația (6.35), capătă forma vectorială:

$$\frac{d}{ds}(S\bar{\tau}) + \bar{p} = 0 \quad (6.40)$$

care proiectată pe axele de coordonate carteziane se scrie:

$$\frac{d}{ds}\left(S \frac{dx}{ds}\right) + p_x = 0; \quad \frac{d}{ds}\left(S \frac{dy}{ds}\right) + p_y = 0; \quad \frac{d}{ds}\left(S \frac{dz}{ds}\right) + p_z = 0 \quad (6.41)$$

Acesta este un sistem de trei ecuații diferențiale cu patru funcții necunoscute $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ și $S = S(s)$ definind forma de echilibru a firului și respectiv tensiunea din fir.

Întrucât între cosinusurile directoare există relația cunoscută:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \quad (6.42)$$

această ecuație împreună cu sistemul (6.41), formează un sistem de patru ecuații diferențiale cu patru funcții necunoscute. Prin integrarea acestui sistem, apar constantele de integrare care se determină din condițiile la limită (adică coordonatele extremităților A și B ale firului, lungimea firului, sau tensiunile la extremitățile A și B).

6.7.4. Ecuațiile de echilibru ale firului în coordonate naturale

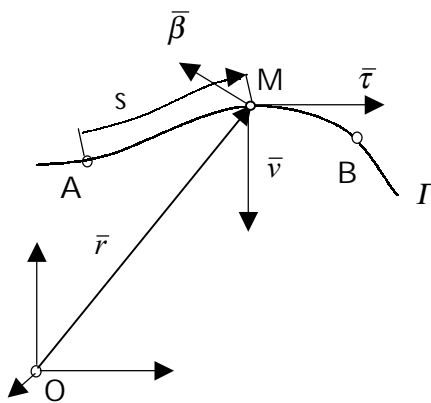


Fig. 6.21

Versorii celor trei axe ortogonale ale sistemului de coordonate naturale (Frenet) care se consideră în acest caz (fig.6.21) sunt:

- *versorul tangentei* $\bar{\tau}$, considerat pozitiv în sensul de creștere al arcului $s = AM$;
- *versorul normalei principale* $\bar{\nu}$, considerat pozitiv dacă este orientat spre centrul de curbură;
- *versorul binormalei* $\bar{\beta}$ are sensul pozitiv astfel încât sistemul de versori în ordinea $(\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta})$ cu originea în M să formeze un *triedru ortogonal drept*, adică: $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$

Ecuația vectorială de echilibru (6.40) se mai scrie:

$$\frac{dS}{ds} \bar{\tau} + S \frac{d\bar{\tau}}{ds} + \bar{p} = 0 \quad (6.43)$$

Ținând seama de *prima formulă a lui Frenet* :

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{\nu}, \quad (6.43')$$

în care ρ este raza de curbură în punctul M a curbei Γ , și proiectând forța distribuită \bar{p} după direcțiile triedrului Frenet ecuația (6.43) se poate scrie:

$$\frac{dS}{ds} \bar{\tau} + S \frac{1}{\rho} \bar{\nu} + p_{\tau} \bar{\tau} + p_{\nu} \bar{\nu} + p_{\beta} \bar{\beta} = 0 \quad (6.44)$$

ecuație vectorială care după cele trei axe Frenet, este echivalentă cu trei ecuații

scalare:
$$\frac{dS}{ds} + p_{\tau} = 0, \quad S \cdot \frac{1}{\rho} + p_{\nu} = 0, \quad p_{\beta} = 0 \quad (6.45)$$

Acestea reprezintă *ecuațiile diferențiale generale de echilibru ale firului în sistemul de coordonate Frenet*. Se observă că sarcina distribuită \bar{p} se află în planul osculator al curbei, determinat de versorii $(\bar{\tau}, \bar{\nu})$.

Cazuri particulare

a) Dacă forța distribuită este nulă ($\bar{p} = 0$, sau $p_\tau = p_\gamma = p_\beta = 0$) atunci sistemul

$$(6.45) \text{ devine: } \frac{dS}{ds} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{S}{\rho} = 0. \quad (6.46)$$

Presupunând că $S \neq 0$, aceste ecuații conduc la relațiile:

$$S = \text{constant}; \quad \rho \rightarrow \infty \quad (6.47)$$

adică tensiunea este constantă, iar forma de echilibru a curbei (firului) este o linie dreaptă, ceea ce corespunde cazului de la legăturile cu fire ale punctelor materiale sau rigidelor.

b) Dacă $\bar{p} \neq 0$ și frecarea este nulă ($p_\tau = 0$) atunci sistemul (6.45) devine:

$$\frac{dS}{ds} = 0 \Rightarrow S = \text{const.} \quad (6.48)$$

deci tensiunea din fir este constantă atunci când nu există frecare între fir și corpurile în contact (de exemplu tensiunile din cele două ramuri ale firului, din cazul scripetelui).

c) Dacă $\bar{p} \neq 0$ și frecarea nu este nulă ($p_\tau \neq 0$) atunci cu $p_\tau = -\mu N$; $p_\nu = -N$

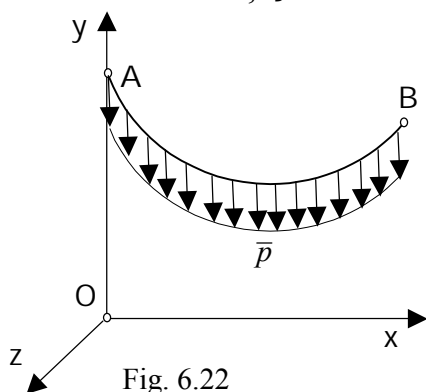
și sistemul (6.45) devine:

$$\frac{dS}{ds} - \mu N = 0; \quad \frac{S}{\rho} - N = 0 \quad (6.49)$$

adică se obțin tocmai ecuațiile diferențiale (2.28) de la frecarea firelor.

6.7.5. Ecuațiile de echilibru ale firului omogen greu.

Lănțișorul.



Se consideră firul suspendat în punctele A și B, acționat exclusiv de greutatea proprie, tensiunea \bar{p} , uniform distribuită pe unitatea de lungime.

Se alege sistemul de axe Oxyz astfel încât planul Oxy să fie vertical (fig.6.22) și deci :

$$p_x = 0, \quad p_y = -p, \quad p_z = 0$$

iar ecuațiile de echilibru (6.41) devin:

$$\frac{d}{ds} \left(S \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(S \frac{dy}{ds} \right) - p = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(S \frac{dz}{ds} \right) = 0 \quad (6.49')$$

Integrând prima ecuație avem:

$$S \frac{dx}{ds} = H (= \text{constant}); \quad \text{sau} : S = H \frac{ds}{dx} \quad (6.50)$$

unde S este componenta orizontală a tensiunii.

Introducând (6.50) în ecuația a treia din (6.41') se obține:

$$\frac{d}{ds} \left(H \frac{dz}{dx} \right) = 0, \text{ sau } H \frac{d}{ds} \left(\frac{dz}{dx} \right) = 0$$

Intergrând de două ori această ultimă ecuație se obține:

$$\frac{dz}{dx} = C_1 \quad \text{și} \quad z = C_1 x + C_2$$

Punând condițiile la limită în A: $x=0, z=0$ și în B: $x=L$ (*arbitrar*), $z=0$ se obține $C_1=C_2=0$, adică $z=0$, ceea ce arată că firul se află în planul vertical Oxy.

În continuare se studiază *firul omogen greu* în planul Oxy, urmărindu-se găsirea ecuației curbei specifice numită *lănțișor*. Introducând (6.50) în ecuația a doua din (6.41) se obține:

$$\frac{d}{ds} \left(H \frac{dy}{dx} \right) = p, \text{ sau } \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{p}{H} \quad (6.51)$$

Notând $\frac{dy}{dx} = y'$ ecuația (6.51) devine: $\frac{dy'}{ds} = \frac{p}{H}$ (6.51')

unde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$.

Prin urmare ecuația (6.51') devine:

$$\frac{dy'}{dx \sqrt{1 + y'^2}} = \frac{p}{H}, \text{ sau: } \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{p}{H} \quad (6.52)$$

Făcând notația $y' = shu$ (6.53)

se obține: $y'' = u' \cdot chu$

unde shu și chu sunt funcțiile hiperbolice cunoscute:

$$shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

iar ecuația (6.52) devine: $u' = \frac{p}{H}$ (6.54)

Integrând această ecuație diferențială avem:

$$u = \frac{p}{H} x + C_1; \quad y' = sh \left(\frac{p}{H} x + C_1 \right) \quad (6.55)$$

Integrând din nou această ultimă ecuație avem:

$$y = \frac{H}{p} ch \left(\frac{p}{H} x + C_1 \right) + C_2 \quad (6.56)$$

Notând $H/p = a$, mărime ce are dimensiunea unei lungimi, rezultă ecuația unei curbe specifice, care se numește *lănțișor* și care reprezintă forma de echilibru a unui fir omogen greu:

$$y = a \cdot ch\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2 \quad (6.57)$$

Raportând curba la un sistem particular de axe (fig. 6.23), axa Oy fiind considerată ca axă de simetrie, curba având vârful în $y=a$, și punând condițiile la limită în punctul M_0 :

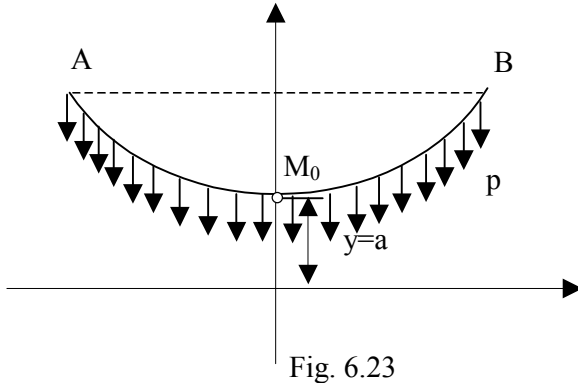


Fig. 6.23

$$\begin{aligned} x=0; \quad y &= a \\ y' &= \frac{dy}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (6.58)$$

se obține $C_1=C_2=0$, iar relația (6.57) devine:

$$y = a \cdot ch \frac{x}{a} \quad (6.59)$$

care este ecuația lanțisorului de parametru a .

Pentru a determina tensiunea din fir S se folosește relația (6.50):

$S = H \frac{ds}{dx}$, în care se înlocuiește: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ și $y' = sh \frac{x}{a}$, obținându-se:

$$S = H \frac{ds}{dx} = H \sqrt{1 + y'^2} = H \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{a}} = H \cdot ch \frac{x}{a}$$

$$\text{Notând: } S = \frac{H}{a} \cdot a \cdot ch \frac{x}{a} \text{ rezulta: } S = py \quad (6.60)$$

Lungimea unui arc de lanțisor măsurată de la vârful M_0 la un punct oarecare M de abscisă x este:

$$s = \int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^x ch \frac{x}{a} dx$$

$$\text{adică: } s = a \cdot sh \frac{x}{a} \quad (6.61)$$

Lungimea totală a unui arc de lanțisor este:

$$L = 2a \cdot sh \frac{x}{a} \quad (6.62)$$

6.7.6 Frecarea firelor

Se consideră un disc circular fix, de rază R , pe care se află înfășurat cu frecare un fir ($\mu \neq 0$). Contactul se realizează pe arcul A_1A_2 (fig. 6.24) având unghiul la centru θ , măsurat în radiani. Firul este acționat la capete în A_1 și A_2 , respectiv de forțele \bar{S}_1, \bar{S}_2 (dacă tensiunile din fire respectă inegalitatea $\bar{S}_1 < \bar{S}_2$, tendința de deplasare este de la A_1 spre A_2).

Se cere să se determine S_{2min} pentru ca firul să alunece pe disc.

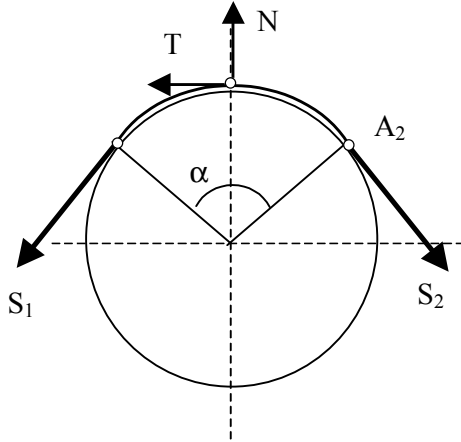


Fig. 6.24

Pentru rezolvarea problemei se folosesc ecuațiile (6.49) deduse pentru acest caz:

$$\frac{dS}{ds} - \mu N = 0; \quad \frac{S}{\rho} - N = 0 \quad (6.63)$$

Acest sistem conduce la ecuația diferențială:

$$\frac{dS}{ds} - \mu \frac{S}{\rho} = 0; \quad (6.63')$$

Întrucât $ds = R d\theta$ ecuația diferențială (6.63) se mai poate scrie:

$$\frac{dS}{d\theta} = \mu S \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mu d\theta \quad (6.64)$$

Integrând această ecuație rezultă:

$$\int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} = \mu \int_0^\alpha d\theta \Rightarrow \ln S_2 - \ln S_1 = \mu \alpha \quad (6.65)$$

sau:
$$\ln \frac{S_2}{S_1} = \mu \alpha \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = e^{\mu \alpha} \quad (6.66)$$

Relația (6.66) este cunoscută ca *formula lui Euler pentru frecarea firelor* și ea a mai fost obținută și pe altă cale la capitolul 2:

$$S_{2max} = S_1 e^{\mu \alpha}$$

Din (6.66) se observă că: $S_2 > S_1$ și depinde de coeficientul de frecare și unghiul de înfășurare al firului pe disc.

Aplicație:

Sistemul de frânare cu bandă

Se dă sistemul de frânare din fig. 6.25, unde se cunosc: G , a , b , r , R și μ coeficientul de frecare al firului pe disc. Se neglijează greutatea discului și ale pârghiei de acționare.

Se cere: forța minimă F_{min} pentru frânarea discului.

Rezolvare:

Aplicând *metoda izolării corpurilor*, se introduc forțele de legătură corespunzătoare și se scriu ecuațiile de echilibru pentru fiecare corp (fig. 6.25):

➤ *Corpul 1:* Ecuația de momente față de punctul O_1 :

$$\sum M_{O_1} = 0: \quad S_1 \cdot R + G \cdot r - S_2 \cdot R = 0$$

Relația lui Euler pentru frecarea firelor se scrie: $S_2 \leq S_1 e^{\frac{3\pi}{4}\mu}$

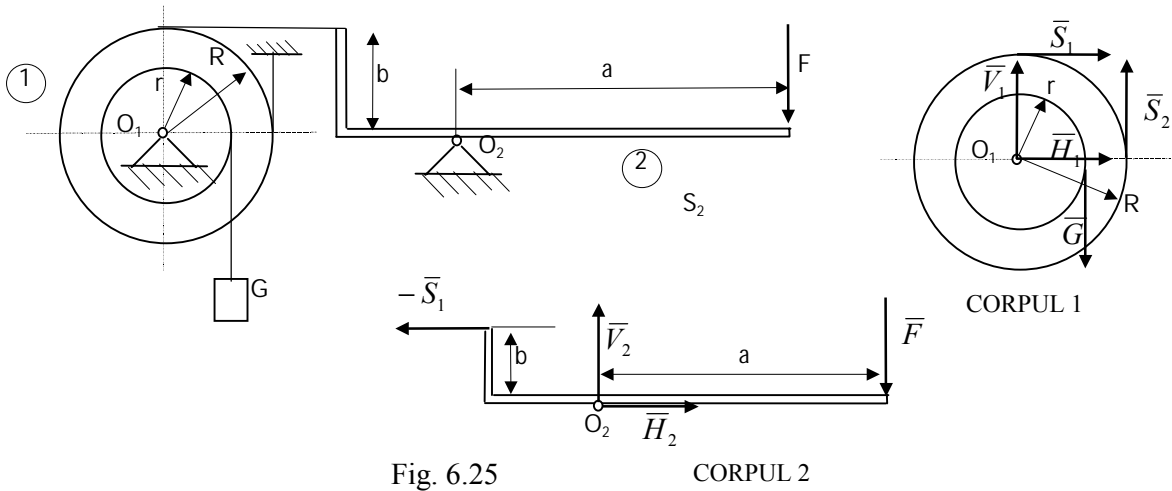


Fig. 6.25

CORPUL 2

➤ *Corpul 2:* Ecuația de momente față de punctul O_2 :

$$\Sigma M_{O_2} = 0: \quad S_1 \cdot b - F \cdot a = 0$$

Din ultima ecuație avem: $S_1 = \frac{a}{b} F$,

care introdusă în primele două ecuații se obține:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} F \cdot R + G \cdot r - S_2 \cdot R = 0 \\ S_2 = \frac{a}{b} F + \frac{r}{R} G ; \\ S_2 \leq \frac{a}{b} F \cdot e^{\frac{3\pi}{4}\mu} \end{cases}$$

Înlocuind se obține: $F \geq \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{G}{e^{\frac{3\pi}{4}\mu} - 1}$

sau: $F_{min} = \frac{r}{R} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{G}{e^{\frac{3\pi}{4}\mu} - 1}$

CAPITOLUL 7

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

7.1. Generalități

Cinematica studiază mișcările mecanice ale punctelor materiale, sistemelor de puncte, corpurilor solide sau ale sistemelor de corpuri, fără a lua în considerare masa acestora, forțele și cuplurile care acționează asupra lor.

În cinematică se folosesc noțiunile fundamentale de *spațiu și timp* și se face ipoteza că *spațiul este absolut, euclidian și tridimensional, timpul este absolut, continuu, unidimensional, independent de spațiu și de orice altă mărime*.

Noțiunea de mișcare este *relativă*, întrucât se raportează la un sistem de referință (reper) care în general nu este fix, dar care *poate fi presupus în mod convențional, fix*. În cazul reperelor mobile, mișcarea se numește *relativă* iar în ipoteza că *sistemul de referință este fix*, mișcarea se numește *absolută*.

Dacă nu se fac precizări suplimentare, mișcările care se vor studia în continuare sunt considerate *mișcări absolute*. *Reperul fix* se mai numește și *preferențial*, deoarece din infinitatea de repere din Univers la care se poate raporta mișcarea unui sistem material, se alege sau se impune unul fix prin însăși natura problemei.

Mișcarea unui punct material față de un *reper fix* este definită atunci când se poate determina poziția punctului la orice moment t . În general, poziția punctului este cunoscută dacă se cunoaște vectorul său de poziție \vec{r} , față de originea O a sistemului (reperului) considerat fix, ca o funcție vectorială de timp:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (7.1)$$

Funcția vectorială (7.1) în cazul problemelor studiate, trebuie să fie *continuă, uniformă* (deoarece punctul material nu poate ocupa simultan două poziții în spațiu), *finită ca mărime și derivabilă de cel puțin două ori*.

7.2. Traietorie, viteză și accelerație.

Elementele care caracterizează din punct de vedere cinematic mișcarea unui punct material sunt: *traietoria, viteza și accelerația*.

7.2.1. Traietoria unui punct în mișcare

Traietoria este locul geometric al pozițiilor succesive ale punctului material în spațiu, sau al pozițiilor succesive ale vârfului vectorului de poziție $\overline{OA} = \vec{r}(t)$.

Notând cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ versorii axelor sistemului de coordonate cartezian avem (conform fig. 7.1): $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, (7.2)

sau ecuațiile scalare echivalente (numite și *ecuațiile parametrice ale traiectoriei*):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (7.3)$$

din care, prin eliminarea parametrului t se obțin *ecuațiile explicite ale traiectoriei*.

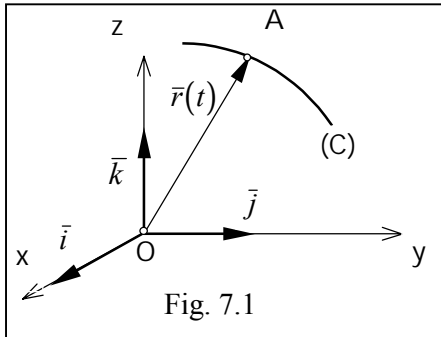


Fig. 7.1

În coordonate cilindrice, cele trei funcții scalare sunt: raza polară ρ , unghiul polar θ și cota z , date sub forma:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(t) \\ \theta &= \theta(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (7.4)$$

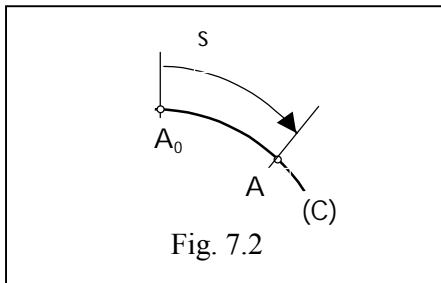


Fig. 7.2

În general, dacă se dau coordonatele q_1 , q_2 și q_3 (care determină biunivoc poziția punctului), cunoașterea vectorului de poziție $\vec{r} = \vec{r}(t)$, echivalează cu cunoașterea funcțiilor scalare q_1 , q_2 și q_3 , adică ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(t), \\ q_2 &= q_2(t), \\ q_3 &= q_3(t) \end{aligned} \quad (7.5)$$

În unele probleme de cinematică se dă traiectoria punctului (C). Dacă aceasta este o *curbă continuă, rectificabilă* (având în orice punct o tangentă unică), mișcarea punctului material poate fi definită printr-o singură ecuație scalară, în felul următor: dacă se alege pe curbă un punct de origine A_0 (fig. 7.2), poziția punctului la un moment dat pe curbă (A), poate fi definită prin valoarea s a arcului A_0A . Pentru ca să existe o corespondență biunivocă între arcul s și poziția punctului A, este necesar să se stabilească și un *sens pozitiv* de măsurare a arcelor pe traiectorie; odată făcută această convenție, *mișcarea mobilului este complet definită* dacă se cunoaște legea de variație a arcului s în funcție de timpul t : $s = s(t)$ (7.6)

Ecuția (7.6) se numește *ecuația sau legea orară a mișcării*.

7.2.2. Viteza unui punct în mișcare

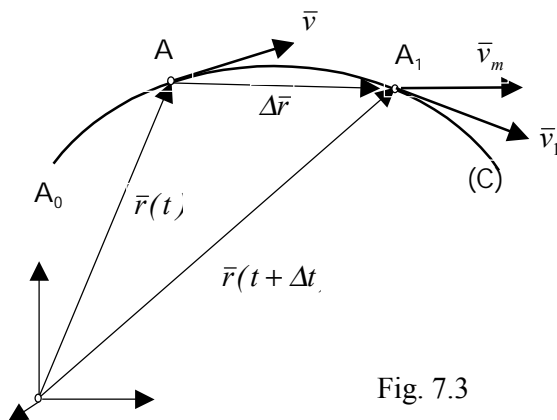


Fig. 7.3

Două mobile pot parcurge aceeași traiectorie dar cu viteze diferite, fapt pentru care traiectoria nu este singura caracteristică cinematică. Să considerăm pe traiectoria unui punct (pe curba C) două poziții vecine A și A_1 , corespunzătoare momentelor $t_0 = t$ și $t_1 = t + \Delta t$ (fig. 7.3).

În acest caz avem creșterea sau variația vectorului de poziție $r(t)$:

$$\overline{AA_1} = \overline{OA_1} - \overline{OA} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta \vec{r}$$

iar mărimea $\frac{\text{arc}(AA_1)}{\Delta t}$, măsoară “iuteala” cu care punctul material parcurge arcul AA_1 . Se definește viteza medie \bar{v}_m , raportul:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (7.7)$$

Se definește viteza instantanee la momentul t limita când $\Delta t \rightarrow 0$ a raportului (7.7):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \stackrel{\text{notatie}}{=} \dot{\vec{r}}, \quad (7.8)$$

Deci viteza unui punct la momentul t este derivata în raport cu timpul a vectorului de poziție \vec{r} . În continuare se determină elementele caracteristice ale vectorului viteză instantanee notat cu $\dot{\vec{r}}$. Din relația (7.8) deducem:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \vec{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \cdot \dot{s}, \quad (7.9)$$

deoarece: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} = \vec{\tau}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$ (7.10)

Relația (7.9) este *expresia analitică a vitezei sub forma intrinsecă* și exprimă faptul că viteza este orientată totdeauna după tangenta la curbă în punctul respectiv iar valoarea scalară a ei, este derivata în raport cu timpul a legii orare a mișcării:

$$\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{\tau}, \quad \dot{s} = v \quad (7.11)$$

Ecuția dimensională a vitezei este: $[v] = LT^{-1}$ (7.12)

Unitatea de măsură în Sistemul Internațional este m/s sau ms^{-1} .

7.2.3. Accelerația unui punct în mișcare

Considerând două poziții învecinate ale punctului material, A la momentul t și A_1 la momentul $t_1 = t + \Delta t$, vitezele corespunzătoare celor două poziții vor fi $\vec{v}(t)$ și respectiv, $\vec{v}(t_1) = \vec{v}(t + \Delta t)$ și sunt orientate după tangentele în A și A_1 la traiectorie (fig. 7.4.). Diferența vectorială a celor două viteze (fig. 7.4) $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t + \Delta t)$, reprezintă variația vectorială a vitezei în intervalul de timp Δt .

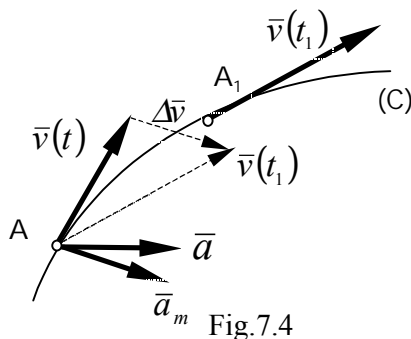


Fig.7.4

Raportul: $\bar{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (7.13)

definește accelerația medie a punctului în intervalul de timp Δt .

Accelerația instantanee la momentul t , a punctului material este limita când $\Delta t \rightarrow 0$ a raportului (7.13):

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}. \quad (7.14)$$

Din examinarea orientării la limită, a vectorului $\Delta \bar{v}$ (și deci și a vectorului \bar{a}_m) se poate trage concluzia că accelerația instantanee este situată în planul oscular al curbei în punctul A și că este orientată spre partea concavă a curbei.

$$\text{Ecuția de dimensiuni a accelerației este: } [\bar{a}] = LT^{-2} \quad (7.15)$$

Unitatea de măsură a accelerației în Sistemul Internațional este: m/s^2 sau ms^{-2} .

7.2.4. Viteza și accelerația unghiulară

În unele cazuri se poate preciza poziția unui punct pe traiectorie cu ajutorul unui unghi θ , ca de exemplu în mișcarea circulară (fig. 7.5). Raportându-ne la o axă fixă se obține unghiul razei vectoriale ca o funcție de timp:

$$\theta = \theta(t) \quad (7.16)$$

Dacă A și A₁ sunt două poziții succesive ale unui punct pe cercul cu centrul în O (fig. 7.5), viteza unghiulară medie este dată de raportul: $\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (7.17)

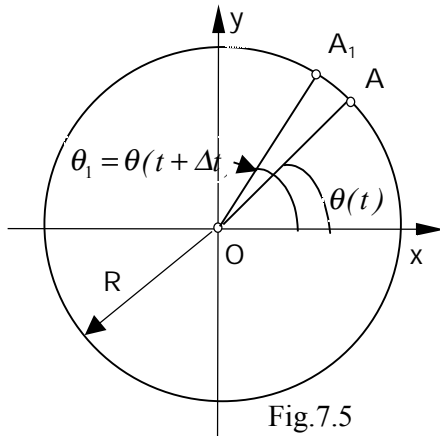


Fig.7.5

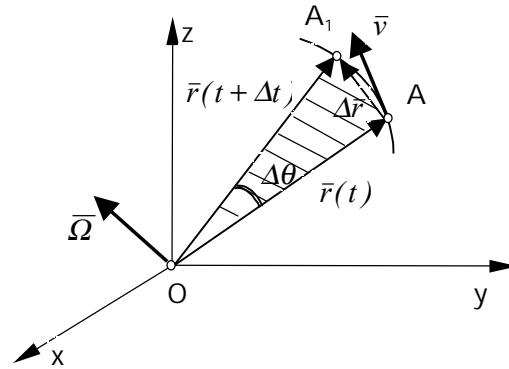


Fig.7.6

Viteza unghiulară instantanee este limita când $\Delta t \rightarrow 0$ a raportului (7.17):

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (7.18)$$

unde variația unghiului (fig. 7.5) este: $\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$

Accelerația unghiulară se definește analog cu accelerația liniară (7.14):

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}. \quad (7.19)$$

Ecuțiile de dimensiuni ale vitezei și accelerației unghiulare sunt:

$$[\omega] = T^{-1}; \quad [\varepsilon] = T^{-2} \quad (7.20)$$

iar unitățile de măsură pentru viteza și accelerația unghiulară în Sistemul Internațional sunt rad/s (s^{-1}), respectiv: rad/s^2 (s^{-2}).

7.2.5. Viteza și accelerația areolară

Sunt cazuri când este necesară definirea unei mărimi care caracterizează variația ariei cuprinsă între două raze vectoriale și arcul de traiectorie parcurs de un punct A (fig. 7.6). Pentru un interval mic de timp Δt , se aproximează aria triunghiului curbiliniu OAA₁ cu aria triunghiului OAA₁ corespunzător:

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{r}| \cdot |\Delta \vec{r}| \quad (7.21)$$

unde: $|\Delta \vec{r}| = |\Delta s| = r \Delta \theta$, $\Delta s = \text{arc}(AA_1)$ deci avem: $\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \Delta \theta$

Viteza areolară medie este deci: $\Omega_m = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ (7.22)

Prin urmare viteza areolară instantanee se scrie:

$$\Omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (7.23)$$

Accelerația areolară este derivată în raport cu timpul a vitezei areolare:

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \quad (7.24)$$

7.3. Studiul mișcării punctului material în diferite sisteme de coordonate

7.3.1. Mișcarea în sistemul cartezian

Fie un reper cartezian Oxyz, o curbă (C) și un punct A(x,y,z) pe această curbă, având vectorul de poziție \vec{r} (fig.7.7) dat de relația:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{unde } x=x(t), y=y(t), z=z(t) \text{ sunt funcții de timp.}$$

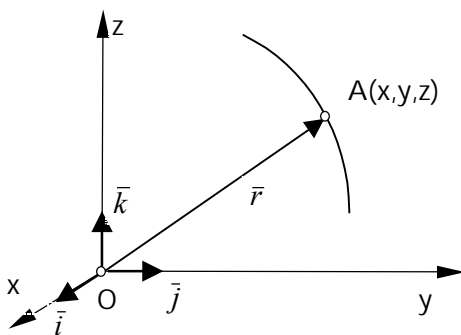


Fig.7.7

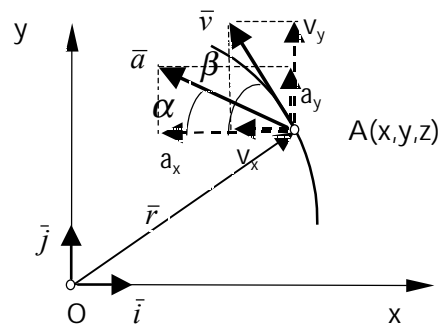


Fig.7.8

Deci: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ reprezintă *ecuațiile parametrice ale traiectoriei*.

Reperul fiind considerat fix, derivatele versorilor axelor sunt nule:

$$\dot{\vec{i}} = \dot{\vec{j}} = \dot{\vec{k}} = 0,$$

deci viteza punctului A față de reperul dat are expresia:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (7.25)$$

Dacă notăm cu v_x , v_y și v_z proiecțiile vitezei \bar{v} pe axele reperului dat rezultă:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \quad (7.26)$$

iar mărimea (modulul) vitezei este dat de:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (7.27)$$

Unghiurile pe care le face \bar{v} cu axele sistemului de coordonate sunt:

$$\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{\dot{x}}{|\bar{v}|}; \quad \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{\dot{y}}{|\bar{v}|}; \quad \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \frac{\dot{z}}{|\bar{v}|}; \quad (7.28)$$

Accelerația punctului A față de reperul dat are expresia:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} \quad (7.29)$$

și dacă notăm cu a_x , a_y și a_z proiecțiile accelerației \bar{a} pe axele reperului dat rezultă:

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z} \quad (7.30)$$

iar mărimea accelerației este: $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$ (7.31)

Unghiurile pe care le face suportul lui \bar{a} cu axele reperului dat sunt:

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{\ddot{x}}{|\bar{a}|}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{\ddot{y}}{|\bar{a}|}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{\ddot{z}}{|\bar{a}|}; \quad (7.31')$$

Dacă punctul material se mișcă în planul Oxy (fig. 7.8), atunci vectorul de poziție, viteza și accelerația devin: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$;

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}; \quad v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}; \quad |\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}; \quad \operatorname{tg}(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j}; \quad a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}; \quad |\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}; \quad \operatorname{tg}(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}.$$

7.3.2. Mișcarea în sistemul de coordonate cilindrice

În sistemul de coordonate cilindrice poziția punctului A_1 (fig. 7.9.a) este definită de vectorul de poziție \bar{r} , care este determinat de coordonatele θ (*unghiul polar*), ρ (*raza polară*) și z (*cota*). Cunoașterea mișcării punctului se reduce la cunoașterea funcțiilor: $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$ și $z = z(t)$, care reprezintă de fapt *ecuațiile parametrice ale traiectoriei*.

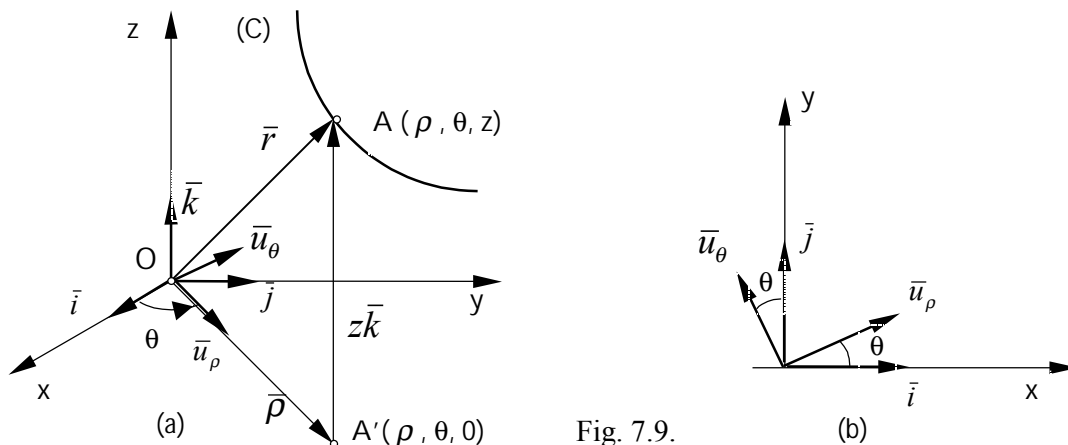


Fig. 7.9.

Direcțiile pe care se proiectează vectorul de poziție \bar{r} în acest caz, sunt:

- direcția razei polare OA', caracterizată prin versorul \bar{u}_ρ ;
- direcția normală pe raza polară din planul xOy, caracterizată prin versorul \bar{u}_θ ;
- direcția axei Oz, caracterizată prin versorul \bar{k} .

Vectorul de poziție \bar{r} se scrie deci:

$$\bar{r} = \bar{\rho} + z\bar{k} = \rho \cdot \bar{u}_\rho + z \cdot \bar{k} \quad (7.35)$$

Se observă că versorul \bar{k} este constant (deci $\dot{\bar{k}} = 0$) și ceilalți doi versori \bar{u}_ρ și \bar{u}_θ sunt mobili. Proiectând \bar{u}_ρ și \bar{u}_θ pe axele sistemului fix de versori \bar{i} , \bar{j} (ca în fig.7.9.b) se obține :

$$\begin{aligned} \bar{u}_\rho &= \cos\theta \cdot \bar{i} + \sin\theta \cdot \bar{j} \\ \bar{u}_\theta &= -\sin\theta \cdot \bar{i} + \cos\theta \cdot \bar{j} \end{aligned} \quad (7.36)$$

Prin derivare în raport cu timpul, avem:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}}_\rho &= -\sin\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{i} + \cos\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{j} = \dot{\theta} \cdot \bar{u}_\theta \\ \dot{\bar{u}}_\theta &= -\cos\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{i} - \sin\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{j} = -\dot{\theta} \cdot \bar{u}_\rho \end{aligned} \quad (7.37)$$

Conform definiției și ținând seama de (7.37), viteza punctului A se scrie:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{\rho}\bar{u}_\rho + \rho\dot{\bar{u}}_\rho + \dot{z}\bar{k} = \dot{\rho}\bar{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\bar{u}_\theta + \dot{z}\bar{k} \quad (7.38)$$

Accelerația punctului A se obține derivând expresia (7.38):

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\rho}\bar{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\bar{u}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\bar{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\bar{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\dot{\bar{u}}_\theta + \ddot{z}\bar{k} \quad (7.39)$$

unde ținând seama de (7.37) și ordonând termenii se obține expresia accelerației:

$$\bar{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\bar{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\bar{u}_\theta + \ddot{z}\bar{k}. \quad (7.39')$$

Din ecuațiile (7.38) și (7.39') se pot scrie componentele vitezei și accelerației în coordonate cilindrice:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\theta = \rho\dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z}, \quad (7.40)$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}, \quad a_z = \ddot{z} \quad (7.41)$$

precum și mărimile vitezei și accelerației în coordonate cilindrice:

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2} \quad (7.42)$$

$$a = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2} \quad (7.43)$$

În cazul mișcării punctului material în planul *coordonatelor polare* ρ și θ se impun condițiile: $z = 0$, $v_z = 0$, $a_z = 0$, rezultă:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\theta = \rho\dot{\theta} \quad (7.44)$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \quad (7.45)$$

7.3.3. Mișcarea în sistemul de coordonate natural

Se știe că triedrul natural (sau Frenet) este un sistem triortogonal mobil, cu originea în punctul A (fig. 7.10) având ca axe:

- tangenta la curba orientată pozitiv în sensul de creștere a arcului s (de la A_0 la A) al cărui versor se notează cu $\bar{\tau}$;
- normala principală (normala din planul osculator al curbei) orientată pozitiv spre centrul de curbură al cărui versor se notează cu $\bar{\nu}$;
- binormala (normala perpendiculară pe planul format de versorii $\bar{\tau}$ și $\bar{\nu}$ sau planul osculator) al cărui versor $\bar{\beta}$ se alege astfel încât versorii $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$, (luați în această ordine) să formeze un triedru drept.

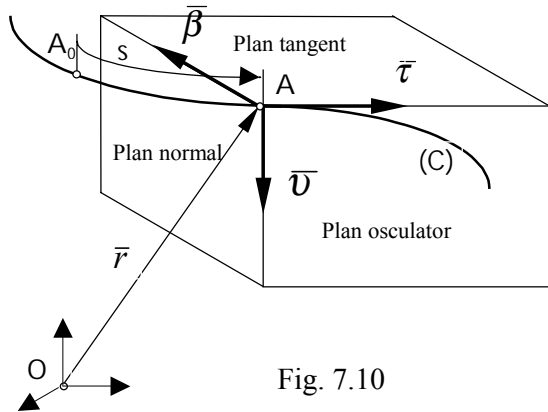


Fig. 7.10

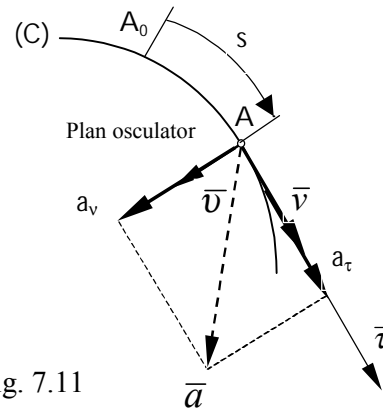


Fig. 7.11

Să presupunem că traiectoria este dată prin ecuația vectorială:

$$\bar{r} = \bar{r}(s) \quad (7.46)$$

unde s este arcul de curbă, măsurat de la un anumit punct A_0 al curbei, considerat ca punct de origine a arcelor și într-un anumit sens.

În aceste condiții mișcarea este definită printr-o singură funcție scalară numită *ecuația orară a mișcării*: $s = s(t)$ (7.47)

Pentru determinarea componentelor vitezei și accelerației pe axele triedrului Frenet se folosesc ecuațiile (7.46) și (7.47) și alte două relații cunoscute din geometria diferențială:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}; \quad \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{\nu} \quad (7.48)$$

unde ρ este raza de curbură a traiectoriei în punctul considerat.

În baza relațiilor (7.48) și a definiției vitezei avem:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \bar{\tau} \quad (7.49)$$

adică, componentele vitezei pe axele triedrului Frenet sunt:

$$v_\tau = \dot{s} = v, \quad v_\nu = 0, \quad v_\beta = 0. \quad (7.50)$$

ceea ce conduce la concluzia că viteza este dirijată după tangenta la curbă, fapt cunoscut de la paragraful 7.2.2, iar scalarul ei este $v = \dot{s}$.

Accelerația se obține derivând expresia vitezei:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\tau}) = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\dot{\bar{\tau}}$$

unde, înlocuind derivata versorului tangentei, conform formulelor (7.48):

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \bar{v} \dot{s} = \frac{\dot{s}}{\rho} \bar{v} \quad (7.51)$$

expresia accelerației devine:

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{v} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{v} \quad (7.52)$$

Componentele accelerației sunt deci (fig.7.11):

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}, \quad a_v = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_\beta = 0. \quad (7.53)$$

iar modulul accelerației este:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_v^2} = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \dot{v}^2} \quad (7.54)$$

Deci accelerația este conținută în planul osculator al traiectoriei în punctul M.

Componenta a_τ se numește *accelerație tangențială*, iar componenta a_v , *accelerație normală* sau *accelerație centripetă* (fiind totdeauna îndreptată spre centrul de curbura sau spre partea concavă a traiectoriei). În consecință vectorul accelerație \bar{a} va fi îndreptat totdeauna spre partea concavă a traiectoriei.

Observații:

- 1) Dacă într-un interval de timp $a_\tau = 0$, atunci $v = ct$. și mișcarea este *uniformă*.
- 2) Dacă a_τ și v au același semn, viteza crește în valoare absolută și mișcarea se numește *accelerată* și dacă a_τ și v au semne opuse, mișcarea se numește *întârziată*.
- 3) Dacă $a_\tau = \text{constant}$, mișcarea se numește *uniform variată*, ea fiind uniform accelerată, dacă $a_\tau \cdot v > 0$ și uniform întârziată dacă $a_\tau \cdot v < 0$.
- 4) Avem $a_v = 0$ atunci când $1/\rho = 0$ (exceptând cazul $v = 0$), adică în punctele de inflexiune ale traiectoriei sau când traiectoria este o linie dreaptă.
- 5) Avem $\bar{a} = 0$ dacă $a_\tau = 0$ și $a_v = 0$; dar $a_v = 0$ conduce la $1/\rho = 0$ adică mișcarea este rectilinie și uniformă când $\bar{a} = 0$.

7.3.4. Calculul razei de curbura a traiectoriei din considerente cinematice

Expresia razei de curbura a traiectoriei se poate obține ținând seama că accelerația se poate scrie în două moduri:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad \text{sau} \quad |\bar{a}| = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \dot{v}^2},$$

unde: $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$

Egalând cele două expresii se obține raza de curbură din considerente cinematice:

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}{\left[(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\dot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\dot{z})^2 + (\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})^2 \right]^{1/2}}. \quad (7.55)$$

Un alt mod de a determina raza de curbură:

s-a arătat că:

$$\bar{v} = v\bar{\tau}, \quad \bar{a} = a_v \cdot \bar{v} + a_\tau \cdot \bar{\tau}.$$

Înmulțind vectorial cele două expresii, avem:

$$\bar{v} \times \bar{a} = v\bar{\tau} \times (a_v \bar{v} + a_\tau \bar{\tau}) = va_v (\bar{\tau} \times \bar{v}) + va_\tau (\bar{\tau} \times \bar{\tau}) = va_v \bar{\beta} = \frac{v^3}{\rho} \bar{\beta}$$

Deci: $|\bar{v} \times \bar{a}| = \frac{v^3}{\rho}$ sau $\rho = \frac{v^3}{|\bar{v} \times \bar{a}|}$ unde, înlocuind în membrul drept

expresiile vitezei și accelerației, se obține aceeași relație (7.55) a razei de curbură.

7.4. Mișcări particulare ale punctului material

Pentru a studia unele mișcări particulare ale punctului material, facem precizarea că prin *condiții inițiale* la un moment dat $t = t_0$ se înțelege *poziția și viteza la momentul t_0* : $\bar{r}(t_0) = \bar{r}_0$, respectiv: $\bar{v}(t_0) = \dot{\bar{r}}(t_0) = \bar{v}_0$.

7.4.1. Mișcarea rectilinie uniformă

Se numește *mișcare rectilinie uniformă* mișcarea punctului a cărui traiectorie este o linie dreaptă și viteza este constantă. Se alege sistemul de referință cartezian astfel încât axa Ox să coincidă cu linia pe care are loc mișcarea (fig.7.12). Prin urmare, datele problemei sunt:

$$v_x = \text{constant} = C_1, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (7.56)$$

Dar $v_x = C_1 = \dot{x}$ și integrând avem:

$$x = C_1 t + C_2 \quad (7.57)$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale:

$$\text{pentru } t = t_0 = 0 \quad \text{avem} \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 \quad (7.58)$$

de unde rezultă $v_0 = C_1$ și $x_0 = C_2$ și deci (7.57) devine:

$$x = x_0 + v_0 t \quad (7.59)$$

relația (7.59) reprezintă *ecuația mișcării rectilinie uniformă*.

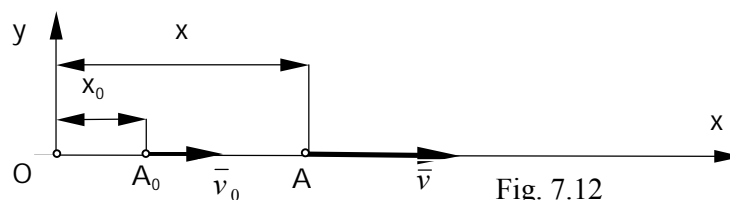


Fig. 7.12

7.4.2. Mișcarea rectilinie uniform variată

Un punct material are o mișcare *rectilinie uniform variată* dacă se deplasează pe o linie dreaptă și mărimea accelerației sale este constantă. Se alege sistemul de referință careteziast astfel încât axa Ox să coincidă cu linia pe care are loc mișcarea (fig.7.12). Prin urmare, datele problemei sunt:

$$a_x = a = \text{constant}, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (7.60)$$

Cum $a_x = \ddot{x}$, rezultă $\ddot{x} = a$ și integrând succesiv avem:

$$\dot{x} = a t + C_1, \quad x = \frac{1}{2} a t^2 + C_1 t + C_2. \quad (7.61)$$

Condițiile inițiale ale mișcării sunt:

pentru

$$t = 0: \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = \dot{x}(0) = v_0. \quad (7.62)$$

care introduse în (7.61) se obține: $C_1 = v_0$ și $C_2 = x_0$ (7.63)

În acest caz relațiile (7.61) conduc la:

- legea mișcării: $x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$ (7.64)

- legea vitezei: $v = at + v_0$ (7.65)

În unele aplicații este util să se exprime viteza v a punctului în funcție de abscisa x . Eliminând timpul t din relațiile (7.64) și (7.65) se obține:

$$t = \frac{v - v_0}{a}, \quad x = \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + x_0$$

iar după efectuarea calculelor se obține: $x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ (7.66)

de unde rezultă *formula lui Galilei*: $v = \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}$ (7.67)

Dacă mobilul pleacă din origine, fără viteza inițială ($x_0 = 0, v_0 = 0$) ecuațiile (7.66) și (7.67) devin:

$$x = \frac{v^2}{2a} \quad (7.68)$$

$$v = \sqrt{2ax} \quad (7.69)$$

Ultima relație este cunoscută și sub numele de *formula lui Toricelli*.

Mișcările uniform variate pot fi:

- uniform accelerate, dacă $a_\tau \cdot v > 0$
- uniform întârziate dacă $a_\tau \cdot v < 0$.

7.4.3. Mișcarea circulară uniformă

Se numește *mișcare circulară uniformă* mișcarea a cărei traiectorie este un cerc și viteza punctului este constantă ca mărime.

Se presupunem că punctul se găsește la momentul inițial în A_0 , iar la un moment dat t se află în A (fig. 7.13). Mișcarea fiind uniformă, arcul A_0A și unghiul θ descris de raza $OA = R$ cresc proporțional cu timpul t , deci:

$$\theta = \omega t \quad (7.70)$$

Viteza și accelerația mișcării se determină calculând proiecțiile pe axele triedrului Frenet. Ecuația orară fiind: $s(t) = \text{arc}(A_0A) = R \cdot \theta(t) = R\omega t$ conform paragrafului 7.3.3. se obțin relațiile:

$$v_\tau = v = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega$$

$$a_\tau = \dot{v} = \ddot{s} = 0; \quad a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 \quad (7.71)$$

Se observă (din fig. 7.13) că în această mișcare accelerația \bar{a} are direcția normalei la cerc (razei).

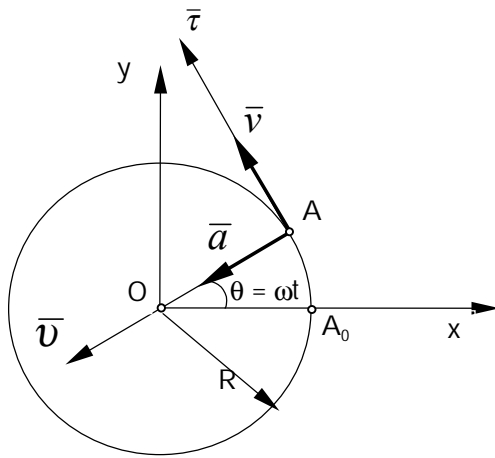


Fig. 7.13

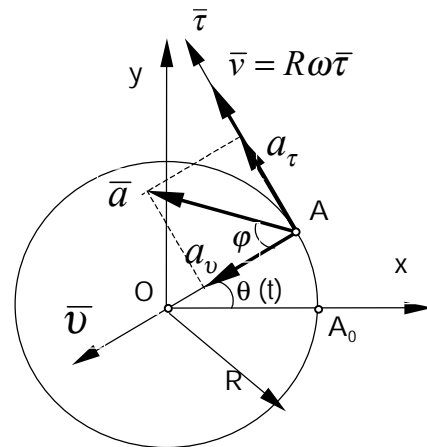


Fig. 7.14

În practică, de obicei se dă numărul de rotații pe minut sau turația n (rot/min). În acest caz viteza unghiulară ω se calculează ținând seama că într-un minut unghiul descris de raza OA este de $2\pi n$, deci într-o secundă raza OA va descrie unghiul:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad (7.72)$$

7.4.4. Mișcarea circulară neuniformă

În această mișcare unghiul $\theta = \theta(t)$ este o funcție neliniară oarecare, de timp. Din definiția vitezei și a accelerației unghiulare avem:

$$\omega = \dot{\theta}, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (7.73)$$

iar ecuația orară a mișcării (fig. 7.14):

$$s = s(t) = \text{arc}(A_0A) = R \theta(t) \quad (7.74)$$

În acest caz, componentele vitezei și ale accelerației sunt:

$$\begin{aligned} v_\tau &= v = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega, \\ a_\tau &= \dot{v} = \dot{s} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\varepsilon; \quad a_v = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 \end{aligned} \quad (7.75)$$

Mărimea accelerației este deci:

$$|\bar{a}| = a = \sqrt{a_\tau^2 + a_v^2} = R\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (7.76)$$

și unghiul dintre vectorul accelerației și raza OA este:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_\tau}{a_v} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (7.77)$$

În figura 7.14 s-au desenat vectorii \bar{v} și \bar{a} în mișcarea circulară neuniformă.

Aceleași expresii pentru viteză și accelerație se deduc folosind sistemul de coordonate cartezian, unde se consideră:

$$x = R \cos \theta; \quad y = R \sin \theta \quad \text{și se introduc în relațiile (7.27) și (7.31).}$$

7.4.5. Mișcarea pe o cicloidă

Se studiază mișcarea unui punct M de pe periferia unei roți de rază R, care se rostogolește fără să alunece pe un plan orizontal, roata fiind situată într-un plan vertical xOy, iar centrul roții se deplasează uniform cu viteza v_0 (fig. 7.15)

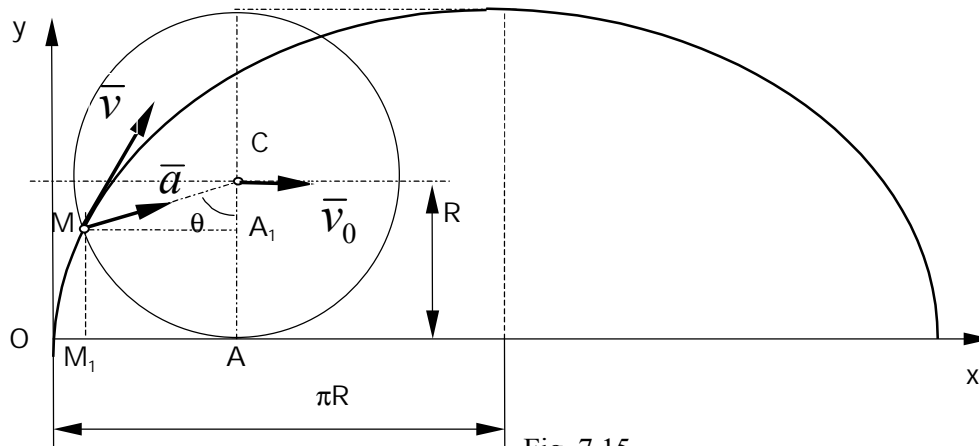


Fig. 7.15

Condiția de rostogolire fără alunecare se exprimă prin egalitatea dintre distanța OA și arcul AM: $OA = \text{arc}(AM)$.

Deoarece: $OA = v_0 t$ și $\text{arc}(AM) = R \theta$, rezultă: $v_0 t = R \theta$ sau: $\theta = \frac{v_0}{R} t = \omega t$

Coordonatele punctului M în funcție de unghiul θ sunt:

$$x = OM_1 = OA - M_1A = \text{arc} AM - A_1M = R\theta - R \sin \theta = R(\theta - \sin \theta)$$

$$y = M_1M = A_1A = AC - A_1C = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta).$$

Din geometria analitică se știe că *acestea sunt ecuațiile parametrice ale cicloidei*. Înlocuind $\theta = \omega t$ se obține:

$$x = R(\omega t - \sin \omega t); \quad y = R(1 - \cos \omega t).$$

Componentele vitezei în acest caz sunt:

$$v_x = \dot{x} = R\omega(1 - \cos \omega t); \quad v_y = \dot{y} = R\omega \sin \omega t \quad (7.79)$$

iar componentele accelerației sunt:

$$a_x = \ddot{x} = R\omega^2 \sin \omega t; \quad a_y = \ddot{y} = R\omega^2 \cos \omega t. \quad (7.80)$$

Din relațiile de mai sus rezultă câteva proprietăți interesante ale vectorilor \bar{v} și \bar{a} .

Deoarece:
$$\overline{AM} = (x_M - x_A)\bar{i} + (y_M - y_A)\bar{j} = -R \sin \omega t \cdot \bar{i} + R(1 - \cos \omega t) \cdot \bar{j}$$

$$\bar{v}_M = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} = R\omega(1 - \cos \omega t) \cdot \bar{i} + R\omega \sin \omega t \cdot \bar{j}.$$

Făcând produsul scalar al celor doi vectori se obține:

$$\overline{AM} \cdot \bar{v}_M = -R^2 \omega \sin \omega t (1 - \cos \omega t) + R^2 \omega (1 - \cos \omega t) \sin \omega t = 0$$

Apoi, calculând modulele celor doi vectori:

$$|\bar{v}_M| = \sqrt{R^2 \omega^2 (1 - \cos \omega t)^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 \omega t} = R\omega \sqrt{(1 - \cos \omega t)^2 + \sin^2 \omega t},$$

$$|\overline{AM}| = \sqrt{R^2 \sin^2 \omega t + R^2 (1 - \cos \omega t)^2} = R\sqrt{(1 - \cos \omega t)^2 + \sin^2 \omega t},$$

$$\text{rezultă deci } : |\bar{v}_M| = \omega |\overline{AM}|. \quad (7.81)$$

Analog avem:

$$\overline{MC} = (x_C - x_M)\bar{i} + (y_C - y_M)\bar{j} = R \sin \omega t \cdot \bar{i} + R \cos \omega t \cdot \bar{j}$$

$$\bar{a} = R\omega^2 \sin \omega t \cdot \bar{i} + R\omega^2 \cos \omega t \cdot \bar{j} = \omega^2 \cdot \overline{MC}$$

$$\text{avem deci: } |\bar{a}| = \omega^2 |\overline{MC}| \quad (7.82)$$

Proprietăți:

- Vectorul \bar{v}_M este perpendicular tot timpul pe \overline{AM} și proporțional cu acesta, factorul de proporționalitate fiind ω ;
- Vectorii \bar{a} și \overline{MC} sunt coliniari, deci proiecțiile lor sunt proporționale, factorul de proporționalitate fiind ω^2 .

Aceste proprietăți arată că:

- în ceea ce privește vitezele, un punct de pe periferia roții se comportă ca și cum s-ar roti uniform cu viteza unghiulară ω în jurul punctului A (*numit și centrul instantaneu al vitezelor*);
- în ceea ce privește accelerațiile, un punct de pe periferia roții se comportă ca și cum s-ar roti în jurul punctului C (*numit și centrul instantaneu al accelerațiilor*).

7.4.6. Mișcarea uniformă pe o elice

Se consideră un punct material care se deplasează uniform pe o elice de pas p , situată pe un cilindru de rază R (fig. 7.16.a). Desfășurând cilindrul se observă că dacă mișcarea este uniformă, arcul de elice A_0A crește proporțional cu timpul, atunci arcul de cerc A_0A_1 și unghiul $\theta = \angle(A_0OA_1)$, cresc proporțional cu timpul.

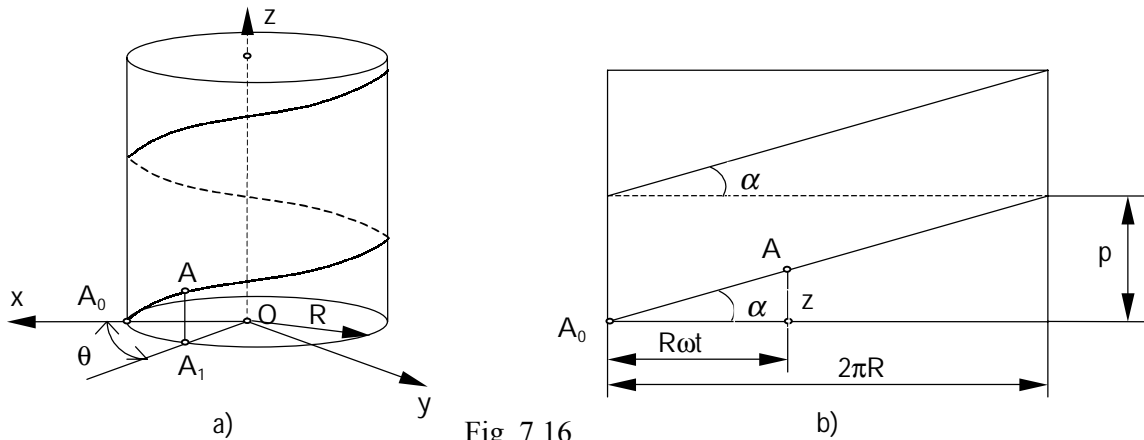


Fig. 7.16

Dacă se notează: $\theta = \omega t$, atunci: $x = R \cos \omega t$; $y = R \sin \omega t$.

Cota $z = A_1A$ se determină din asemănarea celor două triunghiuri din fig.

7.16.b, adică:
$$\frac{z}{p} = \frac{R\omega t}{2\pi R} \text{ sau } z = \frac{p\omega}{2\pi} t$$

Prin urmare, *ecuațiile parametriche ale elicei circulare* sunt:

$$x = R \cos \omega t; \quad y = R \sin \omega t; \quad z = \frac{p\omega}{2\pi} t. \quad (7.83)$$

iar proiecțiile vitezei pe axe sunt:

$$v_x = \dot{x} = -R\omega \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = R\omega \cos \omega t, \quad v_z = \dot{z} = \frac{p\omega}{2\pi}$$

de unde rezultă mărimea vitezei:
$$|\vec{v}| = \omega \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}. \quad (7.84)$$

Proiecțiile accelerației pe axe sunt:

$$a_x = \ddot{x} = -R\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = \ddot{y} = -R\omega^2 \sin \omega t, \quad a_z = \ddot{z} = 0.$$

de unde rezultă mărimea vitezei accelerației:
$$|\vec{a}| = R\omega^2 \quad (7.85)$$

Observație

Pe baza acestor rezultate se poate calcula *raza de curbură a elicei*.

Într-adevăr, deoarece mișcarea pe elice este uniformă, accelerația se reduce la o componentă normală. Dacă: $a = a_n = v^2 / \rho$ și ținând seama de expresiile (7.84) și (7.85) găsite pentru a și v , rezultă:

$$\frac{\omega^2 \left(R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2} \right)}{\rho} = R\omega^2 \quad \text{de unde rezultă: } \rho = R + \frac{p^2}{4\pi^2 R}. \quad (7.86)$$

Aplicație

Se dă mecanismul bielă-manivelă din figura 7.17, unde se cunosc:

$OA = r$, $AB = \ell$, $MB = \ell/3$; $\varphi = \varphi(t) = \omega_0 t$ Se cer:

- ecuațiile parametrice și ecuația explicită a curbei deschisă de punctul M în timpul mișcării mecanismului
- componentele vitezei și accelerației punctului la momentul t .

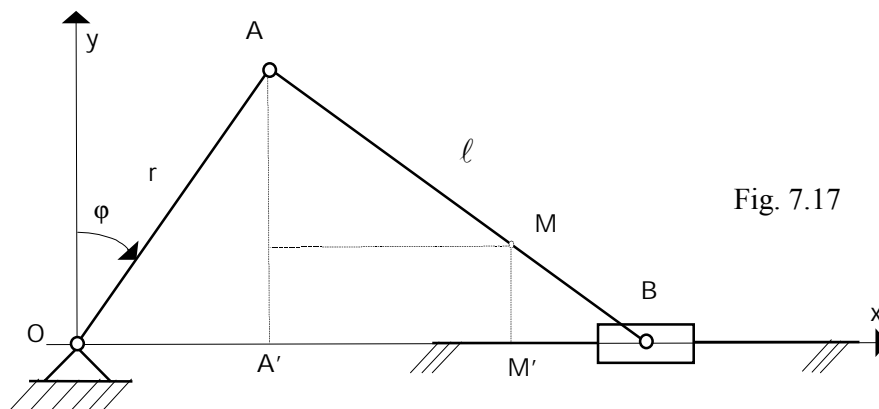


Fig. 7.17

Rezolvare :

Se notează cu α unghiul OBA și avem :

$$x_M = OM' = r \sin \varphi + \frac{3}{2} \ell \cos \alpha; \quad y_M = M'M = \frac{\ell}{3} \sin \alpha$$

Din teorema sinusurilor scrisă în triunghiul OAB avem:

$$\frac{l}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{r}{\sin \alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{r}{\ell} \cos \varphi; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \cos^2 \varphi}$$

Prin urmare pentru punctul M, avem ecuațiile parametrice :

$$x = r \sin \varphi + \frac{2}{3} \sqrt{\ell^2 - r^2 \cos^2 \varphi}; \quad y = \frac{r}{3} \cos \varphi$$

Eliminând parametrul φ (din a doua ecuație) rezultă $\cos \varphi = \frac{3y}{r}$ și se obține

ecuația explicită a traiectoriei punctului M :

$$x = \sqrt{r^2 - 9y^2} + \frac{2}{3} \sqrt{\ell^2 - 9y^2}$$

Componentele vitezei după cele două axe sunt:

$$\dot{x} = \omega_0 r \cos \varphi \left(1 + \frac{2}{3} \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{\ell^2 - r^2 \cos^2 \varphi}} \right); \quad \dot{y} = -\frac{1}{3} \omega_0 r \sin \varphi$$

Componentele accelerației după cele două axe sunt:

$$\ddot{x} = \omega_0^2 r \left(-\sin \varphi + \frac{r}{6} \cdot \frac{4 \cos 2\varphi (\ell^2 - r^2 \cos^2 \varphi) - r^2 \sin^2 2\varphi}{\sqrt{(\ell^2 - r^2 \cos^2 \varphi)^3}} \right);$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{3} \omega_0^2 r \cos \varphi$$

CAPITOLUL 8

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

8.1. Generalități

Dinamica punctului material studiază mișcarea acestuia, ținându-se seama de masa lui și forțele care acționează asupra lui. Problemele fundamentale ale dinamicii punctului material sunt:

- a) cunoscând forțele care acționează asupra punctului și condițiile inițiale (poziția și viteza la momentul inițial) se determină mișcarea lui;
- b) cunoscând mișcarea punctului material (legea de mișcare) se determină forțele care acționează asupra lui (pentru a-i imprima această mișcare).

Datorită unor condiții impuse de practică, se mai întâlnesc și probleme mixte, în care cunoscând anumite forțe și anumite elemente ale mișcării, se cere să se determine celelalte forțe și elemente ale mișcării.

8.2. Mărimi mecanice fundamentale și derivate.

Sisteme de unități de măsură. Dimensiuni.

Pentru a studia variația unei mărimi mecanice oarecare, este necesară compararea acesteia cu o mărime invariantă și de aceeași natură. Această mărime se numește *mărime etalon*.

Prin *operația de măsurare* se înțelege așadar, compararea a unei mărimi M dintr-o clasă oarecare, cu o mărime etalon U din aceeași clasă, careia i s-a atribuit în mod convențional valoarea unu (aceasta se mai numește *unitate de măsură sau etalon*). Rezultatul măsurării este un număr n care arată de câte ori mărimea M este mai mare decât mărimea etalon U :

$$n = M / U \quad (8.1)$$

Numărul n care se obține astfel este un număr *abstract* și se numește *valoare numerică* a mărimii M . Mărimea fizică M se exprimă deci sub forma unui produs dintre valoarea numerică n și unitatea de măsură U , adică:

$$M = n U. \quad (8.2)$$

Din definiția *operației de măsurare*, rezultă că pentru a măsura mărimile fizice, ar trebui să avem tot atâtea unități de măsură diferite, câte mărimi fizice avem. În realitate însă, mărimile fizice sunt legate între ele prin legi și definiții, care simplifică problema alegerii unităților etalon.

Mărimile fizice alese ca etalon se numesc *mărimi fundamentale*, iar unitățile de măsură corespunzătoare - *unități fundamentale*. Celelalte mărimi fizice, deduse din mărimile fundamentale pe baza legilor fizice și definițiilor, se numesc *mărimi derivate*, iar unitățile respective, *unități derivate*.

În mecanică sunt întâlnite frecvent două *sisteme de unități de măsură*:

- a) *sistemul fizic*, cu mărimile fundamentale: *lungimea (l)*, *timpul (t)* și *masa (m)*;
- b) *sistemul tehnic*, cu mărimile fundamentale: *lungimea (l)*, *timpul (t)* și *forța (F)*.

Dimensiunile mărimilor fundamentale ale *sistemului fizic* sunt notate cu:

$$[l]=L, \quad [t]=T, \quad [m]=M. \quad (8.3)$$

În țara noastră s-a introdus Sistemul Internațional de măsuri și unități (SI) care are (în mecanică) *trei unități fundamentale*: *metrul (m)* pentru lungime, *kilogramul (kg)* pentru masă și *secunda (s)* pentru timp și o unitate suplimentară, *radianul (rad)* pentru unghiuri plane. Conform ultimelor definiții adoptate la Conferințele internaționale de măsuri și greutate:

- *metrul* este definit ca lungimea egală cu 1 650 763,73 lungimi de undă în vid ale radiației care corespunde tranziției între nivelele $2p_{10}$ și $5d_5$ ale atomului de Kripton 86 (adoptat la a IX-a Conferință generală de măsuri și greutate din 1960, rezoluția 6);
- *kilogramul* este masa prototipului internațional de platină iridiată (adoptat în anul 1889 la a III-a Conferință generală de măsuri și greutate) păstrat la Sevres în Franța;
- *secunda* este durata de 9 192 631 770 perioade ale radiației corespunzătoare tranziției între cele două nivele hiperfine ale stării fundamentale ale atomului de Cesium 133. (adoptată la a XIII-a Conferință generală de măsuri și greutate din 1967, rezoluția 1).

Principalele *unități derivate* folosite în mecanică, sunt:

- unitatea de **forță** este *newtonul (N)* și reprezintă forța care imprimă unei mase de 1 kg o accelerație de 1 m/s^2 : $1N = 1 \text{ Kg m s}^{-2}$;
Legătura dintre *kilogramul forță* și *newton* se stabilește din expresia forței de greutate: $G = mg$, $1 \text{ kgf} = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 9,81 \text{ N}$;
- unitatea de **lucru mecanic** este *joule-ul (J)*, care reprezintă lucrul mecanic efectuat de o forță de 1 N ce se deplasează cu 1 m pe propriul său suport:
 $J = 1 \text{ Kg m}^2 \text{ s}^{-2}$;
- unitatea pentru **putere** este *watt-ul (W)*, care reprezintă un lucru mecanic de $1J$ efectuat într-o secundă: $1 \text{ W} = 1 \text{ Kg m}^2 \text{ s}^{-3}$;

Unitățile derivate se pot exprima prin relații matematice simple cu ajutorul unităților fundamentale. O asemenea relație se numește *ecuație de dimensiuni* a mărimii respective.

Ecuația de dimensiuni a unei mărimi derivate D are următoarea formă în Sistemul Internațional (SI):

$$[D] = L^\alpha M^\beta T^\gamma \quad (8.4)$$

unde α , β , γ pot fi numere întregi, fracționare, pozitive, negative sau chiar nule.

$$\begin{aligned}
\text{De exemplu: -aria} & : [A] = L^2 \\
\text{-viteza} & : [v] = LT^{-1} \\
\text{-acelerația:} & [a] = LT^{-2} \\
\text{-forța} & : [F] = MLT^{-2} \\
\text{-lucrul mecanic} & : [L_m] = ML^2T^{-2}
\end{aligned}$$

Prin urmare, dacă o mărime oarecare A este definită prin relația $A = B \cdot C$, iar ecuațiile de dimensiuni ale mărimilor B și C sunt:

$$[B] = L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1}; \quad [C] = L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2}$$

atunci ecuația de dimensiuni ale mărimii A va fi:

$$[A] = L^{\alpha_1 + \alpha_2} M^{\beta_1 + \beta_2} T^{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (8.5)$$

în mod analog, dacă o mărime oarecare A este definită prin relația $A = B / C$ avem:

$$[A] = L^{\alpha_1 - \alpha_2} M^{\beta_1 - \beta_2} T^{\gamma_1 - \gamma_2} \quad (8.6)$$

Legile fizicii exprimă în general, egalități între mărimile fizice. Orice egalitate între două mărimi fizice are sens numai atunci când dimensiunile termenilor din egalitate sunt aceleași. Egalitatea din punct de vedere al dimensiunilor, constituie *omogenitatea relației din punct de vedere mecanic*, care exprimă faptul că dacă între mai multe mărimi există o relație de forma:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \quad (8.7)$$

atunci trebuie ca atât A cât și toți termenii A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) să aibă aceeași ecuație dimensională, adică: $[A] = [A_1] = [A_2] = \dots = [A_n]$ (8.8)

8.3. Principiul fundamental al dinamicii

În afara principiilor enunțate anterior (*principiul inerției* sau Legea I a Mecanicii, *principiul acțiunii și reacțiunii* sau Legea a III-a a Mecanicii, și *principiul paralelogramului*) se admite în Mecanică și *principiul fundamental al dinamicii* (sau Legea a II-a) sau *principiul independenței acțiunii forțelor*.

Acest principiu a fost menționat de Galilei și formulat prima dată de Newton astfel: *''acelerația unui corp este proporțională cu forța motoare aplicată și este îndreptată în direcția și sensul după care acționează forța''*.

Newton a numit acest principiu *Legea a II a Mecanicii*, la baza acestuia stând o serie de determinări experimentale. În comentariul acestei legi, Newton arată că dacă o forță dată produce o accelerație a , o forță dublă va produce o accelerație $2a$ și așa mai departe, indiferent dacă cea de-a doua forță este aplicată, *''laolaltă și deodată''* sau *''treptat și succesiv''*.

Pornind de la această observație, Newton a introdus noțiunea de *masă*, ca raportul dintre mărimea forței \vec{F} și cea a accelerației \vec{a} imprimată corpului de forța \vec{F} , adică $|F|/|a| = m$.

Ecuatia fundamentală a dinamicii se scrie sub forma:

$$\bar{F} = m\bar{a} \quad \text{sau} \quad \bar{F} = m\ddot{r} \quad (8.9)$$

sau sub forma:
$$\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}). \quad (8.9')$$

Newton a mai constatat că dacă asupra unui corp care se mișcă cu accelerația \bar{a} se aplică o forță $\bar{F}_1 = m\bar{a}_1$, accelerația \bar{a} se va aduna algebric cu accelerația \bar{a}_1 , în cazul în care direcțiile celor două accelerații coincid; în cazul în care direcțiile lor sunt diferite, accelerațiile se compun geometric.

Comentariul principiului al doilea cuprinde astfel și **principiul paralelogramului forțelor**: "*când asupra unui punct material acționează simultan două forțe având direcții diferite, efectul este același ca în cazul când asupra punctului acționează o singură forță (numită rezultantă) care are mărimea, direcția și sensul date de diagonala paralelogramului având drept laturi forțele considerate*".

Acest comentariu este cunoscut sub numele de **corolarul I al lui Newton**, dar de fapt el reprezintă un **principiu**.

Pentru enunțarea legilor Mecanicii de mai sus, Newton a folosit următoarele ipoteze simplificatoare:

- a) *noțiunea de corp material reprezintă de fapt punctul material* ;
- b) *mișcarea se raportează la un sistem de referință presupus fix*.

În ecuația (8.9), masa m apare ca un *coeficient invariabil*, atașat particulei materiale și caracterizează cantitatea de materie conținută de ea. Pentru o forță dată \bar{F} , cu cât masa este mai mare cu atât accelerația, sau abaterea de la mișcarea rectilinie și uniformă a particulei, este mai mică. Masa m caracterizează deci *proprietatea de inerție* a particulei materiale.

Masa corpurilor de la suprafața Pământului se determină cu ajutorul balanței, iar pentru corpurile cerești, ea se determină ținând seama de ecuația (8.9) și de *principiul atracției universale*.

În general forța \bar{F} se determină experimental indirect, și anume prin determinarea accelerației (de exemplu forța de greutate, prin măsurarea accelerației g în cazul căderii libere a unui corp). De cele mai multe ori însă, forța \bar{F} se va adopta din considerații teoretice, urmând ca după analiza modelului mecanic construit astfel, să se determine exact, prin compararea rezultatelor teoretice cu cele obținute experimental.

În dinamică se admite că forța \bar{F} , depinde explicit de vectorul de poziție \bar{r} , de vectorul viteză $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$ și de timpul t , adică:

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, \bar{v}, t). \quad (8.10)$$

În particular dacă forța \bar{F} nu depinde de toți parametrii (\bar{r}, \bar{v}, t) , în funcție de natura fenomenului ea are următoarele expresii particulare:

$$\bar{F} = \bar{G} = m\bar{g} \quad \text{- forța de greutate,} \quad (8.11)$$

$$\bar{F} = -k\bar{r} \quad - \text{forța elastică}, \quad (8.12)$$

$$\bar{F} = -f \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r} = -f \frac{mM}{r^3} \bar{r} \quad - \text{forța atracției universale}, \quad (8.13)$$

$$\bar{F} = \bar{R} = -C\dot{\bar{r}} = -C\bar{v} \quad - \text{forța de rezistență a aerului}, \quad (8.14)$$

$$\bar{F} = \bar{R} = -\varphi(|\bar{v}|) \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \quad - \text{forța de rezistență, în general.} \quad (8.15)$$

unde : k, f și C sunt constante.

8.4. Ecuațiile diferențiale ale mișcării punctului material liber și integrarea lor.

Ecuația diferențială a mișcării, scrisă sub formă vectorială (8.9), ținând seama de (8.10), este:

$$m\ddot{\bar{r}} = F(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \quad (8.16)$$

unde \bar{F} este rezultanta tuturor forțelor aplicate punctului material.

Proiectând această ecuație pe un sistem de axe ales, se obțin trei ecuații scalare, astfel:

$$\begin{aligned} \text{a) în sistemul cartezian: } & m a_x = X & m\ddot{x} = X \\ & m a_y = Y & \text{sau } m\ddot{y} = Y \\ & m a_z = Z & m\ddot{z} = Z \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \text{b) în sistemul Frenet: } & m a_\tau = F_\tau & m\dot{v} = F_\tau \\ & m a_\nu = F_\nu & \text{sau } m \frac{v^2}{\rho} = F_\nu \\ & m a_\beta = F_\beta & 0 = F_\beta \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \text{c) în sistemul cilindric: } & m a_\rho = F_\rho & m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_\rho \\ & m a_\theta = F_\theta & \text{sau } m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \\ & m a_z = F_z & m\ddot{z} = F_z \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} \text{d) în sistemul polar (în plan):} & & \\ & m a_\rho = F_\rho & \text{sau } m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_\rho \\ & m a_\theta = F_\theta & m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \end{aligned} \quad (8.20)$$

În general integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării se face în același mod pentru toate sistemele de coordonate folosite. În continuare vom integra numai sistemul de ecuații diferențiale în coordonatele carteziene (8.17). Aceasta reprezintă rezolvarea primei probleme a dinamicii: când se cunosc forțele care acționează asupra punctului material (ca natură, suport, sens și mărime) și se cere să se stabilească mișcarea punctului material.

Sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării în coordonate carteziene se scrie astfel:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{y} &= Y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{z} &= Z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Acest sistem reprezintă un sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul doi, necunoscutele fiind :

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \quad (8.22)$$

Pentru a determina complet mișcarea, trebuie să fie cunoscute condițiile inițiale:

- poziția inițială $M_0(x_0, y_0, z_0)$ a punctului prin vectorul de poziție $\overline{OM}_0 = \vec{r}_0$,
- viteza sa inițială la momentul $t=t_0$, $\vec{r}'(t_0) = \vec{v}_0$ sau în proiecții pe axe:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 & \dot{x}(t_0) &= v_{0x} \\ y(t_0) &= y_0 & \text{si } \dot{y}(t_0) &= v_{0y} \\ z(t_0) &= z_0 & \dot{z}(t_0) &= v_{0z} \end{aligned} \quad (8.23)$$

unde: x_0, y_0, z_0 sunt coordonatele poziției inițiale M_0 ,

v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} sunt proiecțiile pe axe ale vitezei inițiale \vec{v}_0 .

În teoria ecuațiilor diferențiale sunt date teoreme de existență și unicitate a soluțiilor. Integralele generale (soluția generală) ale sistemului (8.21) sunt de forma:

$$\begin{aligned} x &= x(t; C_1, \dots, C_6) \\ y &= y(t; C_1, \dots, C_6) \\ z &= z(t; C_1, \dots, C_6) \end{aligned} \quad (8.24)$$

unde C_i ($i=1, 2, \dots, 6$) sunt constante arbitrare de integrare, care se determină cu ajutorul condițiilor inițiale (8.23).

Derivând în raport cu timpul ecuațiile (8.24) se obțin vitezele:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ v_y &= \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ v_z &= \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Introducând condițiile inițiale (8.23) în ecuațiile (8.24) și (8.25) se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6), & v_{0x} &= \dot{x}(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ y_0 &= y(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6), & v_{0y} &= \dot{y}(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6), \\ z_0 &= z(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6), & v_{0z} &= \dot{z}(t_0, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (8.26)$$

care reprezintă un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute: constantele de integrare C_1, \dots, C_6 ;

Rezolvând se obțin C_1, \dots, C_6 în funcție de condițiile inițiale date:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1(t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \\ C_2 &= C_2(t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots (8.27)$$

$$C_6 = C_6(t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

care introduse în soluția generală (8.24) se obține *soluția particulară căutată*:

$$\begin{aligned} x &= x(t, t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \\ y &= y(t, t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \\ z &= z(t, t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \end{aligned} \quad (8.28)$$

Acestea reprezintă *ecuațiile parametrice ale traiectoriei punctului material*.

Eliminând parametrul t din aceste ecuații se obțin *ecuațiile implicite ale traiectoriei*: $F(x, y, z) = 0$; $G(x, y, z) = 0$ (8.29)

Dacă se introduc relațiile (8.27) în (8.25) se obțin *expresiile vitezelor* în funcție de timpul t și de condițiile inițiale (8.23):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \end{aligned}$$

În cazul mișcării punctului material într-un plan (de exemplu xOy) procedând analog, se obține soluția particulară sub formă parametrică:

$$\begin{aligned} x &= x(t, t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y},) \\ y &= y(t, t_0, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y},) \end{aligned} \quad (8.30)$$

În cazul celei de-a doua probleme a dinamicii (problema inversă), când se cunoaște legea de mișcare, adică relația vectorială a traiectoriei:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \quad (8.31)$$

și se cere forța \bar{F} care produce această mișcare, se derivează de două ori relația vectorială (8.31) și se introduce rezultatul obținut în ecuația fundamentală a dinamicii, obținându-se: $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, \bar{v}, t) = m\bar{\ddot{r}}$

8.5. Mișcarea punctului material greu în câmp gravitațional neglijând rezistența aerului.

Un exemplu de mișcare a unui punct material liber este mișcarea unui corp de greutate \bar{G} și dimensiuni neglijabile, lansat la suprafața Pământului dintr-un punct O, cu viteza inițială \bar{v}_0 a cărei direcție face cu planul orizontal unghiul α .

În cazul vitezelor mici, când traiectoria efectuată se află într-un domeniu restrâns (atât ca suprafață cât și ca altitudine, comparativ cu dimensiunile globului pământesc) se poate neglija rezistența aerului și variația greutății punctului material ca intensitate (cu altitudinea) și ca direcție, deci singura forță care acționează este greutatea \bar{G} , constantă ca mărime și direcție. Alegând sistemul de axe de coordonate cartezian Oxyz, cu planul Oxy vertical, astfel încât să conțină atât viteza \bar{v}_0 cât și greutatea \bar{G} a corpului, ecuația fundamentală a dinamicii se scrie:

$$\bar{F} = \bar{G} = m\bar{g} \quad (8.32)$$

Considerând punctul material la un moment t oarecare, situat în M pe traiectoria sa (fig. 8.1) și ținând seama de (8.32), ecuația fundamentală a dinamicii se scrie:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g} \quad \text{sau} \quad \ddot{\bar{r}} = \bar{g}. \quad (8.33)$$

care proiectată pe cele trei axe conduce la :

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad \ddot{z} = 0 \quad (8.34)$$

Integrând succesiv sistemul de ecuații diferențiale (8.34) în raport cu timpul, se obține soluția generală:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1, & \dot{y} &= -gt + C_2, & \dot{z} &= C_3 \\ x &= C_1t + C_4, & y &= -g\frac{t^2}{2} + C_2t + C_5, & z &= C_3t + C_6 \end{aligned} \quad (8.35)$$

Condițiile inițiale poziția și viteza la momentul $t = 0$ sunt:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 0, & y(0) &= y_0 = 0, & z(0) &= z_0 = 0 \\ v_{0x} &= \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, & v_{0y} &= \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha, & v_{0z} &= \dot{z}(0) = 0 \end{aligned} \quad (8.36)$$

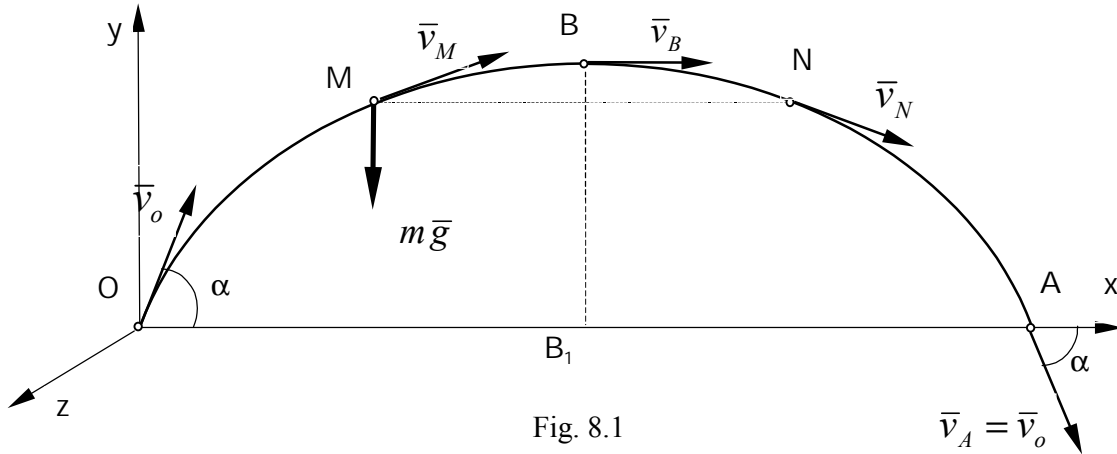


Fig. 8.1

Introducând condițiile (8.36) în soluțiile generale (8.35) se obține sistemul:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + C_1, & 0 &= 0 + 0 + C_5, & 0 &= 0 + C_6 \\ v_0 \cos \alpha &= C_1, & v_0 \sin \alpha &= 0 + C_2, & 0 &= C_3 \end{aligned} \quad (8.37)$$

care rezolvat conduce la următoarele constante de integrare:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = v_0 \sin \alpha, \quad C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0 \quad (8.38)$$

Introducând valorile (8.38) în (8.35) se obține soluția particulară căutată:

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t, \quad z = 0 \quad (8.39)$$

Ecuația $z = 0$ arată că traiectoria descrisă de punctul material este situată în planul vertical (Oxy) care conține vectorul \bar{v}_0 . În continuare interesează numai primele două ecuații din (8.39).

Eliminând timpul din ecuațiile (8.39) se găsește ecuația traiectoriei sub formă explicită:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.40)$$

ecuație ce reprezintă o parabolă cu axa de simetrie verticală (fig. 8.1).

În continuare, se obțin diferite elemente caracteristice ale acestei mișcări:

- distanța OA dintre punctul de lansare O și punctul A unde traiectoria întâlnește din nou axa Ox , numită *bătaie* și care se obține făcând $y = 0$ în ecuația (8.40):

$$OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (8.41)$$

Se observă modul cum depinde bătaia de viteza inițială v_0 și de unghiul α : de exemplu, dacă v_0 este constantă, OA devine maximă pentru $(\sin 2\alpha)_{\max}$, adică pentru $\sin 2\alpha = 1$, sau $\alpha = 45^\circ$, adică: $(OA)_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$. (8.42)

- înălțimea maximă atinsă de mobil, care se obține din condiția:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} 2x + \operatorname{tg} \alpha = 0$$

de unde se deduce abscisa punctului B de înălțime maximă:

$$x_B = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}. \quad (8.43)$$

Se mai observă că $x_B = OB_1 = \frac{OA}{2}$, datorită proprietăților de simetrie ale parabolei. Ordonata punctului B (sau înălțimea maximă) se obține înlocuind (8.43)

în (8.40): $y_{\max} = B_1B = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. (8.44)

Evident, înălțimea maximă depinde de viteza v_0 și de unghiul α , ca și bătaia, atingând valoarea maximă (la același v_0) pentru $\sin \alpha = 1$, adică $\alpha = 90^\circ$, adică pentru lansarea pe verticală, când se obține: $(B_1B)_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$. (8.45)

Din relația (8.39) se deduc, prin derivare, relațiile:

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha; \quad \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha, \quad \dot{z} = 0. \quad (8.46)$$

deci:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gy} \quad (8.47)$$

Expresia (8.47) arată că în două puncte M și N de aceeași înălțime y viteza este aceeași ca mărime ($v_M = v_N$) (fig.8.1). În ceea ce privește direcțiile celor două viteze, vectorii v_M și v_N sunt egal înclinați față de axa Ox ($\alpha_M = \alpha_N$), datorită proprietăților de simetrie a punctelor M și N față de verticala punctului de înălțime maximă.

8.6. Mișcarea punctului material greu când se ține seama de rezistența aerului.

Rezultatele obținute la problema precedentă (în ipoteza unui punct material care se mișcă la suprafața Pământului, fără rezistența aerului) sunt aproximative, deoarece *rezistența pe care o opune aerul* în timpul mișcării influențează mult mișcarea lui.

În general, la mișcarea punctului material în mediu rezistent (care poate fi aerul, apa sau alt lichid sau fluid) asupra lui acționează o *forță rezistentă* care are aceeași direcție cu cea a vitezei și sens contrar acesteia.

Notând cu \bar{R} forța rezistentă, cu \bar{v} viteza și cu $\bar{\tau} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$, versorul vitezei, avem:

$$\bar{R} = -f(v) \cdot \bar{v} / |\bar{v}| = -f(v) \cdot \bar{\tau} \quad (8.48)$$

În general funcția de viteză $f(v)$, din forța de rezistență a aerului are expresia:

$$f(v) = kmv^n. \quad (8.49)$$

Valorile exponentului n se determină experimental și depind de valoarea vitezei (de exemplu la viteze mari n crește). De exemplu:

- pentru $v < 1 \frac{m}{s} \Rightarrow f(v) = k_1 v$,
- pentru $1 \frac{m}{s} < v < 250 \frac{m}{s} \Rightarrow f(v) = k_2 v^2$.

Valorile coeficientului k depind și de forma (aerodinamică a) corpului.

În acest caz, ecuațiile diferențiale ale mișcării devin neliniare și se integrează destul de anevoios, folosindu-se de obicei metode aproximative.

8.6.1. Mișcarea punctului material aruncat vertical în aer

Se consideră mișcarea ascendentă a unui punct material de masă m aruncat pe verticală în sus cu viteza inițială v_0 (fig. 8.2). Se admite că viteza este suficient de mică, încât să se poată lua conform (8.50) pentru forța de rezistență a aerului expresia: $\bar{R} = -km\bar{v}$ (8.50)

Se alege axa Ox în sensul mișcării, cu originea în poziția inițială (fig. 8.2).

Ecuția diferențială a mișcării se scrie :

$$m\ddot{x} = -mg - km\dot{x}$$

sau după simplificarea cu m :

$$\ddot{x} + k\dot{x} = -g. \quad (8.51)$$

Pentru ecuația omogenă $\ddot{x} + k\dot{x} = 0$,

se încercă o soluție de forma: $x = C e^{rt}$ și se obține

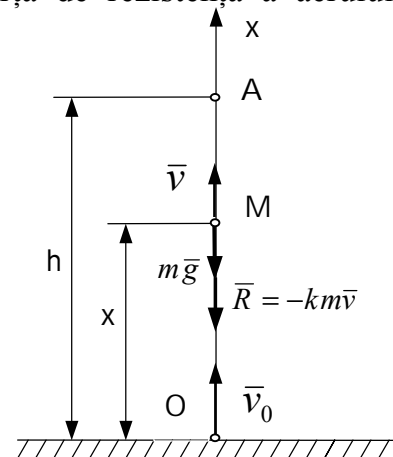


Fig.8.2

ecuația caracteristică: $r^2 + kr = 0$, cu rădăcinile: $r_1 = 0$, $r_2 = -k$

Soluția generală a ecuației omogene se scrie astfel:

$$x_{om} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 + C_2 e^{-kt}, \quad (8.52)$$

O soluție particulară a ecuației neomogene (8.51) este:

$$x_p = -gt / k \quad (8.53)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale neomogene (8.51) se scrie deci sub forma:

$$x = x_{om} + x_p = C_1 + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k} t \quad (8.54)$$

Derivând în raport cu timpul relația (8.54) se obține legea vitezei:

$$\dot{x} = -C_2 k e^{-kt} - \frac{g}{k}. \quad (8.55)$$

Dacă se introduc condițiile inițiale pentru $t = 0$: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, (8.56)

în relațiile (8.54) și (8.55), se obțin constantele de integrare C_1 și C_2 :

$$C_1 = \frac{g + kv_0}{k^2}, \quad C_2 = -\frac{g + kv_0}{k^2}.$$

Legea de mișcare în acest caz este:

$$x(t) = \frac{g + kv_0}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t; \quad (8.57)$$

iar legea vitezei se scrie: $v(t) = \frac{g + kv_0}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}$; (8.57')

Punând condiția din punctul A, corespunzătoare înălțimii maxime $x_{max} = h$ unde viteza se anulează, din expresia vitezei rezultă timpul t_A scurs de la lansare

până la oprire: $0 = \frac{g + kv_0}{k} e^{-kt_A} - \frac{g}{k} \Rightarrow t_A = \frac{1}{k} \ln \frac{g + kv_0}{g}$. (8.58)

Înlocuind t_A în legea de mișcare (8.57) rezultă înălțimea maximă:

$$x_{max} = h = \frac{v_0}{k} - \frac{g}{k^2} \ln \frac{g + kv_0}{g} \quad (8.59)$$

Mișcarea descendentă se studiază analog. Viteza cu care punctul atinge solul este evident mai mică decât viteza inițială v_0 .

8.6.2. Mișcarea punctului material aruncat oblic în aer.

Se consideră punctul material de masă m , aruncat oblic cu viteza \bar{v}_0 înclinată cu unghiul α față de orizontală (fig. 8.3).

Alegând convenabil sistemul de axe de coordonate cartezian Oxyz, cu planul Oxy vertical, astfel încât să conțină viteza \bar{v}_0 și greutatea \bar{G} a corpului, singurele forțe ce acționează asupra punctului material sunt greutatea \bar{G} și forța de rezistență a aerului \bar{R} . Ecuația fundamentală a dinamicii se scrie: $m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} + \bar{R}$

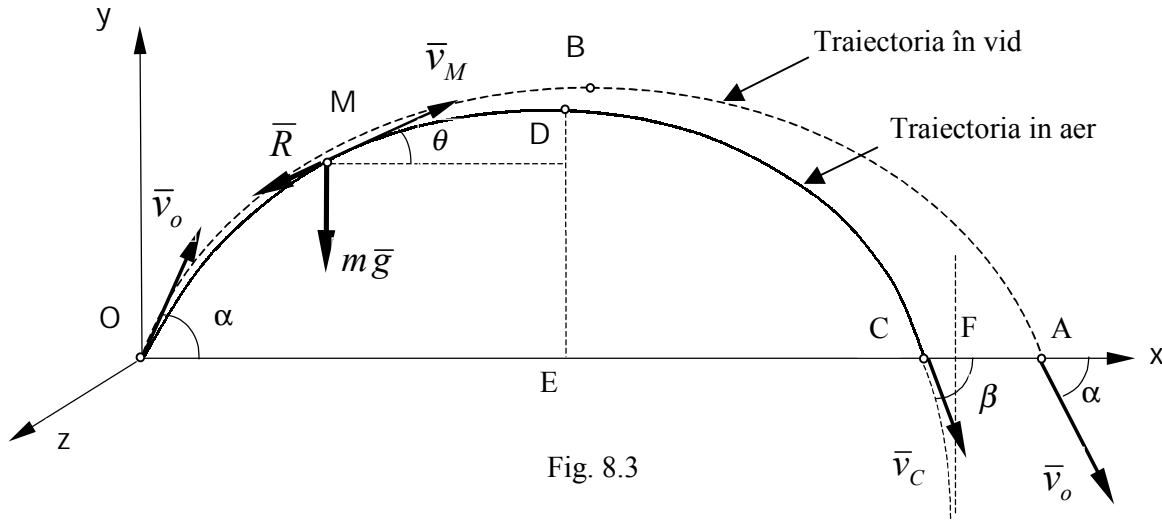


Fig. 8.3

Admițând că viteza este suficient de mică, atunci conform (8.50), se poate lua pentru forța de rezistență a aerului: $\bar{R} = -km\bar{v}$ și descompunând \bar{R} în componentele sale după axele de coordonate:

$$R_x = -km \dot{x}; \quad R_y = -km \dot{y}; \quad R_z = 0 \quad (8.60)$$

atunci ecuațiile diferențiale ale mișcării în proiecție pe cele trei axe sunt:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -km\dot{x} & \ddot{x} + k\dot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= -km\dot{y} - mg & \text{sau} & \quad \ddot{y} + k\dot{y} = -g \\ m\ddot{z} &= 0 & \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \quad (8.61)$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare primelor două ecuații omogene reprezentate de (8.61) este $r^2 + kr = 0$ având soluțiile: $r_1 = 0$ și $r_2 = -k$.

Ținând seama de rezultatele obținute în paragraful anterior, soluțiile generale ale ecuațiilor (8.61), adică ecuațiile parametriche ale traiectoriei, sunt:

$$x = C_1 + C_2 e^{-kt}; \quad y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}t; \quad z = C_5 + C_6 t \quad (8.62)$$

prin derivare rezultă vitezele

$$\dot{x} = -kC_2 e^{-kt}; \quad \dot{y} = -kC_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}; \quad \dot{z} = C_6 \quad (8.62')$$

Condițiile inițiale (poziția și viteza punctului pentru $t=0$) sunt :

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & y(0) &= 0 & z(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \cos \alpha, & \dot{y}(0) &= v_0 \sin \alpha, & \dot{z}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (8.63)$$

și dacă se introduc în ecuațiile (8.62) și (8.62') se obțin constantele de integrare:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{v_0 \cos \alpha}{k}, & C_2 &= -\frac{v_0 \cos \alpha}{k}, & C_3 &= \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{k^2}, \\ C_4 &= -\frac{g + kv_0 \sin \alpha}{k^2}, & C_5 &= C_6 = 0 \end{aligned}$$

Ecuațiile (8.62) devin:

$$\begin{cases} x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}); \\ y = \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t; \\ z = 0 \end{cases} \quad (8.64)$$

Acestea sunt *ecuațiile parametrice ale mișcării* punctului material greu aruncat oblic în aer. Se observă că traiectoria punctului este cuprinsă în planul Oxy, determinat de viteza inițială \bar{v}_0 , greutatea \bar{G} și forța de rezistență a aerului \bar{R} . Eliminând timpul din primele două ecuații (8.64) se obține ecuația traiectoriei sub formă explicită:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx}{kv_0 \cos \alpha} + \frac{g}{k} \ln \left(1 - \frac{kx}{v_0 \cos \alpha} \right) \quad (8.65)$$

Se observă că curba traiectoriei admite o asimptotă verticală a cărei ecuație se deduce când $t \rightarrow \infty$ în ecuațiile parametrice (8.64):

$$x = x_F = \frac{v_0 \cos \alpha}{k}.$$

Prin derivarea relațiilor (8.64) se deduc componentele vitezei:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \cos \alpha e^{-kt}; \\ \dot{y} &= \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}; \quad \dot{z} = 0 \end{aligned} \quad (8.66)$$

Punând condiția $\dot{y} = 0$, se găsește punctul de înălțime maximă D al traiectoriei.

Deci timpul necesar deplasării din O în D este:

$$t_D = \frac{1}{k} \ln \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{g}. \quad (8.67)$$

Înlocuind în expresia (8.64) se obține:

- înălțimea maximă a traiectoriei:

$$y_{\max} = y_D = \frac{v_0 \sin \alpha}{k} - \frac{g}{k^2} \ln \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{g} \quad (8.68)$$

- abscisa corespunzătoare este :

$$x_D = x_E = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g + kv_0 \sin \alpha} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2(g + kv_0 \sin \alpha)}. \quad (8.69)$$

8.7. Dinamica punctului material supus la legături

Așa cum am văzut în capitolul 2, un punct material aflat în echilibru este supus la legături dacă i se impun anumite restricții geometrice. În cazul dinamicii, existența legăturilor obligă punctul material să rămână tot timpul mișcării lui pe o curbă $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$, sau pe o suprafață $h(x,y,z)=0$. Punctul material supus legăturilor pierde din numărul gradelor de libertate cinematică pe care le are când este liber (trei).

Legăturile punctului material pot fi:

- *bilaterale*, dacă acesta nu poate părăsi curba sau suprafața oricare ar fi forțele care acționează asupra lui. De exemplu, se poate realiza o legătură bilaterală dacă o bilă este obligată să se deplaseze în interiorul unui tub circular de diametru egal diametrul bilei (în limitele unor toleranțe de alunecare, fig. 8.4.a)
- *unilaterale*, dacă acesta nu poate părăsi curba sau suprafața decât într-un singur sens. De exemplu, se poate realiza legătură unilaterală dacă punctul material este legat cu un fir inextensibil (fig. 8.4,b) sau dacă este obligat să se deplaseze pe suprafața exterioară sau interioară a unui cilindru (fig. 8.4.c ,d).

În studiul dinamicii punctului material supus la legături, ca și în statică, se aplică *axioma legăturilor*, înlocuindu-se legătura cu o *forță de legătură (sau reacțiune)* și se tratează în continuare problema ca și în cazul punctului material liber, aplicând *ecuația fundamentală a dinamicii* în care apare rezultanta forțelor date și de legătură.

În dinamica punctului material supus la legături, necunoscutele problemei sunt: legea de mișcare și forțele de legătură.

Notând cu $\bar{F}^{(a)}$ rezultanta forțelor direct aplicate (date) și cu $\bar{F}^{(leg)}$ rezultanta forțelor de legătură, *ecuația de mișcare a punctului material supus la legături* se scrie:

$$m\bar{a} = \bar{F}^{(a)} + \bar{F}^{(leg)} \quad (8.70)$$

care, proiectată pe un sistem de axe conduce la ecuațiile diferențiale:

- în sistemul de coordonate carteziene:

$$m\ddot{x} = X^{(a)} + X^{(leg)}; \quad m\ddot{y} = Y^{(a)} + Y^{(leg)}; \quad m\ddot{z} = Z^{(a)} + Z^{(leg)}. \quad (8.71)$$

- în sistemul de coordonate Frenet:

$$m\dot{v} = F_{\tau}^{(a)} + F_{\tau}^{(leg)}; \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_{\nu}^{(a)} + F_{\nu}^{(leg)}; \quad 0 = F_{\beta}^{(a)} + F_{\beta}^{(leg)} \quad (8.72)$$

În cazul unei legături ideale (fără frecare) forța de legătură $\bar{F}^{(leg)}$ este egală cu reacțiunea \bar{N} , normală în punctul respectiv, la planul tangent la suprafață sau curbă:

$$\bar{F}^{(leg)} = \bar{N} \quad (8.73)$$

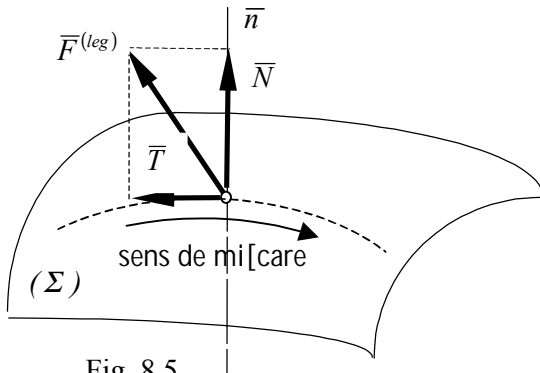


Fig. 8.5.

În cazul legăturilor cu frecare ale punctului material, aflat pe o suprafață (fig.8.5) sau pe o curbă, forța de legătură are două componente: reacțiunea normală \bar{N} și forța tangențială \bar{T} , generată de frecarea de alunecare dintre suprafața sau curba de legătură a punctul material, adică:

$$\bar{F}^{(leg)} = \bar{N} + \bar{T}. \quad (8.74)$$

Așadar prin înlăturarea legăturii, punctul va fi acționat de forțele $\bar{F}^{(a)}$ și $\bar{F}^{(leg)}$ și poate fi privit ca un punct material liber, iar pentru studiul mișcării se utilizează ecuația fundamentală a dinamicii sub forma:

$$m\bar{a} = \bar{F}^{(a)} + \bar{N} + \bar{T} \quad (8.75)$$

care este echivalentă cu trei ecuații scalare ale proiecțiilor pe cele trei axe.

Necunoscutele problemei sunt: reacțiunile $\bar{N} = \bar{N}(t)$, $\bar{T} = \bar{T}(t)$ și legea de mișcare: $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Forța de frecare limită \bar{T} , în cazul frecării uscate, se scrie:

$$|\bar{T}| = \mu |\bar{N}|. \quad (8.76)$$

Ținând seama că forța de frecare se opune tot timpul mișcării punctului, expresia forței de frecare ca vector este: $\bar{T} = -|\bar{T}| \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = -\mu |\bar{N}| \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$.

Problema determinării mișcării punctului material supus la legături și a forțelor de legătură se rezolvă în principiu, cu ajutorul:

- *ecuației fundamentale ale dinamicii* (ecuația (8.75) proiectată pe axe);
- *ecuației fizice a frecării* (8.76);
- *condițiilor geometrice ale mișcării* (ecuația suprafeței de legătură: $F(x, y, z) = 0$ sau a curbei de legătură: $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$);
- *condițiilor inițiale* ale mișcării (poziția și viteza punctului material supus la legături, la momentul inițial).

Observații

1. În cazul punctului material de masă m , supus la legături fără frecare pe o suprafață a cărei ecuație este: $f(x, y, z) = 0$, reacțiunea normală \bar{N} este dirijată după normala \bar{n} la planul tangent la suprafața respectivă, astfel că se poate scrie:

$$\bar{N} = \lambda' \bar{n} = \lambda' \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \lambda \cdot \text{grad } f$$

Ecuția de mișcare (8.75) pentru cazul legăturilor fără frecare se scrie:

$$m\bar{a} = \bar{F}^{(a)} + \lambda \cdot \text{grad } f$$

iar în proiecții pe axele triedrului Oxyz:

$$m\ddot{x} = X^{(a)} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = Y^{(a)} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad m\ddot{z} = Z^{(a)} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

Acest sistem, împreună cu ecuația suprafeței $f(x, y, z) = 0$, reprezintă un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \text{ și } \lambda.$$

Determinându-se λ se poate determina reacțiunea normală \bar{N} .

Dacă se cunoaște traiectoria, se elimină λ din sistemul de mai sus și rezultă:

$$\frac{m\ddot{x} - X^{(a)}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{m\ddot{y} - Y^{(a)}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{m\ddot{z} - Z^{(a)}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Aceste două ecuații diferențiale, împreună cu ecuația suprafeței $f(x, y, z) = 0$ reprezintă un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \text{ reprezentând ecuațiile parametrice ale traiectoriei.}$$

2. În cazul punctului material de masă m , supus la legături fără frecare pe o curbă de ecuații: $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, reacțiunea normală \bar{N} are expresia:

$$\bar{N} = \lambda_1 \cdot \text{grad } f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad } f_2$$

Ecuția de mișcare (8.75) pentru cazul legăturilor fără frecare se scrie în acest caz:

$$m\bar{a} = \bar{F}^{(a)} + \lambda_1 \cdot \text{grad } f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad } f_2$$

iar în proiecții pe axele triedrului Oxyz:

$$m\ddot{x} = X^{(a)} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = Y^{(a)} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$m\ddot{z} = Z^{(a)} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

Acest sistem, împreună cu ecuațiile curbei $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, reprezintă un sistem de cinci ecuații cu cinci necunoscute:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \lambda_1 \text{ și } \lambda_2.$$

Determinându-se λ se poate determina reacțiunea normală \bar{N} .

În cazul mișcării punctului material pe o curbă se folosesc adesea ecuațiile de mișcare scrise în coordonate Frenet (8.72). Mișcarea punctului material pe o curbă sau suprafață se mai poate studia și cu ajutorul teoremelor generale ale dinamicii.

3. În cazul mișcării punctului material pe un contur rectiliniu cu frecare, legea fizică (8.76) este scrisă analitic, în general sub forma:

$$\bar{T} = -\mu |\bar{N}| \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = -\mu |\bar{N}| \frac{\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

Dacă de-alungul conturului rectiliniu se ia axa Ox atunci avem: $y = z = 0$ și $\dot{y} = \dot{z} = 0$, prin urmare expresia forței de frecare devine:

$$\bar{T} = -\mu |\bar{N}| \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \bar{i}, \quad \text{deci mărimea forței de frecare este: } |\bar{T}| = \mu |\bar{N}|.$$

Aplicație

Să se studieze mișcarea unui punct material de masă m pe un plan înclinat cu unghiul α , coeficientul de frecare fiind μ (fig. 8.6). Punctul pleacă din A fără viteza inițială ($v_A = 0$) pe linia de cea mai mare pantă. Se cere să se determine legea de mișcare, timpul și viteza cu care ajunge într-un punct B situat la distanța L față de A .

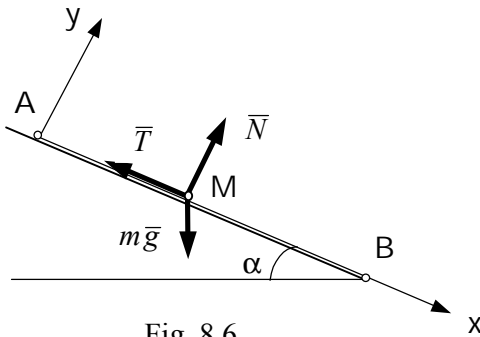


Fig. 8.6

Rezolvare.

Se alege sistemul de axe din figura 8.6, și se eliberează punctul de legături, conform axiomei legăturilor, introducându-se forțele de legătură \bar{N} și \bar{T} ($T = \mu N$).

Cu sistemul de axe astfel ales se observă că ecuația traiectoriei (condiția geometrică) este: $y = 0$

Ecuația diferențială a mișcării în proiecții pe axe se scrie:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - T; \quad m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + N,$$

de unde, din condiția geometrică rezultă $\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = 0$, obținem:

$$N = mg \cos \alpha; \quad \ddot{x} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Integrând succesiv de două ori ultima ecuație, avem:

$$\dot{x} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t + C_1,$$

$$x = \frac{1}{2}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)gt^2 + C_1t + C_2.$$

Condițiile la momentul inițial ($t = 0$) sunt: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ de unde rezultă constantele de integrare: $C_1 = C_2 = 0$; legea de mișcare este dată de:

$$x = \frac{1}{2}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)gt^2$$

și legea vitezei punctului material este dată de: $\dot{x} = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)gt$.

În punctul B deplasarea este: $x_B = L$ și rezultă t_B și v_B :

$$t_B = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}; \quad v_B = \sqrt{2gL(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

8.8. Pendulul simplu (matematic)

8.8.1. Stabilirea ecuațiilor de mișcare. Tensiunea din fir.

Pendulul matematic reprezintă un punct material de masă m , care se deplasează pe o traiectorie circulară de rază L (lungimea firului) situată în planul vertical. Viteza inițială este v_0 situată în planul vertical. Mișcarea se studiază în coordonate Frenet (fig. 8.7). Ecuația fundamentală a dinamicii: $m\vec{r} = m\vec{g} + \vec{S}$ se proiectează pe axele triedrului natural astfel:

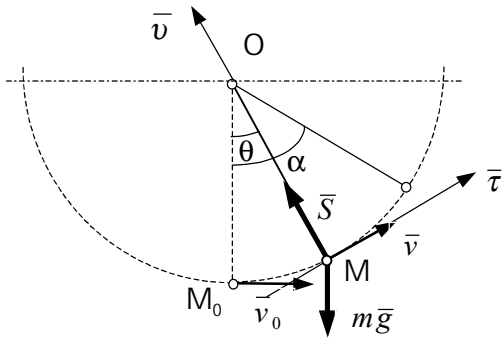


Fig. 8.7

$$m\dot{v} = -mg \sin \theta$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = -mg \cos \theta + S \quad (8.77)$$

Ținând seama de condițiile geometrice:

$$z = 0, \quad \rho = L \quad (8.78)$$

precum și de expresia vitezei și a derivatei sale: $v = L\omega = L\dot{\theta}$, $\dot{v} = L\ddot{\theta}$ (8.79)

Ecuațiile (8.77) devin:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (8.80)$$

$$S = m(g \cos \theta + L\dot{\theta}^2) \quad (8.81)$$

Înmulțind ecuația (8.80) cu $\dot{\theta}$ se obține ecuația diferențială :

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta \cdot \dot{\theta} = 0, \quad \text{sau} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta \right) = 0. \quad (8.81')$$

care prin integrare conduce la: $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta = C$ (8.82)

Constanta de integrare C se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \Rightarrow \theta(0) = 0; \quad v(0) = v_0 = (L\dot{\theta})_0 \quad \text{sau} \quad (\dot{\theta})_0 = \frac{v_0}{L} \quad (8.83)$$

rezultă: $C = \frac{v_0^2}{2L^2} - \frac{g}{L}$. (8.84)

Înlocuind valoarea constantei C în (8.82), se obține legea de mișcare, sub forma vitezei unghiulare ($\dot{\theta} = \omega$) în funcție de unghiul θ :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta = \frac{v_0^2}{2L^2} - \frac{g}{L} \quad \text{sau:} \quad \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{L^2} - \frac{2g}{L} (1 - \cos \theta). \quad (8.85)$$

Înmulțind această relație cu L^2 se obține legea de mișcare a vitezei în funcție de unghiul θ :

$$v^2 = v_0^2 - 2gL(1 - \cos \theta) \quad (8.85')$$

Tensiunea în fir S , se calculează din ecuația (8.81), ținând seama de (8.85) :

$$S = \frac{mv_0^2}{L} + mg(3 \cos \theta - 2) \quad (8.86)$$

8.8.2. Cazul micilor oscilații ale pendulului simplu

Prin micile oscilații se înțelege cazul când $\theta \leq 4^\circ \dots 5^\circ$, deci se poate face aproximația: $\sin\theta \approx \theta$ și ecuația pendulului (8.80) devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0. \quad (8.87)$$

Aceasta este o ecuație diferențială omogenă cu coeficienți constanți a cărei soluție este de forma: $\theta = Ce^{rt}$, obținându-se ecuația caracteristică $r^2 + g/L = 0$; ecuația caracteristică are rădăcinile: $r_{1,2} = \pm i\sqrt{g/L} = \pm ip$, unde cu p s-a notat pulsația mișcării oscilatorii. Deci soluția generală a ecuației diferențiale (8.87) este:

$$\theta = C_1 e^{ipt} + C_2 e^{-ipt}, \quad (8.88)$$

unde: C_1 și C_2 sunt constante de integrare complexe care se determină din condițiile inițiale.

Pentru a evita prezența mărimilor complexe în expresia soluției generale, se înlocuiesc funcțiile exponențiale prin funcții trigonometrice, conform formulelor cunoscute: $e^{ipt} = \cos pt + i \sin pt$; $e^{-ipt} = \cos pt - i \sin pt$.

Soluția generală capătă astfel forma reală:

$$\theta = A \cos pt + B \sin pt \quad (8.89)$$

Derivând (8.89) în raport cu timpul se obține viteza unghiulară:

$$\dot{\theta} = -Ap \sin pt + Bp \cos pt \quad (8.90)$$

și introducând condițiile inițiale:

$$t = 0 \Rightarrow \theta(0) = 0; \quad v(0) = v_0 = (L\dot{\theta})_0, \quad (\dot{\theta})_0 = \frac{v_0}{L} \quad (8.91)$$

se obțin constantele de integrare A și B : $A = 0, \quad B = \frac{v_0}{pL}$.

Deci, legea de mișcare în cazul micilor oscilații este:

$$\theta = \frac{v_0}{pL} \sin pt = \frac{v_0}{\sqrt{Lg}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) \quad (8.92)$$

ecuație care reprezintă o mișcare oscilatorie armonică a cărei perioadă este:

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (8.93)$$

Formula (8.93) arată că perioada este independentă de amplitudine și oscilațiile pendulului matematic la diferite amplitudini $\theta_0 = \frac{v_0}{\sqrt{Lg}}$ sunt izocrone.

Dacă la momentul inițial $t = 0$, avem $\theta(0) = \theta_0$, atunci legea de mișcare în cazul micilor oscilații este: $\dot{\theta} = \frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \frac{v_0^2}{L}$ și soluția generală a ecuației (8.87) este tot de forma armonică: $\theta = a \cdot \cos(pt - \varphi)$.

8.9. Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Se consideră sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= Y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= Z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned} \quad (8.94)$$

Se știe din matematică faptul că integrarea acestui sistem de ecuații este mult ușurată, dacă se cunosc una sau mai multe *integrale prime*, adică relații de forma: $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = C$, (8.95)

care au loc în virtutea sistemului însuși, C fiind o constantă arbitrară.

De remarcat că putem avea cel mult șase integrale prime distincte, de forma:

$$f_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = C_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (8.96)$$

astfel ca determinantul funcțional al funcțiilor f_i față de variabilele $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ să fie nenul. Integrala primă de mai sus se numește în mecanică *integrala primă a mișcării* și ea poate fi obținută (în anumite condiții) cu ajutorul teoremelor generale ale dinamicii: **teorema impulsului**, **teorema momentului cinetic** și **teorema energiei cinetice**, pe care le vom prezenta în cele ce urmează.

8.9.1. Teorema impulsului

Se definește *impuls* sau *cantitate de mișcare* a unui punct material A de masă m și viteză \bar{v} la momentul t , față de un reper considerat, vectorul (fig.8.8)

$$\bar{H} = m\bar{v}, \quad (8.97)$$

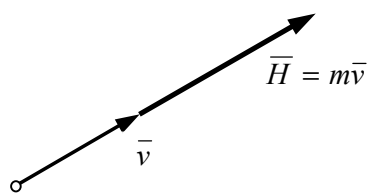
care are același punct de aplicație, aceeași direcție și sens ca și viteza \bar{v} a punctului și mărimea $m|\bar{v}|$.

Dimensiunea impulsului este: $[H] = [mv] = MLT^{-1}$. (8.98)

Derivând (8.97) în raport cu timpul:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a}$$

și ținând seama de ecuația fundamentală $m\bar{a} = \bar{F}$, rezultă **teorema impulsului**:



A (m)

Fig. 8.8

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{F} \quad \text{sau} \quad \dot{\bar{H}} = \bar{F} \quad (8.99)$$

care se enunță astfel: “*derivata în raport cu timpul a impulsului punctului este egală cu suma forțelor care acționează asupra lui (rezultanta forțelor date și de legătură)*”.

Proiectând pe axe relația (8.99) se obțin relațiile scalare:

$$\dot{H}_x = X, \quad \dot{H}_y = Y, \quad \dot{H}_z = Z. \quad (8.100)$$

Se observe că teorema impulsului conduce la o *integrală primă* dacă $\bar{F} = 0$ (cazul punctului izolat sau de rezultantă nulă), în acest caz obținându-se **teorema conservării impulsului**:

$$\bar{H} = \bar{C}$$

adică, “în absența forței \bar{F} impulsul unui punct se conservă, adică rămâne constant în timp”. Constanta vectorială \bar{C} se determină din condițiile inițiale ale problemei.

În unele probleme este posibil să se conserve o singură componentă a impulsului (de exemplu: dacă $X = 0$ atunci $\dot{H}_x = 0$ și deci $H_x = C$, caz în care se conservă componenta impulsului după Ox).

Aplicație

Un punct material de greutate $G = mg$ se află în repaus pe un plan orizontal aspru (coeficientul de frecare de alunecare este μ). Cât timp trebuie să acționeze o forță \bar{P} orizontală și constantă pentru ca punctul să atingă viteza v (fig.8.9)

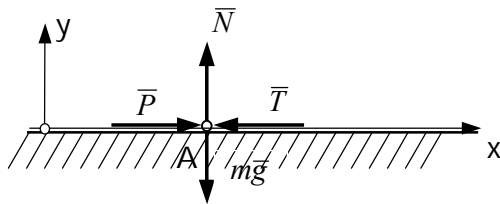


Fig. 8.9

Rezolvare

Se alege planul vertical xOy astfel încât mișcarea se produce după axa Ox (fig.8.9). Se aplică teorema impulsului în proiecții pe cele două axe:

$$\dot{H}_x = X, \quad \dot{H}_y = Y$$

relații care conduc, în cazul de față al mișcării cu frecare, la ecuațiile:

$$\frac{dH_x}{dt} = P - T; \quad 0 = -mg + N; \quad T = \mu N$$

$$\text{sau} \quad \begin{cases} dH_x = (P - \mu N)dt \\ N = mg \end{cases}$$

Integrând prima ecuație în intervalul $[t_1, t_2]$ se obține:

$$H_{x_2} - H_{x_1} = (P - \mu mg)(t_2 - t_1)$$

de unde, deoarece: $H_{x_2} = mv$, $H_{x_1} = 0$, $t_2 - t_1 = t$,

rezultă timpul căutat:

$$t = \frac{mv}{P - \mu mg} = \frac{Gv}{g(P - \mu G)}$$

8.9.2. Teorema momentului cinetic

Se definește *momentul cinetic*, al unui punct material A de masă m și viteză v , în raport cu punctul O , momentul impulsului acestui punct calculat în raport cu punctul O (fig. 8.10):

$$\bar{K}_O = \bar{r} \times \bar{H} \quad \text{sau} \quad \bar{K}_O = \bar{r} \times m\bar{v} \quad (8.101)$$

Derivând expresia vectorială (8.101) în raport cu timpul, obținem:

$$\dot{\bar{K}}_O = \frac{d\bar{K}_O}{dt} = \dot{\bar{r}} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\dot{\bar{v}} = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_O(\bar{F})$$

deci, **teorema momentului cinetic** se scrie:

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{M}_O \quad (8.102)$$

și se enunță astfel: "*derivata în raport cu timpul a momentului cinetic, calculat în raport cu un punct O , este egal cu momentul rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material (forțe date și de legătură), calculat în raport cu același punctul O* ".

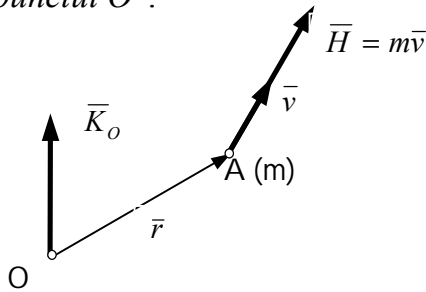


Fig. 8.10

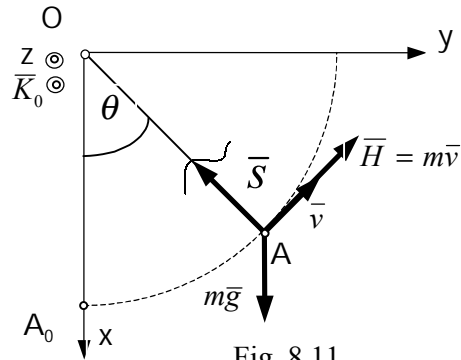


Fig. 8.11

Proiectând pe axe relația (8.102) se obțin ecuațiile:

$$\dot{K}_{Ox} = L, \quad \dot{K}_{Oy} = M, \quad \dot{K}_{Oz} = N \quad (8.103)$$

Se observă că această teoremă conduce la o integrală primară dacă $\bar{M}_O = 0$ (punctul este izolat în spațiu sau momentul resultant este nul, $\bar{r} \times \bar{F} = 0$, în acest caz obținându-se **teorema conservării impulsului**:

$$\dot{\bar{K}}_O = 0 \quad \text{sau} \quad \bar{K}_O = \bar{C}.$$

care are următorul enunț: "*momentul cinetic al unui punct material rămâne constant atât timp cât momentul forțelor care acționează asupra lui este nul*".

Constanta \bar{C} se determină din condițiile inițiale ale problemei. Condiția de conservare a momentului cinetic este îndeplinită, de exemplu, în cazul unui punct material acționat de o forță centrală.

Ca și la teorema conservării impulsului se poate conserva o singură componentă a momentului cinetic, de exemplu, dacă $N = 0$, atunci:

$$\dot{K}_{Oz} = 0, \quad \text{de unde} \quad K_{Oz} = C, \quad (8.104)$$

În acest caz, conservându-se numai componenta momentului cinetic după axa Oz , avem o interpretare interesantă a integralei prime (8.104). Astfel dacă ținem seama de expresiile analitice ale vectorilor, momentul cinetic se scrie:

$$\bar{K}_o = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \text{ și se deduce: } K_{oz} = m(xy - y\dot{x})$$

Trecând din coordonatele carteziene în coordonate polare:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \text{unde: } r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

și calculând: $\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \cdot \dot{\theta}$; $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta \cdot \dot{\theta}$

se obține: $K_{oz} = mr^2\dot{\theta}$. (8.105)

Din relațiile (8.104) și (8.105) rezultă: $mr^2\dot{\theta} = \text{const}$

Am văzut la paragraful 7.2.5 că $r^2\dot{\theta} / 2 = \Omega$ reprezintă viteza areolară, deci se poate afirma că: “dacă componenta momentului cinetic al unui punct după o axă se conservă, punctul material se deplasează într-un plan perpendicular pe acea axă cu viteza areolară constantă, adică se respectă legea ariilor: vectorul de poziție al punctului mătură arii egale în timpi egali”.

Aplicație

Să se aplice teorema momentului cinetic la studiul mișcării pendulului matematic (fig. 8.11)

Rezolvare

Se aleg axele de coordonate astfel încât axa Ox să fie poziția inițială de la care se măsoară unghiul θ crescător, axa Oz în același sens cu momentul cinetic \bar{K}_o , iar axa Oy rezultă astfel ca sistemul de axe ales $Oxyz$ să fie drept ($OA=L$).

Teorema momentului cinetic (8.102) proiectată după axa Oz este: $\dot{K}_{oz} = N$.

Deoarece: $\bar{K}_o = \overline{OA} \times m\bar{v}$, avem numai componenta după Oz :

$$K_{oz} = Lmv = LmL\dot{\theta} = mL^2\dot{\theta} \quad \text{și deci: } \dot{K}_{oz} = mL^2\ddot{\theta},$$

Momentul forțelor față de Oz este: $\bar{M}_o = \overline{OA} \times (m\bar{g} + \bar{S}) = -mgL\sin\theta \cdot \bar{k}$
deci avem numai o componentă, după Oz : $N = -mgL\sin\theta$

Teorema momentului cinetic devine:

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta \quad \text{sau} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0,$$

care reprezintă tocmai ecuația diferențială a pendulului (8.80).

8.9.3. Energia cinetică. Lucrul mecanic.

Teorema energiei cinetice.

Se definește *energia cinetică* (sau *energie de mișcare*) a unui punct material A de masă m și viteză v expresia :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8.106)$$

Dimensiunea energiei cinetice este: $[E] = ML^2T^{-2}$.

Unitatea de măsură pentru energia cinetică este *Joule-ul* (J).

Fie un punct material (particulă materială) A care se deplasează pe o curbă (C) în spațiu, astfel încât la momentul t poziția lui A este definită de vectorul de poziție \vec{r} , iar la momentul $t_1 = t + dt$ poziția respectivă a punctului A_1 , este definitivă de vectorul de poziție $\vec{r}_1 = \vec{r} + d\vec{r}$, $d\vec{r}$ reprezentând deplasarea elementară a punctului material, în timpul dt (fig. 8.12).

Asupra punctului acționează forța \vec{F} .

Se numește *lucru mecanic elementar al forței \vec{F}* , corespunzător deplasării $d\vec{r}$, produsul scalar dintre forță și deplasarea elementară $d\vec{r}$:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (8.107)$$

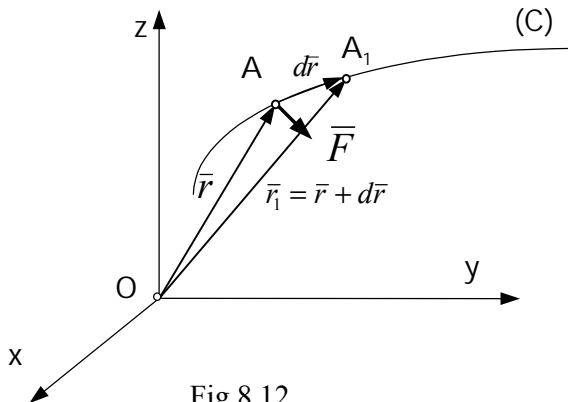


Fig.8.12

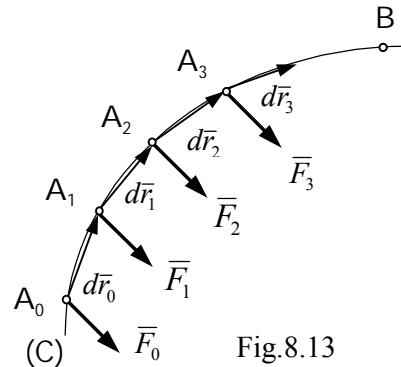


Fig.8.13

Lucrul mecanic este o mărime scalară, exprimată în *Joule*, cu ecuația dimensională: $[L] = L^2MT^{-2}$.

Ținând seama de faptul că:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = |d\vec{r}| \cdot pr_{\vec{F}} \vec{F} = |\vec{F}| \cdot pr_{\vec{F}} d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{r}) \quad (8.108)$$

lucru mecanic elementar poate fi considerat ca produsul dintre deplasarea elementară și proiecția forței pe direcția deplasării (sau produsul dintre forță și proiecția deplasării elementare pe direcția forței) și el poate fi pozitiv (*lucrul mecanic motor*), negativ (*lucrul mecanic rezistent*) sau nul, după cum unghiul $(\vec{F}, d\vec{r})$ este ascuțit, obtuz sau drept.

Prin urmare putem scrie:

$$dL \begin{cases} > 0, & \text{daca: } pr_{d\vec{r}} \vec{F} \text{ si } d\vec{r} \text{ au acelasi sens, sau } (\vec{F}, d\vec{r}) < 90^\circ \\ = 0, & \text{daca: } pr_{d\vec{r}} \vec{F} = 0 \text{ sau } (\vec{F}, d\vec{r}) = 90^\circ \\ < 0, & \text{daca: } pr_{d\vec{r}} \vec{F} \text{ si } d\vec{r} \text{ au sensuri opuse, sau } (\vec{F}, d\vec{r}) > 90^\circ \end{cases} \quad (8.109)$$

Expresia analitică a lucrului mecanic elementar se obține exprimând analitic vectorii \vec{F} și $d\vec{r}$: $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$; $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$\text{deci: } dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (8.110)$$

Dacă se ține seama că $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, rezultă că $d\vec{r} = \vec{v}dt$, iar expresia lucrului mecanic elementar devine:

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})dt \quad (8.111)$$

Din definiție rezultă că, dacă asupra unui punct material acționează mai multe forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ pentru o deplasare $d\vec{r}$, suma lucrurilor mecanice elementare ale acestor forțe este egală cu lucrul mecanic al rezultantei \vec{F} a forțelor date:

$$dL = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (8.112)$$

Dacă deplasarea $d\vec{r}$ este suma vectorială a deplasărilor elementare $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_n$, provocate de forța \vec{F} , atunci lucrul mecanic elementar al deplasării $d\vec{r}$ este suma lucrurilor mecanice elementare corespunzătoare deplasărilor elementare componente:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \dots + d\vec{r}_n) = \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \dots + \vec{F} \cdot d\vec{r}_n. \quad (8.113)$$

Dacă sub acțiunea unei forțe variabile \vec{F} , punctul material se deplasează pe curba (C) din A în B (fig. 8.13), lucrul mecanic efectuat de forța \vec{F} se numește *lucrul mecanic total* sau *finit* și se obține prin descompunerea mișcării între A la B în arce elementare care se pot asimila cu coardele lor: $d\vec{r}_0, d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_n$.

În timpul acestor mișcări forțele $\vec{F}_0, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ (fig.8.13) pot fi considerate constante. Însușind lucrurile mecanice elementare corespunzătoare acestor deplasări elementare se obține lucrul mecanic total:

$$L_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} (Xdx + Ydy + Zdz), \quad (8.114)$$

care arată că lucrul mecanic total al unei forțe, corespunzător unei deplasări finite a punctului material, se exprimă printr-o integrală curbilinie care depinde atât de forța \vec{F} cât și de arcul de curbă AB.

Pentru obținerea teoremei energiei cinetice se pleacă de la teorema fundamentală a dinamicii, ecuația de mișcare scrisă sub forma:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (8.115)$$

Înmulțind scalar ecuația (8.115) cu $\vec{v}dt = d\vec{r}$, membru cu membru se obține:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

adică:
$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{sau:} \quad dE = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (8.116)$$

și ținând seama de (8.112) obținem **teorema energiei cinetice scrisă sub forma diferențială:**
$$dE = dL \quad (8.117)$$

cu următorul enunț: “*variația elementară a energiei cinetice a unui punct material într-un interval de timp dt este egală cu lucrul mecanic elementar corespunzător, efectuat în același interval de timp dt de către rezultanta forțelor ce acționează asupra lui*”.

Dacă se integrează relația (8.117) în intervalul (t_0, t_1) (în cazul în care integrarea membrului drept este posibilă) rezultă **teorema energiei cinetice sub formă finită:**
$$E_1 - E_0 = L_{0-1} \quad (8.118)$$

cu următorul enunț: “*diferența dintre energia cinetică corespunzătoare poziției finale și energia cinetică corespunzătoare poziției inițiale a punctului material este egală cu lucrul mecanic total, efectuat de forțele care acționează asupra lui între cele două poziții*”.

Aplicația 1

Un vehicul de greutate $G = mg$, pornește din repaus din punctul A pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, de lungime $AB=L$ (fig. 8.14). Se cere să se determine viteza vehiculului în punctul B ($\mu \neq 0$).

Rezolvare

Pentru aflarea vitezei în B se aplică teorema energiei cinetice (8.118) între A și B :

$$E_B - E_A = L_{AB}$$

unde:
$$E_A = 0, \quad E_B = \frac{1}{2}mv_B^2$$

iar lucrul mecanic se scrie:

$$L_{AB} = \int_{A-B} (\vec{G} + \vec{N} + \vec{T}) \cdot d\vec{r} = \int_{A-B} X \cdot dx = (G \sin \alpha - T)L.$$

și, deoarece: $T = \mu N, \quad N = G \cos \alpha$, avem:
$$L_{AB} = GL(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

Înlocuind în teorema energiei cinetice, obținem:
$$v_B = \sqrt{2gL(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

Aplicația 2

Se consideră un cilindru circular așezat într-un plan vertical (fig. 8.15) și o bilă de masă m care se mișcă în interiorul cilindrului neted ($\mu = 0$) de rază $OM = L$. Să se studieze mișcarea bilei pe suprafața cilindrului interior, știind că în poziția inițială M_0 , bila are viteza v_0 (M_0 fiind punctul cel mai jos al cilindrului vertical).

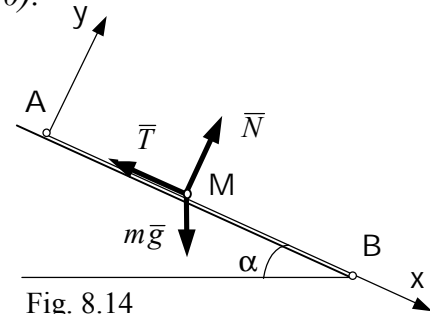


Fig. 8.14

Rezolvare

Teorema energiei cinetice între pozițiile M_0 și M se scrie: $E_M - E_{M_0} = L_{M_0M}$, unde energia cinetică pentru cele două poziții este:

$$E_{M_0} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad E_M = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

și lucrul mecanic efectuat asupra punctului între M_0 și M :

$$L_{AB} = \int_{M_0M} (\bar{G} + \bar{S}) \cdot d\bar{r} = \int_{M_0M} F^r \cdot ds = \int_0^\theta (-G \sin \varphi) L d\varphi$$

$$L_{M_0M_1} = mgL \cos \varphi \Big|_0^\theta = -mgL(1 - \cos \theta)$$

Înlocuind în teorema energiei cinetice, obținem:

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgL(1 - \cos \theta)$$

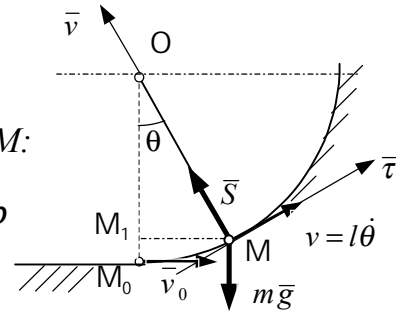


Fig. 8.15

deci legea de mișcare a punctului este: $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{v_0}{L}\right)^2 - \frac{2g}{L}(1 - \cos \theta)$

adică viteza unghiulară $\dot{\theta} = \omega$ a punctului în mișcare; ținând seama că $v_M = L\dot{\theta}$ se obține legea de mișcare a punctului M: $v_M = \sqrt{v_0^2 - 2gL(1 - \cos \theta)}$.

8.9.4. Funcția de forță. Energia potențială.**Conservarea energiei mecanice.**

Este important de remarcat faptul că teorema energiei cinetice nu ne permite în general, să obținem o integrală primă, deoarece în ecuația diferențială (8.117) numai prima parte (stânga) este o *diferențială totală*, în timp ce partea din dreapta este o *expresie diferențială generală* (de tip Pfaff).

Există însă cazuri în care expresia lucrului mecanic elementar dL este o diferențială totală. Dacă forța nu depinde decât de \bar{r} , adică de poziția punctului $A(x, y, z)$, atunci avem $\bar{F} = \bar{F}(x, y, z)$ și proiecțiile pe axele sistemului cartezian se scriu:

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z) \quad (8.119)$$

fiind funcții definite într-un anumit domeniu D; spunem că avem un *câmp de forțe*.

Se consideră o funcție scalară $U(x, y, z)$ depinzând numai de coordonatele punctului, cu ajutorul căreia se pot scrie componentele forței ca derivate parțiale, astfel:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (8.120)$$

În aceste condiții funcția U se numește *funcție de forță (sau potențial)*, iar forța \bar{F} se numește *conservativă* și se spune că ea derivă din funcția de forță U .

$$\text{Deci: } \vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \text{grad}U,$$

unde $\text{grad} U$ este operatorul diferențial de tip gradient, iar lucrul mecanic elementar se scrie în acest caz:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU.$$

$$\text{adică: } dL = dU. \quad (8.121)$$

deci *lucrul mecanic elementar este în acest caz o diferențială totală*, și prin urmare *lucrul mecanic total* se scrie:

$$L_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B dU = U_B - U_A \quad (8.122)$$

$$\text{unde: } U_A = U(x_A, y_A, z_A), \quad U_B = U(x_B, y_B, z_B).$$

Rezultă că *lucrul mecanic total al unei forțe conservative este independent de traiectoria parcursă și depinde numai de pozițiile inițială și finală ale punctului de aplicație a forțelor*.

În cazul în care forțele care acționează asupra unui sistem material derivă dintr-o funcție de forță, se poate pune în evidență energia potențială (de poziție) a sistemului.

Să considerăm acum un punct material P , asupra căruia acționează o forță conservativă, funcția de forță corespunzătoare fiind $U(x, y, z)$. Fie $A(x, y, z)$ poziția la un moment oarecare a punctului P și $A_0(x_0, y_0, z_0)$ poziția inițială; lucrul mecanic L_{A_0A} , al forței \vec{F} pe drumul A_0A este:

$$L_{A_0A} = U(x, y, z) - U_0(x_0, y_0, z_0).$$

Energia potențială a punctului este lucrul mecanic L_{A_0A} luat cu semn schimbat: $V = U(x_0, y_0, z_0) - U(x, y, z)$ (8.123)

Adeseori se alege poziția A_0 astfel încât mărimea $U(x_0, y_0, z_0)$ să fie nulă. În acest caz: $V = -U(x, y, z)$

$$\text{Relațiile: } dE = dL, \quad dL = dU \quad \text{și} \quad V = -U$$

$$\text{conduc la: } dE = -dV \quad \text{sau} \quad d(E + V) = 0 \quad (8.124)$$

care prin integrare devine:

$$E + V = \text{constant}. \quad (8.125)$$

Suma dintre energia cinetică E și energia potențială V se numește *energia mecanică (sau totală)* a punctului material:

$$E_m = E + V \quad (8.126)$$

Această expresie reprezintă **teorema conservării energiei mecanice** și se enunță astfel: "*dacă forțele care acționează asupra unui punct material derivă dintr-o funcție de forță (sau potențial) energia mecanică a punctului rămâne constantă în tot timpul mișcării*".

Exemple de forțe conservative:

a) *Greutatea unui punct material* : $\vec{F} = \vec{G} = m\vec{g}$, scrisă în raport cu un sistem de axe cartezian $Oxyz$, axa Oz verticală, conduce la: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$ (fig. 8.16)

Ținând seama de faptul că $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$, funcția de forță are expresia: $U = -mgz + C$.

Considerând $C = 0$, energia potențială va fi:

$$V = -U = mgz - C$$

iar lucrul mecanic pe arcul A_1A_2 va fi:

$$L_{A_1A_2} = U_2 - U_1 = mg(z_1 - z_2) = \pm mg\Delta h.$$

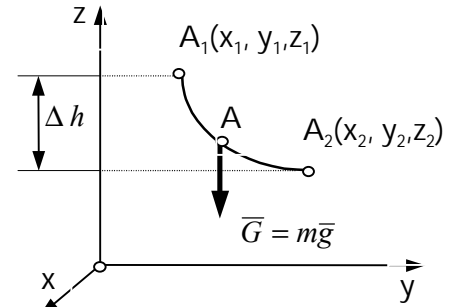


Fig. 8.16

Semnul plus se ia când punctul greu coboară, iar semnul minus când urcă.

Deci, lucrul mecanic al unei greutatei *nu depinde de traiectoria parcursă* și este egal cu produsul dintre greutate și diferența de nivel.

b) *forța elastică* : $\vec{F} = -k\vec{r}$

În acest caz avem succesiv:

$$X = -kx, \quad Y = -ky, \quad Z = -kz.$$

$$|\vec{F}| = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k\Delta, \quad \Delta = \text{deformația}$$

și deoarece : $X = \frac{\partial U}{\partial x} = -kx$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y} = -ky$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z} = -kz$, avem:

$$\begin{aligned} U &= \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \int (-kx dx - ky dy - kz dz) = \\ &= -k \int (x dx + y dy + z dz) = -k \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + C \end{aligned}$$

Dacă $C = 0$, se obține: $V = -U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$ iar lucrul mecanic devine:

$$L_{A_0A_1} = U_{A_0} - U_{A_1} = \frac{1}{2}k[(x_0^2 - x_1^2) + (y_0^2 - y_1^2) + (z_0^2 - z_1^2)].$$

c) *forța atracției universale*:

Analog se poate arăta că forța atracției universale: $\vec{F} = -f \frac{mM}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$

este o funcție care derivă dintr-o funcție de forță.

Într-adevăr, fie: $\vec{F} = -f \frac{mM}{r^2} \vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\rho = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ deci: $\vec{F} = -f \frac{mM}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$,

având proiecțiile pe axe:

$$X = -\frac{fmMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad Y = -\frac{fmMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad Z = -\frac{fmMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Se verifică ușor că această forță derivă din funcția de forță :

$$U = \frac{fmM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C \quad \text{sau} \quad U = \frac{fmM}{|\vec{r}|} + C.$$

Ca exemplu de *forță ce nu derivă dintr-o funcție de forță* putem cita forța de frecare, care după cum se știe, depinde și de viteza punctului material, nu numai de vectorul său de poziție.

8.10. Mișcarea punctului material sub acțiunea forțelor centrale.

8.10.1. Generalități. Proprietăți. Teorema ariilor.

Se spune că o forță care acționează asupra unui punct material este *centrală* atunci când suportul ei trece în tot timpul mișcării printr-un punct fix O, numit centrul forțelor sau pol. Notând cu A poziția punctului material la un moment dat, cu $\vec{u}_\rho = \text{vers } \vec{r}$, versorul vectorului \vec{OA} , $\vec{r} = \vec{OA}$, fiind vectorul de poziție al punctului A și cu $|\vec{F}| = F$ scalarul forței centrale \vec{F} , (fig. 8.17) putem scrie:

$$\vec{F} = F \vec{u}_\rho. \quad (8.127)$$

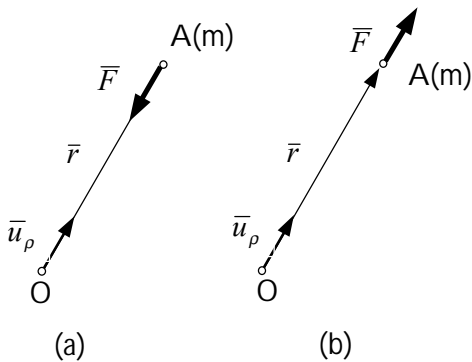


Fig. 8.17

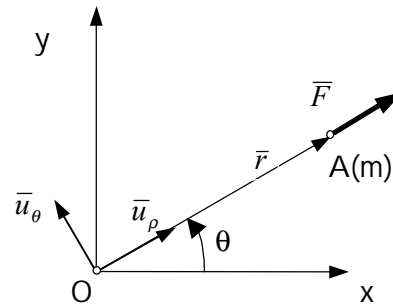


Fig. 8.18

Se face următoarea *convenție*: dacă F este o mărime scalară negativă ($F < 0$) atunci are sens opus față de \vec{u}_ρ (fig. 8.17.a); dacă F este o mărime scalară pozitivă ($F > 0$), atunci forța \vec{F} are același sens cu \vec{u}_ρ (fig. 8.17, b).

În primul caz forța centrală \vec{F} se numește *atractivă*, iar în al doilea caz se numește *repulsivă*. Conform acestei definiții, forța repulsivă va fi caracterizată printr-o valoare scalară pozitivă. Valoarea scalară este de obicei funcție numai de

distanță $OA = |\vec{r}|$. Vom demonstra unele *proprietăți generale* ale mișcării punctului material sub acțiunea forțelor centrale, indiferent de expresia valorii lor scalare F .

a) *Traectoria punctului material A supus exclusiv acțiunii unei forțe centrale este o curbă plană.* Ținând seama de (8.127) ecuația fundamentală a mișcării se scrie sub forma:

$$m \ddot{\vec{r}} = F \vec{u}_\rho \quad (8.128)$$

Înmulțind vectorial relația (8.127) cu \vec{r} avem:

$$\vec{r} \times m \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times F \vec{u}_\rho$$

unde: $\vec{r} \times \vec{u}_\rho = 0$, \vec{r} și \vec{u}_ρ fiind doi vectori coliniari și deci:

$$\vec{r} \times m \ddot{\vec{r}} = 0 \text{ sau } \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

$$\text{dar: } \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = 0$$

$$\text{de unde: } \vec{r} \times \vec{v} = \vec{C} \quad (8.129)$$

\vec{C} , fiind un vector constant.

Înmulțind scalar (8.129) cu \vec{r} obținem:

$$\vec{C} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{r} = 0$$

$$\text{deci: } \vec{C} \cdot \vec{r} = 0$$

în care notând cu C_x, C_y, C_z proiecțiile vectorului \vec{C} și respectiv cu x, y, z , proiecțiile vectorului \vec{r} pe axele triedrului ortogonal cu originea în O, rezultă:

$$C_x x + C_y y + C_z z = 0 \quad (8.130)$$

relație ce reprezintă ecuația unui plan ce trece prin punctul O. Rezultă deci următoarea proprietate: *traectoria unui punct material liber acționat de o forță centrală este cuprinsă într-un plan ce conține centrul forțelor.*

b) *Teorema ariilor (legea a II-a lui Kepler)*

Să studiem în continuare mișcarea în plan alegând un sistem de coordonate Oxy.

Se consideră sistemul de coordonate cartezian Oxy și un sistem polar (r, θ) (fig. 8.18). Proiectând ecuația fundamentală a dinamicii $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ pe direcția versorilor \vec{u}_ρ și \vec{u}_θ se obțin ecuațiile scalare:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F \quad (8.131)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (8.132)$$

Din ecuația (8.132) ce nu conține forța F , rezultă a doua proprietate generală a mișcării unui punct material sub acțiunea unei forțe centrale. Se poate da o interpretare interesantă acestei proprietăți dacă se integrează ecuația diferențială (8.132).

Simplificând cu m ecuația (8.132) avem succesiv:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

și cum r este finit rezultă: $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$ sau $r^2\dot{\theta} = C$ (8.133)

Ținând seama de expresia vitezei aerolare: $\Omega = \frac{r^2\dot{\theta}}{2}$, definită în paragraful

7.2.5, relația (8.133) devine: $\Omega = \frac{C}{2} = \text{const.}$

ceea ce exprimă următoarea **teoremă a ariilor** "sub acțiunea unei forțe centrale, un punct material liber se mișcă cu viteza aerolară constantă, adică raza vectoare OA mătura arii egale în intervale egale de timp". Constanta C se mai numește *constantă ariilor*. Teorema enunțată reprezintă **legea a II-a lui Kepler** și este valabilă în cazul mișcării planetelor din sistemul solar.

8.10.2. Ecuația diferențială a traiectoriei.

Formula lui Binet.

Ecuațiile (8.132) și (8.131) reprezintă ecuațiile de mișcare a punctului material sub acțiunea unei forțe centrale în coordonate polare. Prin integrarea ecuației (8.132) s-a obținut (8.133) care se mai scrie:

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}, \quad (8.134)$$

care înlocuită în ecuația (8.131) se obține: $m\left(\ddot{r} - r\frac{C^2}{r^4}\right) = F$ (8.135)

de unde rezultă ecuația diferențială a mișcării: $\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F}{m}$. (8.136)

Dacă se face o schimbare de variabilă pentru a se trece de la variabila t la variabila θ , se obține ecuația diferențială scrisă în coordonatele polare r și θ :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{C}{r^2} = +C \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}, \quad (8.137)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{dt}\right) \frac{d\theta}{dt} = -C \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}. \quad (8.138)$$

Înlocuind rezultatul din (8.138) în ecuația mișcării (8.136) rezultă:

$$-\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F}{m}. \quad (8.139)$$

De aici se deduce ecuația diferențială a traiectoriei în coordonate polare, cunoscută sub numele de *ecuația lui Binet*:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mC^2} \quad (8.140)$$

Integrând această ecuație se obține o soluție de forma : $\frac{1}{r} = f(\theta, C_1, C_2)$

Determinarea constantelor de integrare C_1 și C_2 se face cu ajutorul condițiilor inițiale:

$$t = t_0 \quad \begin{cases} r = r_0 \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} v_\rho = (v_\rho)_0 \\ v_\theta = (v_\theta)_0 \end{cases} \quad (8.141)$$

Constanta ariilor are expresia : $C = r_0^2 \cdot (\dot{\theta})_0$. (8.142)

Din ecuația lui Binet (8.140) se obține expresia forței centrale:

$$F = -\frac{mC^2}{r^2} \left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right]. \quad (8.143)$$

8.10.3. Mișcarea punctului material sub acțiunea forței de atracție universală.

Forța de atracție universală se mai numește și *forța de atracție newtoniană*, sau *forța gravitației universale*. Această forță intervine în legea atracției universale, enunțată de Newton în 1686 și are expresia:

$$F = -f \frac{mM}{r^2} \quad (8.144)$$

unde r este distanța dintre centrele corpurilor de mase m și M .

Ecuația dimensională a constantei f este: $[f] = M^{-1}L^3T^{-2}$

iar valoarea acesteia este: $f = 6,664 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.

Mișcarea unui punct material, sub acțiunea forței de atracție universală, este un caz particular al mișcării punctului material sub acțiunea forțelor centrale. Ca exemplu se poate considera studiul traiectoriei unui punct material de masă m , care se mișcă la suprafața Pământului, iar masa M a Pământului se admite că este concentrată în centrul său.

Traietoria se determină cu ecuația lui Binet:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{f m M}{r^2} \cdot \frac{r^2}{mC^2} \quad (8.145)$$

deci:
$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{fM}{C^2} \quad (8.146)$$

Dacă se notează $1/r = u$, ecuația (8.146) se scrie:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{fM}{C^2} \quad (8.147)$$

cu ecuația caracteristică: $\lambda^2 + 1 = 0 \quad (8.148)$

având rădăcinile: $\lambda = \pm i \quad (8.149)$

Soluția generală a ecuației diferențiale (8.147) este de forma:

$$u = u_0 + u_p \quad (8.150)$$

Soluția ecuației diferențiale omogene u_0 este de forma:

$$u_0 = A \cos\theta + B \sin\theta \quad (8.151)$$

iar o soluție particulară u_p a ecuației neomogene este de forma membrului drept al ecuației (8.147) și se determină prin metoda identificării:

$$\frac{d^2u_p}{d\theta^2} + u_p = \frac{fM}{C^2},$$

de unde rezultă: $u_p = \frac{fM}{C^2} \quad (8.152)$

Deci, soluția ecuației diferențiale (8.146) sau (8.147) poate fi scrisă astfel:

$$u = \frac{1}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta + \frac{fM}{C^2} \quad (8.153)$$

unde A și B sunt constante de integrare;

Soluția ecuației diferențiale (8.146) se mai poate scrie sub forma:

$$u = \frac{1}{r} = D \cos(\theta - \theta_0) + \frac{fM}{C^2} \quad (8.154)$$

Pentru determinarea constantelor de integrare D și θ_0 se identifică termenii din formula:

$$\begin{aligned} D \cos(\theta - \theta_0) &= D \cos\theta \cos\theta_0 + D \sin\theta \sin\theta_0 = A \cos\theta + B \sin\theta : \\ D \cos\theta_0 &= A, \quad D \sin\theta_0 = B \end{aligned} \quad (8.155)$$

de unde se obține: $D = \sqrt{A^2 + B^2}, \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{B}{A}. \quad (8.156)$

În fig. 8.19 este reprezentată o conică, iar semnificația notațiilor este:

- Δ este directoarea;
- O, focarul, iar $OP' = d$, distanța de la focar la directoare;
- p , parametrul conicei $p = ed$; $e = OM / OP$ - excentricitatea;

Avem succesiv:

$$r = OM = e \cdot MP = e[d - r \cos(\theta - \theta_0)] = p - r \cdot e \cdot \cos(\theta - \theta_0); \quad (8.157)$$

din această relație rezultă ecuația unei conice în coordonate polare :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (8.158)$$

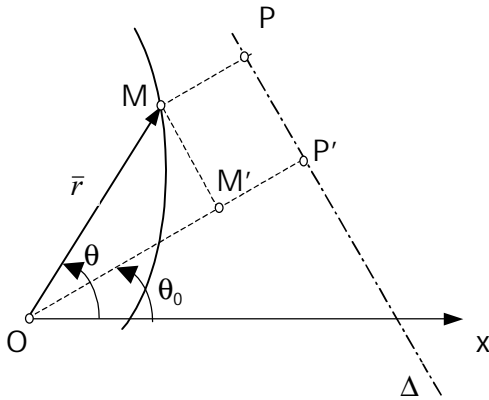


Fig. 8.19

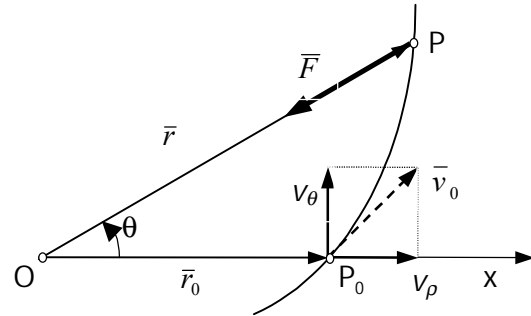


Fig. 8.20

Se poate aduce relația (8.154) la o formă asemănătoare cu (8.158), astfel:

$$r = \frac{1}{\frac{fM}{C^2} + D \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\frac{C^2}{fM}}{1 + \frac{DC^2}{fM} \cos(\theta - \theta_0)} \quad (8.159)$$

Din ultima relație se observă că traiectoria unui punct care se deplasează la suprafața Pământului sub acțiunea forței de atracție universală este o conică (dacă se presupune Pământul redus la un punct fix, situat în focar). Ca exemplu se poate studia mișcarea unui satelit artificial al Pământului.

Identificând termenii din relațiile (8.158) și (8.159) rezultă:

$$\text{- parametrul conicei } p = \frac{C^2}{fM}, \quad (8.160)$$

$$\text{- excentricitatea conicei } e = \frac{C^2}{fM} D. \quad (8.160')$$

Relațiile (8.160) și (8.160') sunt expresiile altor constante p și e , cu ajutorul cărora se poate determina natura conicei. Determinarea constantelor de integrare A și B se face cu ajutorul condițiilor inițiale (fig. 8.20), astfel:

$$t = 0: \quad \begin{cases} r = r_0 \\ \theta = \theta_0 = 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} v_\rho = (\dot{r})_0 = v_0 \cos \alpha_0 \\ v_\theta = (r\dot{\theta})_0 = v_0 \sin \alpha_0 \end{cases} \quad (8.161)$$

Constanta ariilor scrisă pentru un moment oarecare și pentru momentul inițial are aceeași valoare: $C = r^2 \dot{\theta} = (r)_0 (r\dot{\theta})_0 = r_0 v_0 \sin \alpha_0$ (8.162)

Din ecuația traiectoriei scrisă sub forma (8.153), pentru $t = 0$ rezultă condiția de poziție inițială: $\frac{1}{r_0} = A \cdot 1 + B \cdot 0 + \frac{fM}{C^2}$

$$\text{deci: } A = \frac{1}{r_0} - \frac{fM}{C^2} = \frac{1}{r_0} - \frac{fM}{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}. \quad (8.163)$$

Pentru determinarea constantei B se pune condiția de viteză. Pentru aceasta se derivează în raport cu timpul relația (8.153):

$$-\frac{1}{r^2} \dot{r} = -A \dot{\theta} \sin \theta + B \dot{\theta} \cos \theta. \quad (8.164)$$

Pentru $t = 0$ din condițiile (8.161) rezultă:

$$\begin{aligned} (\dot{r})_0 &= (v_\rho)_0 = v_0 \cos \alpha_0 \\ (\dot{\theta})_0 &= \frac{(r\dot{\theta})_0}{r_0} = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{r_0}. \end{aligned} \quad (8.164')$$

Introducând condițiile (8.161) și (8.164') în (8.164) se obține:

$$-\frac{1}{r_0^2} v_0 \cos \alpha_0 = B \frac{v_0 \sin \alpha_0}{r_0},$$

$$\text{de unde rezultă: } B = \frac{ctg \alpha_0}{r_0}. \quad (8.165)$$

Având calculate valorile constantelor A și B , se pot determina noile constante D și θ_0 , apoi parametrii conicei p și e . Pentru a determina natura conicei se calculează excentricitatea e , aplicând formula (8.160'):

$$\begin{aligned} e &= \frac{C^2}{fM} D = \frac{C^2}{fM} \sqrt{A^2 + B^2}, \text{ care prin ridicare la pătrat, rezultă:} \\ e^2 &= \frac{C^4}{f^2 M^2} (A^2 + B^2). \end{aligned} \quad (8.166)$$

Introducând în această expresie rezultatele obținute prin relațiile (8.162), (8.163) și (8.165) se obține succesiv:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{r_0^4 v_0^4 \sin^4 \alpha_0}{f^2 M^2} \left(-\frac{fM}{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0} \right)^2 + \frac{ctg^2 \alpha_0}{r_0^2} = \\ &= \frac{r_0^4 v_0^4 \sin^4 \alpha_0}{f^2 M^2} \left[\frac{1}{r_0^2} \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0} \right) + \frac{f^2 M^2}{r_0^4 v_0^4 \sin^4 \alpha_0} - \frac{2fM}{r_0^3 v_0^2 \sin^2 \alpha_0} \right] = \\ &= 1 + \frac{r_0^4 v_0^4 \sin^4 \alpha_0}{f^2 M^2} \left(\frac{1}{r_0^2 \sin^2 \alpha_0} - \frac{2fM}{r_0^3 v_0^2 \sin^2 \alpha_0} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Se obține în final: } e^2 = 1 + \frac{r_0^2 v_0^4 \sin^2 \alpha_0}{f^2 M^2} \left(v_0^2 - \frac{2fM}{r_0} \right) \quad (8.167)$$

Cu ajutorul acestei relații, în funcție de valoarea lui v_0 , se poate face o discuție asupra naturii conicei (fig. 8.21). Astfel dacă:

- $v_0^2 < \frac{2fM}{r_0}$, atunci $e < 1$ și rezultă o elipsă;
- $v_0^2 = \frac{2fM}{r_0}$ atunci $e = 1$ și rezultă o parabolă;
- $v_0^2 > \frac{2fM}{r_0}$, atunci $e > 1$ și rezultă o hiperbolă;

(8.168)

Se vede deci că natura conice nu depinde de unghiul de lansare α , ci numai de viteza inițială v_0 .

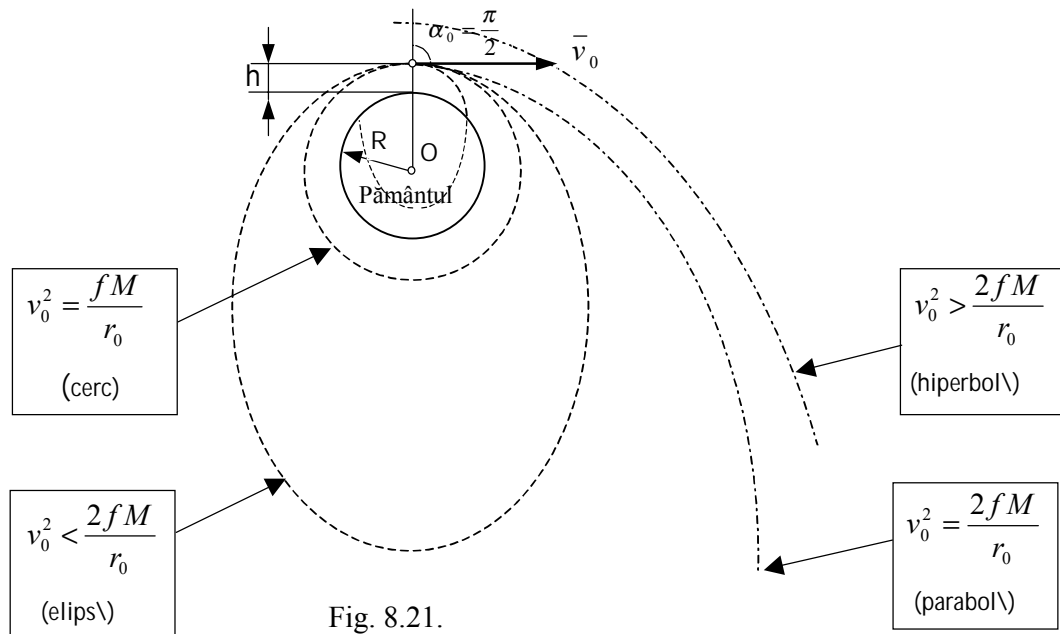


Fig. 8.21.

Condiția ca punctul material să se deplaseze pe un cerc.

Ecuția cercului este: $r = r_0$ (constant). Dacă se consideră pentru simplificare $\alpha_0 = \pi/2$, în acest caz constanta ariilor are expresia: $C = r_0 v_0 \sin \alpha_0 = r_0 v_0$ și ecuația diferențială a mișcării (8.146) se scrie:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{fM}{C^2} \text{ de unde: } r_0 = \frac{C^2}{fM} = \frac{r_0^2 v_0^2}{fM}. \quad (8.169)$$

Deci condiția ca punctul material să se deplaseze pe un cerc este:

$$v_0 = \sqrt{\frac{fM}{r_0}}. \quad (8.170)$$

Prima viteză cosmică este viteza cu care trebuie lansat un corp de la suprafața Pământului, pentru a deveni satelit artificial (traectoria lui să fie un cerc). Din relația (8.170) rezultă:

$$v_1 = \sqrt{\frac{fM}{r_0}} \quad (8.171)$$

unde: $f = 6,664 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \text{ s}^{-2}$

Pentru a se evita folosirea în calcule a masei Pământului M , se scrie greutatea corpului la suprafața Pământului. Dacă se notează cu: m - masa corpului, M - masa și R - raza Pământului, avem:

$$f \frac{mM}{R^2} = mg, \text{ de unde: } fM = gR^2. \quad (8.172)$$

În calcule se poate lua $R = 6370 \text{ km}$, $h \approx 100 \text{ km}$ și neglijând h (în raport cu R) rezultă:

$$v_I = \sqrt{\frac{fm}{r_0}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \approx \sqrt{\frac{gR^2}{R}} = \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \cdot 6370 \cdot 10^3} \approx 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (8.173)$$

Viteza a II-a cosmică este viteza cu care trebuie lansat un corp de la suprafața Pământului pentru ca acesta să părăsească zona de atracție a Pământului, deci traiectoria să fie o curbă deschisă (în acest caz, o parabolă). Rezultă:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2fM}{r_0}} = \sqrt{2} \cdot v_I = 1,41 \cdot 7,9 = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad (8.174)$$

Viteza a III-a cosmică este viteza cu care trebuie lansat un corp pentru ca să părăsească zona de atracție a Soarelui.

$$\text{Aceasta are valoarea: } v_{III} = 16,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Din cele de mai sus se poate determina viteza unui satelit artificial al Pământului (viteza de lansare pentru ca traiectoria sa să fie o conică închisă):

$$v_I \leq v \leq v_{II}. \quad (8.175)$$

Observație

Prima viteză cosmică v_I se poate calcula direct folosind relația (8.146). Pentru simplificare se asimilează acest corp cu un punct material cu viteza v_I , sub unghiul $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ pe un cerc de rază $r_0 = R + h$, unde $R = 6370 \text{ km}$, raza Pământului și $h \leq R$. Constanta ariilor este: $C = r_0 v_0 \sin \alpha_0 = r_0 v_I$

Deoarece: $r_0 = R + h = \text{const.}$, ecuația (8.146) devine:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{fM}{C^2} = \frac{fM}{r_0^2 v_1^2}, \text{ de unde rezultă: } v_1^2 = \frac{fM}{r_0}.$$

Pentru a elimina din calcule masa Pământului M se scrie ca mai înainte, greutatea corpului de masă m , la suprafața Pământului:

$$f \frac{mM}{R^2} = mg, \text{ de unde: } fM = gR^2.$$

Deci prima viteză cosmică este:

$$v_I = \sqrt{\frac{fM}{r_0}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \approx \sqrt{\frac{gR^2}{R}} = \sqrt{gR} = 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

8.11. Mișcarea punctului material sub acțiunea forțelor elastice.

Numim *forță elastică* o forță \vec{F} atractivă, proporțională cu distanța:

$OA = r$, exercitată asupra mobilului material A din partea unui punct fix O, numit centru de atracție (fig. 8.22.a).

Putem scrie: $\vec{F} = -k\vec{r}$, (8.176)

unde \vec{r} este vectorul de poziție al punctului atras A, față de centrul de atracție O, $\vec{r} = \overline{OA}$, la momentul t , și k o constantă pozitivă.

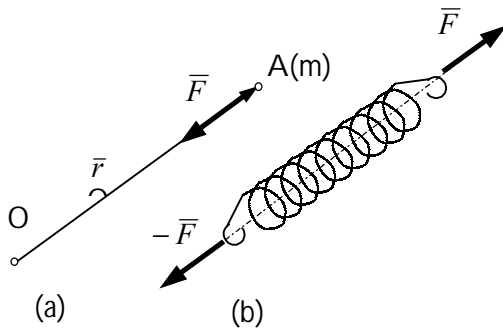


Fig.8.22

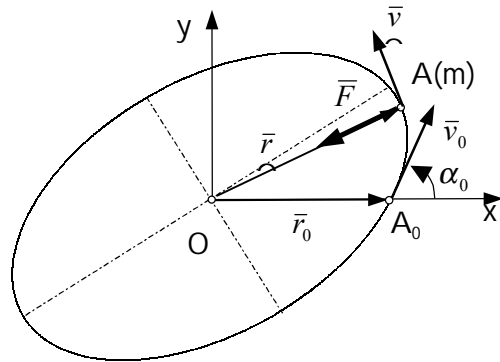


Fig.8.23

Forțele elastice intervin ca forțe principale în capitolul de Elasticitate al Mecanicii aplicate. Ele au proprietatea de a produce o deformații ale corpului elastic numai atât timp cât acționează; atunci când aceste forțe încetează de a mai acționa, corpul solicitat revine la forma inițială.

Fenomenul poate fi pus în evidență cu ajutorul unui resort elastic (fig.8.22,b) de lungime L , care este solicitat de un sistem de forțe axiale $-\vec{F}$ și \vec{F} , de intensități egale și de sens opus și care produc o lungime $L' > L$, atât timp cât acest sistem de forțe acționează asupra sa.

Când forțele încetează de a mai lucra, resortul își recapătă lungimea inițială. Între lungimea L' și L a resortului și forța \vec{F} există următoarea relație de proporționalitate:

$$L' - L = \lambda F \quad (8.177)$$

λ fiind constanta elastică a resortului, independentă de F .

Înlocuindu-se resortul de lungime L printr-o bară de oțel de aceeași lungime, legea exprimată prin relația (8.177) rămâne valabilă atât timp cât \vec{F} nu depășește o anumită limită maximă, iar această relație (care are o bază experimentală), se numește *legea lui Hooke*. Se observă că forțele elastice fac parte din categoria forțelor centrale, al căror suport trece printr-un punct fix O.

Ne propunem să studiem mișcarea unui punct material A, de masă m atras cu o forță elastică de punctul fix O (fig.8.23). Raportându-ne la un sistem de axe de coordonate cu originea în O, mișcarea punctului material A, determinat de

vectorul de poziție \bar{r} , este determinată dacă se cunoaște vectorul \bar{r} ca funcție de timp t , condițiile inițiale fiind date (pentru $t=0$) prin relațiile :

$$\bar{r}(0) = \bar{r}_0, \quad \dot{\bar{r}}(0) = \dot{\bar{r}}_0 = \bar{v}_0 \quad (8.178)$$

Ecuatia fundamentală a dinamicii se va scrie în acest caz sub forma:

$$m\ddot{\bar{r}} = -k\bar{r} \quad (8.179)$$

sau dacă se notează cu: $\omega^2 = k/m$ se scrie: (8.180)

$$\ddot{\bar{r}} + \omega^2\bar{r} = 0 \quad (8.181)$$

Pentru integrarea ecuației diferențiale (8.181) se încearcă o soluție de forma:

$$\bar{r} = \bar{C}e^{\alpha t} \quad (8.182)$$

unde \bar{C} este o constantă vectorială, iar α o constantă scalară, care se determină din condiția ca vectorul \bar{r} să satisfacă ecuația (8.181).

Introducând expresia lui \bar{r} în (8.181) vom obține:

$$\bar{C}e^{\alpha t}(\alpha^2 + \omega^2) = 0$$

de unde rezultă ecuația caracteristică : $\alpha^2 + \omega^2 = 0$, cu rădăcinile:

$$\alpha = \pm i\omega, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Deducem soluția generală a ecuației (8.181):

$$\bar{r} = \bar{C}_1 e^{i\omega t} + \bar{C}_2 e^{-i\omega t} \quad (8.183)$$

unde \bar{C}_1 și \bar{C}_2 sunt două constante vectoriale de integrare.

Pentru a evita prezența mărimilor imaginare, vom înlocui funcțiile exponențiale prin funcții trigonometrice, conform formulelor cunoscute:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t; \quad e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t.$$

Soluția generală (8.183) capătă în acest caz forma:

$$\bar{r} = \bar{A} \cos \omega t + \bar{B} \sin \omega t \quad (8.184)$$

unde:

$$\bar{A} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2, \quad \bar{B} = i(\bar{C}_1 - \bar{C}_2).$$

Expresia (8.184) nu mai conține mărimi imaginare, așa încât vom putea determina constantele vectoriale \bar{A} , \bar{B} din condițiile inițiale (8.178). În acest scop, prin derivarea în raport cu timpul t a expresiei (8.184) rezultă expresia vitezei:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \omega(-\bar{A} \sin \omega t + \bar{B} \cos \omega t). \quad (8.185)$$

Condițiile inițiale (8.178) ne dau valorile lui \bar{r} și $\dot{\bar{r}}$ la momentul inițial $t=0$, prin urmare, introducându-le în ecuațiile (8.184) și (8.185) se obține:

$$\bar{r}_0 = \bar{A}, \quad \bar{v}_0 = \omega \bar{B}.$$

de unde rezultă valorile constantelor de integrare:

$$\bar{A} = \bar{r}_0, \quad \bar{B} = \frac{\bar{v}_0}{\omega}. \quad (8.186)$$

Prin urmare soluția ecuației (8.180) cu condițiile (8.178) va fi dată de funcția vectorială:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (8.187)$$

reprezentând *ecuația vectorială a mișcării*.

Ecuația vitezei mișcării devine:

$$\vec{v} = -\omega \vec{r}_0 \sin \omega t + \vec{v}_0 \cos \omega t. \quad (8.188)$$

Formula (8.187) exprimă faptul că *traectoria este o curbă plană*, deoarece vectorul \vec{r} rămâne tot timpul în planul vectorilor \vec{r}_0 și \vec{v}_0 trecând prin O.

Presupunând că vectorii \vec{r}_0 și \vec{v}_0 nu sunt coliniari, planul traiectoriei este bine determinat. *Traectoria nu trece prin O*, deoarece \vec{r} nu se anulează niciodată.

Se mai observă că *traectoria este o curbă închisă*, întrucât \vec{r} este o funcție periodică, cu perioada :

$$T = 2\pi / \omega \quad (8.189)$$

adică avem: $\vec{r}(t + T) = \vec{r}(t)$, oricare ar fi t , iar viteza nu se anulează.

De asemenea, viteza \vec{v} este o funcție periodică de aceeași perioadă T. Adică mobilul revine în A cu aceeași viteză \vec{v} ($\vec{v} \neq 0$). Această proprietate caracterizează mișcarea periodică iar constanta T se numește *perioada mișcării*.

Notăția (8.180) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ este *pulsația sau frecvența circulară*.

Frecvența mișcării, indică de câte ori parcurge mobilul traiectoria sa în timp de o secundă, deci :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8.189')$$

În sfârșit, *traectoria este simetrică în raport cu punctul O*, pentru că la două valori ale lui t diferind între ele cu o jumătate de perioadă ($T/2 = \pi / \omega$), corespund lui \vec{r} două valori egale și de sens opus.

Ecuația carteziană a traiectoriei se află proiectând ecuația vectorială (8.187) pe cele două axe Ox și Oy ale sistemului Oxy ales în planul traiectoriei (fig. 8.23).

Notând cu (x, y) , (x_0, y_0) , (v_{0x}, v_{0y}) respectiv proiecțiile vectorilor \vec{r} , \vec{r}_0 , \vec{v}_0 pe cele două axe, atunci proiecțiile pe Ox și Oy ale ecuației (8.187) vor fi:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t \\ y &= y_0 \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \quad (8.190)$$

Din fig. 8.23 se observă că:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0 \quad \text{și} \quad y_0 = 0$$

și relațiile (8.190) devin:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 \cos \alpha_0}{\omega} \sin \omega t \\ y &= \frac{v_0 \sin \alpha_0}{\omega} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (8.191)$$

Eliminând parametrul t între cele două ecuații (8.191) se obține o ecuație de gradul al doilea în x și y , adică

$$\left(\frac{x - y \operatorname{ctg} \alpha_0}{x_0} \right)^2 + \frac{\omega^2 y^2}{v_0^2 \sin^2 \alpha_0} = 1 \quad (8.192)$$

care reprezintă o conică de tip elipsă (neavând puncte la infinit), cu centrul în O (fig.8.23).

Observație

Dacă unghiul $\alpha_0 = 0$ sau $\alpha_0 = \pi$ adică dacă viteza inițială are direcția vectorului de poziție inițial \vec{r}_0 , atunci conform (8.191): $y = 0$ și mișcarea punctului este rectilinie, oscilatorie armonică, efectuându-se după legea:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Într-adevăr notând cu:

$$x_0 = a \cos \varphi, \quad \frac{v_0}{\omega} = a \sin \varphi$$

se obține: $x = a \cos(\omega t - \varphi)$,

unde:

- amplitudinea mișcării este: $a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$
- iar faza inițială: $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{v_0}{\omega x_0}$

CAPITOLUL 9

CINEMATICA RIGIDULUI

9.1. Generalități

Așa cum s-a precizat în capitolele anterioare, un solid rigid este un continuum material nedeformabil (pentru care distanța dintre două puncte arbitrare ale sale rămâne invariabilă în timpul mișcării sale, indiferent de mărimea sarcinilor exterioare care îi provoacă această mișcare).

Elementele de bază ale cinematicii sistemelor de puncte au fost prezentate în Capitolul 7. Cinematica studiază mișcarea sistemelor materiale, fără a lua în considerare cauza care a provocat-o, și care face ca mișcarea să se desfășoare într-un anumit mod.

Prin studiul cinematic al unui sistem material se înțelege exprimarea matematică a *parametrilor cinematici* ai sistemului, care în cazul unui punct material sunt *traectoria, viteza și accelerația*, iar în cazul sistemelor de puncte și continuumuri materiale sunt familiile de traiectorii, distribuții de viteze și accelerații (numite și *câmpuri de viteze și accelerații*). Aceasta înseamnă a se găsi *legea de distribuție a parametrilor cinematici* ai sistemului material.

În cele ce urmează, vor fi puse în evidență diferite legi de distribuție ale parametrilor cinematici ai mișcării, atât în cazul mișcării generale cât și în cazul unor mișcări particulare ale rigidului.

9.2. Mișcarea generală a rigidului

9.2.1. Parametrii mișcării. Grade de libertate.

Unghiurile lui Euler. Trajectoriile diferitelor puncte

A cunoaște mișcarea unui solid rigid, înseamnă găsirea expresiilor generale pentru *vectorul de poziție, vectorul viteză și accelerație a unui punct oarecare* al rigidului, față de un sistem de referință care se consideră în mod convențional fix.

În cazul unui solid rigid aflat în mișcare, fiecare punct al său se deplasează pe o traiectorie proprie și în fiecare moment al mișcării are o anumită viteză și accelerație. Fie $T_1 (O_1x_1y_1z_1)$ un triedru cartezian fix și $T(Oxyz)$ un triedru cartezian mobil, solidar cu rigidul, deci în mișcare față de T_1 (fig.9.1.). Poziția triedrului mobil T față de T_1 se caracterizează prin vectorul de poziție $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ al originii și prin legile de variație a versorilor lui T : $\vec{i} = \vec{i}(t)$, $\vec{j} = \vec{j}(t)$, $\vec{k} = \vec{k}(t)$. Cunoașterea acestor patru funcții vectoriale de timp este echivalentă cu cunoașterea coordonatelor punctului O și a cosinusurilor directe ale axelor mobile față de axele lui T_1 .

Pozițiile punctului P față de triedrul fix T_1 sunt definite prin vectorul de poziție $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$, iar între vectorii \vec{r}_1 , \vec{r} , \vec{r}_0 (fig.9.1.) există relația vectorială:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r} \quad (9.1)$$

unde vectorii \vec{r}_1 , \vec{r} , \vec{r}_0 au expresiile:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1 \\ \vec{r}_0 &= x_0 \vec{i}_1 + y_0 \vec{j}_1 + z_0 \vec{k}_1 \\ \vec{r} &= x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \end{aligned} \quad (9.2)$$

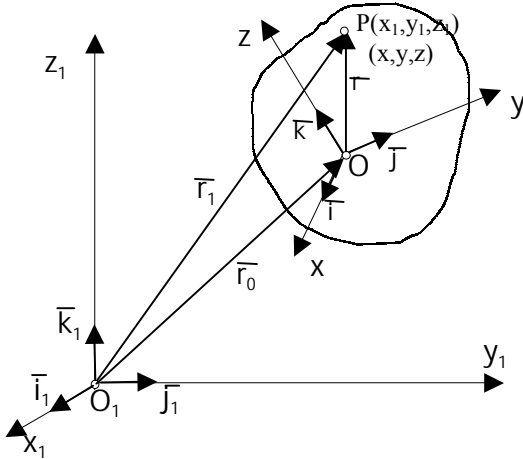


Fig.9.1

Se observă că în timp ce funcția vectorială \vec{r}_0 (echivalentă cu trei funcții scalare) este supusă la puține restricții (de continuitate, uniformitate, derivabilitate de două ori), funcțiile \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , reprezentând versorii axelor unui *triedru ortonormat*, trebuie să aibă mărimile egale cu unitatea și să fie

ortogonale două câte două, adică există șase relații de legătură:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad (9.3)$$

Aceasta înseamnă că numai trei din cele nouă cosinusi directoare pot fi luate arbitrar. Având în vedere că și \vec{r}_0 poate fi luat arbitrar (deci încă trei parametri scalari), rezultă că în cazul unei mișcări oarecare a unui solid rigid liber, poziția sa raportată la un reper fix T_1 , depinde de *șase parametri independenți*, adică rigidul are *șase grade de libertate cinematică*.

În general, este mai comod să se considere ca parametri ai mișcării, coordonatele unui punct P_0 al corpului (de obicei originea O a triedrului T) adică (x_0, y_0, z_0) și așa numitele *unghiuri ale lui Euler*: ψ - unghiul de precesie, θ - unghiul de nutație și respectiv φ - unghiul de rotație.

Aceste unghiuri se obțin rotind într-un anumit mod sistemul de axe mobil T față de cel fix T_1 până se obține o suprapunere completă a lor (mai jos, se va proceda de fapt, invers)

Fără a restrânge generalitatea problemei se consideră cele două triedre T și T_1 având originea comună ($O \equiv O_1$, fig. 9.2) și se efectuează următoarele operații:

- se rotește sistemul $O_1 x_1 y_1 z_1$ în jurul axei $O_1 z_1$ cu unghiul ψ până ce axa Ox_1 ajunge peste axa On , iar Oy_1 în On' ; axele On și On' se află în planul $x_1 O_1 y_1$ perpendicular pe Oz_1 . Axa On se numește *axa nodurilor*;
- sistemul $O_1 n n' z_1$ se rotește în jurul axei nodurilor On cu unghiul θ până ce axa Oz_1 se suprapune peste Oz , iar axa On' ajunge în On'' ;
- sistemul astfel obținut se rotește în jurul axei proprii Oz cu unghiul φ , până ce axele On și On'' se suprapun peste axele proprii Ox și Oy .

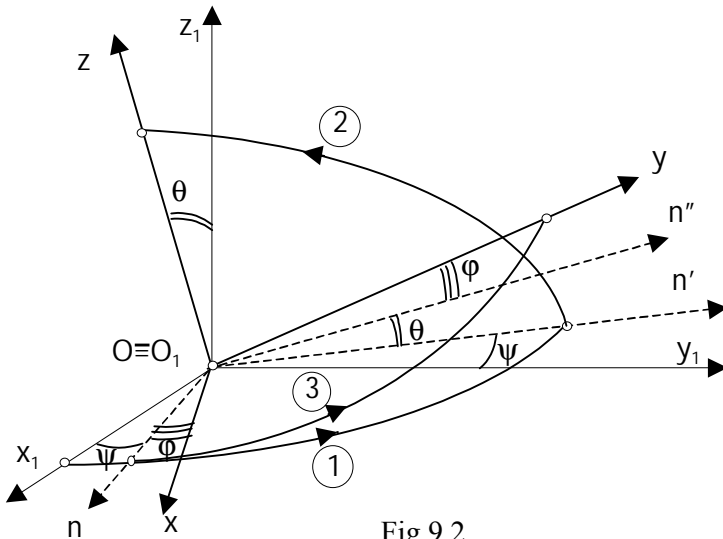


Fig.9.2

Rotirile se fac în sens pozitiv, iar unghiurile ψ , θ și φ sunt determinate, abstracție făcând de un multiplu de 2π radiani.

Așadar, pozițiile succesive în timp ale unui rigid în mișcarea lui generală sunt cunoscute dacă se cunosc variațiile în timp ale celor șase parametri:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(t), & \psi &= \psi(t) \\ y_0 &= y_0(t), & \theta &= \theta(t) \\ z_0 &= z_0(t), & \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \quad (9.4)$$

Aceste funcții reprezintă ecuațiile finite ale mișcării generale a unui rigid liber.

Datorită principiului rigidității, un punct oarecare al unui solid în mișcare, rămâne în permanență la aceeași distanță față de toate celelalte puncte ale acestuia. Deci punctele rigidului sunt în repaus față de sistemul de axe $T(Oxyz)$ legat de el, adică coordonatele x , y , z nu depind de timpul t .

Rezultă că față de triedrul fix T_1 se obțin relații de forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_0, y_0, z_0; \psi, \theta, \varphi; x, y, z) \\ y &= y_1(x_0, y_0, z_0; \psi, \theta, \varphi; x, y, z) \\ z_1 &= z_1(x_0, y_0, z_0; \psi, \theta, \varphi; x, y, z) \end{aligned} \quad (9.5)$$

care reprezintă *ecuațiile scalare parametrice ale traiectoriei* punctului respectiv. Cei șase parametri $(x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \varphi)$ depind de timp conform relațiilor (9.4).

Ecuatiile (9.4) împreună cu (9.5) reprezintă *ecuațiile scalare ale mișcării generale ale rigidului*, sau mișcarea unui punct oarecare P al său definit prin coordonatele sale (x, y, z) față de reperul mobil T solidar cu corpul. Ecuatiile (9.5) vor fi scrise sub formă analitică explicită numai în cazul mișcărilor particulare ale rigidului ce se vor studia în continuare.

9.2.2. Distribuția de viteze în mișcarea generală a solidului rigid

Ținând seama de relațiile (9.1) și (9.2) avem relația vectorială:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (9.6)$$

pe care derivând-o în raport cu timpul, obținem viteza unui punct oarecare P al rigidului în raport cu T_1 : $\bar{v}_1 = \dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_0 + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}}$ (9.7)

deoarece reperul T fiind solidar cu rigidul, poziția punctului P nu se schimbă față de T și deci coordonatele (x, y, z) nu depind de timp, iar derivatele lor sunt nule.

Viteza originii O a lui T este dată de : $\bar{v}_0 = \dot{\bar{r}}_0$ (9.8)

Derivând în raport cu timpul relațiile (9.3) obținem:

$$\begin{aligned} 2\bar{i} \cdot \dot{\bar{i}} = 0, \quad 2\bar{j} \cdot \dot{\bar{j}} = 0, \quad 2\bar{k} \cdot \dot{\bar{k}} = 0 \\ \dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} + \bar{i} \cdot \dot{\bar{j}} = 0, \quad \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} + \bar{j} \cdot \dot{\bar{k}} = 0, \quad \dot{\bar{k}} \cdot \bar{j} + \bar{k} \cdot \dot{\bar{j}} = 0 \end{aligned} \quad (9.9)$$

Dacă facem notațiile:

$$\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} = -\bar{i} \cdot \dot{\bar{j}} = \omega_z, \quad \dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} = -\bar{j} \cdot \dot{\bar{k}} = \omega_x, \quad \dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = -\bar{k} \cdot \dot{\bar{i}} = \omega_y \quad (9.10)$$

unde: $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sunt proiecțiile pe axele triedrului T ale unui vector $\bar{\omega}$ numit *viteză unghiulară*, având expresia analitică:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \quad (9.11)$$

Pe de altă parte, ținând seama că vectorul :

$$\bar{b} = \dot{\bar{r}} = x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} \quad (9.12)$$

ale cărui proiecții pe axele triedrului T sunt egale cu produsul scalar dintre \bar{b} și versorii corespunzători ai axelor, și ținând seama de relațiile (9.10) rezultă:

$$\begin{aligned} b_x = \bar{b} \cdot \bar{i} = x\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i} + y\dot{\bar{j}} \cdot \bar{i} + z\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i} = -y\omega_z + z\omega_y \\ b_y = \bar{b} \cdot \bar{j} = x\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j} + y\dot{\bar{j}} \cdot \bar{j} + z\dot{\bar{k}} \cdot \bar{j} = -z\omega_x + x\omega_z \\ b_z = \bar{b} \cdot \bar{k} = x\dot{\bar{i}} \cdot \bar{k} + y\dot{\bar{j}} \cdot \bar{k} + z\dot{\bar{k}} \cdot \bar{k} = -x\omega_y + y\omega_x \end{aligned} \quad (9.13)$$

deci:

$$\bar{b} = \dot{\bar{r}} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$$

$$\bar{b} = (-y\omega_z + z\omega_y)\bar{i} + (-z\omega_x + x\omega_z)\bar{j} + (-x\omega_y + y\omega_x)\bar{k}$$

sau:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (9.14)$$

Deci, conform relațiilor (9.10) și (9.11) vectorul viteză unghiulară se poate scrie:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} = (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{k}) \cdot \bar{i} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i}) \cdot \bar{j} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j}) \cdot \bar{k} \quad (9.15)$$

Relația (9.7) devine:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (9.16)$$

Această relație descrie *distribuția vitezelor* (sau câmpul vitezelor la un moment oarecare) a unui solid rigid în mișcare generală. Se observă că distribuția vitezelor a rigidului este definită de două funcții vectoriale: viteza originii triedrului mobil, $\bar{v}_0 = \bar{v}_0(t)$ și vectorul $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$ care (așa cum vom vedea în cazul mișcărilor particulare) depinde de unghiurile lui Euler, adică este un vector de rotație (de unde denumirea de viteză unghiulară).

Proiecțiile vitezei \bar{v}_1 pe axele triedrului mobil T sunt:

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v_{0x} + \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ v_{1y} &= v_{0y} + \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ v_{1z} &= v_{0z} + \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{aligned} \quad (9.17)$$

Ecuția matriceală corespunzătoare este :

$$\begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \text{ sau } \{v\} = \{v_0\} + [\hat{\omega}] \cdot \{r\}$$

unde $[\hat{\omega}]$ este *matricea antisimetrică a vitezei unghiulare*.

9.2.3. Proprietățile câmpului de viteze în mișcarea generală a rigidului

Se prezintă în continuare numai proprietățile câmpului de viteze în cazul mișcării generale, celelalte proprietăți vor fi scoase în evidență cu prilejul studiului mișcărilor particulare ale rigidului:

a) În orice moment al mișcării unui rigid, *proiecțiile vitezelor a două puncte oarecare ale rigidului pe direcția dreptei care unește punctele sunt egale (fig.9.3.a)*. Într-adevăr, proiectând relația (9.16) pe direcția lui $\bar{r} = \overline{P_0P}$, adică

$$\text{scriind (fig. 9.3.a): } \bar{v}_1 \cdot \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \bar{v}_0 \cdot \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} + (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$$

$$\text{rezultă: } \bar{v}_1 \cdot \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \bar{v}_0 \cdot \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} \quad \text{sau} \quad pr_{\overline{P_0P}} \bar{v}_1 = pr_{\overline{P_0P}} \bar{v}_0.$$

b) În orice moment al mișcării unui solid rigid, *proiecțiile vitezelor tuturor punctelor sale pe direcția lui $\bar{\omega}$ sunt egale între ele (fig.9.3.b)*.

Într-adevăr, proiectând relația (9.16) pe direcția lui $\bar{\omega}$ (fig.9.3.b) se obține:

$$\bar{v}_1 \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = \bar{v}_0 \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} + (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}; \text{ întrucât } (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = 0$$

rezultă proprietatea enunțată:

$$\bar{v}_1 \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = \bar{v}_0 \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} \quad \text{sau: } |\bar{v}_0| \cos \alpha_0 = |\bar{v}_1| \cos \alpha.$$

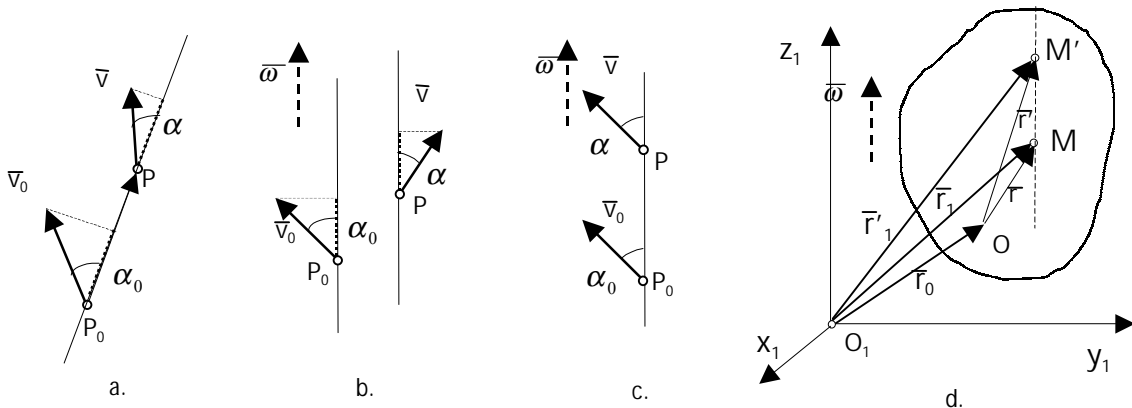


Fig.9.3

c) *Punctele aparținând unui rigid în mișcarea generală care sunt situate pe o paralelă la vectorul $\bar{\omega}$ au aceeași viteză (fig.9.3.c).*

Pentru demonstrație se consideră punctele M și M' aparținând rigidului în mișcare generală (fig.9.3.c) astfel încât $\overline{MM'} \parallel \bar{\omega}$, având vectorii de poziție față de T_1 : $\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}$, respectiv: $\bar{r}'_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}'$. Derivând în raport cu timpul cei doi vectori, obținem:

$$\dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}_{1M} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}; \quad \dot{\bar{r}}'_1 = \bar{v}_{1M'} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}'$$

Deoarece $\bar{r}' = \bar{r} + \overline{MM'}$, înlocuind în a doua relație se obține:

$$\bar{v}_{1M'} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{r} + \overline{MM'}) = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \overline{MM'}$$

întrucât $\overline{MM'} \parallel \bar{\omega}$, rezultă: $\bar{v}_{1M'} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$, adică: $\bar{v}_{1M} = \bar{v}_{1M'}$, ceea ce trebuia demonstrat.

d) *Vectorul $\bar{\omega}$ este același în orice punct al rigidului (fig.9.3.d.) și nu depinde de originea sistemului de referință T .*

Pentru a demonstra această afirmație, să considerăm trei puncte arbitrare și necoliniare O, M, M' aparținând rigidului (fig.9.3.d). Plecând de la ipoteza rigidității să exprimăm că vectorii $\overline{OM} = \bar{r}$ și $\overline{OM'} = \bar{r}'$ sunt de mărimi constante și că unghiul $M\hat{O}M'$ este constant, adică:

$$\bar{r}^2 = C_1; \bar{r}'^2 = C_2; \bar{r} \cdot \bar{r}' = C_3$$

Derivând în raport cu timpul prima relație ($\bar{r}^2 = C_1$) avem: $\dot{\bar{r}} \cdot \bar{r} = 0$, adică cei doi vectori sunt ortogonali, fapt care se poate scrie cu ajutorul produsului vectorial sub forma:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}, \quad \text{unde } \bar{\omega}_1 \text{ este un vector arbitrar.}$$

Procedând în mod analog cu a doua relație ($\bar{r}'^2 = C_2$) obținem:

$$\dot{\bar{r}}' = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}'.$$

Pentru a demonstra că vectorii $\bar{\omega}_1$ și $\bar{\omega}_2$ sunt identici, se derivează în raport cu timpul relația care exprimă invarianța unghiului ($\bar{r} \cdot \bar{r}' = C_3$): $\dot{\bar{r}} \cdot \bar{r}' + \bar{r} \cdot \dot{\bar{r}}' = 0$ și ținând seama de rezultatele precedente se obține:

$$(\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \bar{r}' + (\bar{\omega}_2 \times \bar{r}') \cdot \bar{r} = 0$$

$$\text{sau: } (\bar{r} \times \bar{r}') \bar{\omega}_1 - (\bar{r} \times \bar{r}') \cdot \bar{\omega}_2 = 0$$

$$\text{sau: } (\bar{r} \times \bar{r}') (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) = 0$$

Deoarece punctele O, M, M' au fost alese arbitrar și necoliniare, rezultă că ultima relație este îndeplinită numai dacă: $(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) = 0$ sau: $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}$ unde s-a introdus un singur vector $\bar{\omega}$.

Analog se poate demonstra că vectorul $\bar{\omega}$ nu depinde de alegerea originii sistemului de referință.

9.2.4. Distribuția accelerațiilor în mișcarea generală a rigidului

Accelerația unui punct oarecare P al unui solid rigid în mișcare, față de un reper fix T_I , se obține derivând relația (9.16) în raport cu timpul, adică:

$$\bar{a}_1 = \dot{\bar{v}}_1 = \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} \quad (9.18)$$

unde:

$$\dot{\bar{v}}_0 = \bar{a}_0 \quad (9.19)$$

este accelerația originii O a triedrului mobil T , iar $\dot{\bar{r}} = \bar{\omega} \times \bar{r}$.

Notând cu $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ vectorul $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_x \bar{i} + \varepsilon_y \bar{j} + \varepsilon_z \bar{k}$, relația (9.18) devine:

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (9.20)$$

relație care dă *distribuția accelerațiilor* diferitelor puncte ale rigidului (*sau câmpul de accelerații*) în mișcarea generală a acestuia.

Componentele accelerațiilor se obțin proiectând (9.20) pe axele triedrului mobil T :

$$\begin{aligned} a_{1x} &= a_{0x} + (z\varepsilon_y - y\varepsilon_z) + \omega_y(y\omega_x - x\omega_y) + \omega_z(z\omega_x - x\omega_z) \\ a_{1y} &= a_{0y} + (x\varepsilon_z - z\varepsilon_x) + \omega_z(z\omega_y - y\omega_z) + \omega_x(x\omega_y - y\omega_x) \\ a_{1z} &= a_{0z} + (y\varepsilon_x - x\varepsilon_y) + \omega_x(x\omega_z - z\omega_x) + \omega_y(y\omega_z - z\omega_y) \end{aligned} \quad (9.21)$$

sau grupând termenii:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= a_{0x} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x + (\omega_x\omega_y - \varepsilon_z)y + (\omega_x\omega_z + \varepsilon_y)z \\ a_{1y} &= a_{0y} - (\omega_z^2 + \omega_x^2)y + (\omega_y\omega_z - \varepsilon_x)z + (\omega_y\omega_x + \varepsilon_z)x \\ a_{1z} &= a_{0z} - (\omega_x^2 + \omega_y^2)z + (\omega_z\omega_x - \varepsilon_y)x + (\omega_z\omega_y + \varepsilon_x)y \end{aligned} \quad (9.22)$$

9.3. Mișcări particulare ale rigidului

În funcție de vectorii \bar{v}_0 și $\bar{\omega}$ care caracterizează distribuția vitezelor în mișcarea generală a rigidului, mișcările particulare pe care le poate avea un rigid sunt: *mișcarea de translație, mișcarea de rotație a rigidului cu o axă fixă, mișcarea sferică a rigidului cu un punct fix, mișcarea elicoidală și mișcarea plan-paralelă.*

9.3.1. Mișcarea de translație

Un solid rigid se află în mișcare de translație dacă o dreaptă oarecare solidară cu rigidul rămâne tot timpul mișcării paralelă cu ea însăși.

Exemplu de mișcări de translație: un ascensor, masa unei mașini de rabotat, pistonul într-un cilindru, caroseria unui vehicul care se deplasează pe un drum rectiliniu, mișcarea scaunelor unui scrânciob, etc.

Conform definiției date, în mișcarea de translație, axele sistemului mobil T (solidar cu corpul) nu-și schimbă orientarea față de reperul fix și deci, unghiurile lui Euler rămân constante în tot timpul mișcării. Rezultă că, în această mișcare, rigidul are trei grade de libertate cinematică, parametrii mișcării fiind coordonatele originii O a sistemului mobil față de reperul T_1 considerat fix, adică poziția rigidului la un moment dat, este determinată de trei funcții scalare independente (parametrii mișcării):

$$x_0 = x_0(t); \quad y_0 = y_0(t); \quad z_0 = z_0(t) \quad (9.23)$$

Dacă axele celor două triedre care rămân paralele T_1 și T , sunt alese în mod convenabil (ca în fig. 9.4), avem:

$$\bar{i} = \bar{i}_1, \quad \bar{j} = \bar{j}_1, \quad \bar{k} = \bar{k}_1 \quad (9.24)$$

$$\psi = 0, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0 \quad (9.25)$$

Ținând seama de cele afirmate mai sus, relația vectorială: $\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}$, unde:

$$\bar{r}_1 = x_1 \bar{i}_1 + y_1 \bar{j}_1 + z_1 \bar{k}_1; \quad \bar{r}_0 = x_0 \bar{i}_1 + y_0 \bar{j}_1 + z_0 \bar{k}_1;$$

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k} = x \bar{i}_1 + y \bar{j}_1 + z \bar{k}_1$$

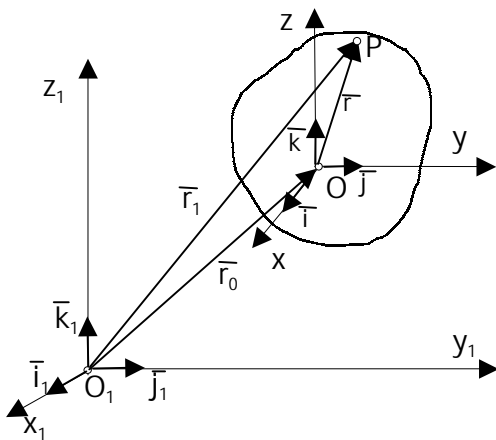


Fig.9.4

Prin identificare se obțin *ecuațiile parametriche ale traiectoriei* unui punct oarecare al rigidului în mișcarea de translație:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x \\ y_1 &= y_0 + y \\ z_1 &= z_0 + z \end{aligned} \quad (9.26)$$

Se observă din relația (9.26), că traiectoriile diferitelor puncte sunt identice și deplasate în direcțiile axelor, respectiv cu distanțele x_0, y_0, z_0 . Aceste traiectorii depind de legile de variație (9.23) ale parametrilor mișcării.

Distribuția vitezelor.

Întrucât existența vectorului $\bar{\omega}$ este legată de variațiile unghiurilor ψ, θ, φ , care sunt egale cu zero, rezultă: $\bar{\omega} = 0$. La același rezultat se ajunge dacă se consideră relația (9.15) și se ține seama că: $\dot{\bar{i}} = \dot{\bar{i}}_1 = 0, \quad \dot{\bar{j}} = \dot{\bar{j}}_1 = 0, \quad \dot{\bar{k}} = \dot{\bar{k}}_1 = 0$.

În consecință relația distribuției de viteze în cazul general (9.16), devine în acest caz:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 \quad (9.27)$$

ceea ce înseamnă că, în mișcarea de translație, vitezele tuturor punctelor rigidului sunt egale între ele și deci câmpul vitezelor poate fi reprezentat printr-un vector liber \bar{v} , egal cu viteza unui punct oarecare O al rigidului.

Proiecțiile vitezei unui punct oarecare pe axele triedrului T_1 (sau T) vor fi:

$$v_{1x} = v_{0x} = \dot{x}_0, \quad v_{1y} = v_{0y} = \dot{y}_0, \quad v_{1z} = v_{0z} = \dot{z}_0 \quad (9.28)$$

Distribuția accelerațiilor

Se studiază cu ajutorul relației generale (9.20):

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

unde trebuie cunoscute mărimile \bar{a}_{01} , $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ în fiecare moment.

$$\text{Întrucât } \bar{\omega} = 0, \quad \bar{\varepsilon} = 0 \text{ rezultă deci: } \bar{a}_1 = \bar{a}_0 \quad (9.29)$$

adică, *accelerațiile tuturor punctelor rigidului aflat în mișcare de translație, sunt egale între ele și deci câmpul accelerațiilor poate fi reprezentat de asemenea printr-un vector liber, egal cu accelerația unui punct oarecare O al rigidului.*

Relațiile (9.27) și (9.29) conduc la concluzia că toate punctele rigidului, la un moment dat, aflat în mișcarea de translație, au aceeași viteză și accelerație.

Aplicație

Să se calculeze viteza și accelerația unui punct M de pe bara AB (biela de cuplare) a mecanismului patrulater din fig. 9.5, unde $O_1A = O_2B = L$, $O_1O_2 = AB$, când $\omega = \text{const}$.

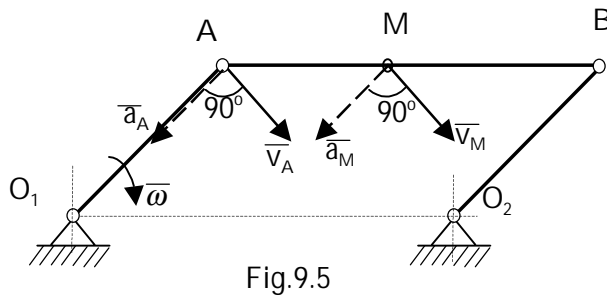


Fig.9.5

Rezolvare

Deoarece AB este paralelă tot timpul cu dreapta fixă O_1O_2 , ea execută o mișcare de translație și orice punct al ei are aceeași viteză și accelerație ca și punctul A, care este comun barei AB și manivelei O_1A , adică: $\bar{v}_M = \bar{v}_A$, $\bar{a}_M = \bar{a}_A$, care, din cinematica punctului material, au mărimea:

$$|\bar{v}_M| = |\bar{v}_A| = L\omega; \quad |\bar{a}_M| = |\bar{a}_A| = L\omega^2$$

9.3.2. Mișcarea de rotație a rigidului cu axă fixă

Un rigid efectuează o mișcare de rotație cu axă fixă, dacă două puncte ale sale rămân în tot timpul mișcării, fixe în spațiu (în raport cu un triedru fix T_1 dat).

Din cauza rigidității, toate punctele de pe dreapta care unește cele două puncte fixe sunt de asemenea fixe, deci în cazul acestei mișcări există o axă fixă care se numește *axă de rotație*. Exemple de corpuri care execută o mișcare de rotație sunt: rotorul unui electromotor, rotorul unei turbine, un volant, un arbore de transmisie, o ușă care se închide etc.

Dacă alegem convenabil originile celor două sisteme de axe (sistemul fix T_1 și mobil T) în același punct $O_1 \equiv O$ și axele Oz și O_1z_1 ale celor două sisteme de axe în lungul axei de rotație a rigidului (fig.9.6) atunci rezultă formulele ce definesc această mișcare: $\bar{r}_0 = 0$, $\bar{k} = \bar{k}_1$ (9.30)

Aceste relații vectoriale sunt echivalente cu următoarele cinci relații scalare:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \psi = 0, \quad \theta = 0 \quad (9.31)$$

Deci, în cazul mișcării de rotație, corpul are un singur grad de libertate cinematică și corespunde posibilității de a se roti în jurul axei fixe.

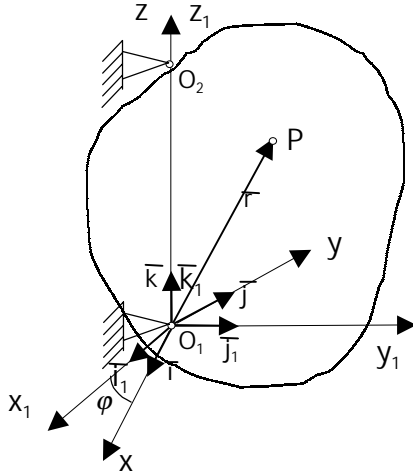


Fig.9.6

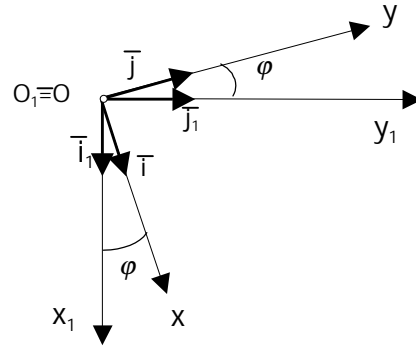


Fig.9.7

Singurul parametru al mișcării este unghiul dintre axele Ox și Ox_1 , adică :

$$\varphi = \varphi(t) \quad (9.32)$$

În aceste condiții, avem următoarele relații:

$$\bar{r}_1 = \bar{r} \quad \text{sau:} \quad x_1 \bar{i}_1 + y_1 \bar{j}_1 + z_1 \bar{k}_1 = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k} \quad (9.33)$$

Proiectând versorii \bar{i}, \bar{j} pe axele lui T_1 de versori \bar{i}_1, \bar{j}_1 (fig.9.7) se obține:

$$\bar{i} = (|\bar{i}| \cos \varphi) \bar{i}_1 + (|\bar{i}| \sin \varphi) \bar{j}_1; \quad \bar{j} = (-|\bar{i}| \sin \varphi) \bar{i}_1 + (|\bar{i}| \cos \varphi) \bar{j}_1$$

$$\text{sau} \quad \bar{i} = \bar{i}_1 \cos \varphi + \bar{j}_1 \sin \varphi; \quad \bar{j} = -\bar{i}_1 \sin \varphi + \bar{j}_1 \cos \varphi \quad (9.34)$$

Înlocuind (9.34) în (9.33) și identificând se obțin *ecuațiile parametrice ale traiectoriei unui punct oarecare al corpului în mișcare de rotație*:

$$x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi; \quad y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi; \quad z_1 = z \quad (9.35)$$

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei pentru acest caz, se mai scriu matricial:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Relațiile (9.35) împreună cu “*legea orară a mișcării*” (9.32) reprezintă ecuațiile mișcării punctului în funcție de coordonatele sale față de reperul mobil.

Din a treia ecuație a relațiilor (9.35) rezultă că traiectoriile sunt curbe în plane perpendiculare pe axa Oz .

Dacă din primele două ecuații ale relațiilor (9.35), se elimină parametrul φ , (ridicând la pătrat membru cu membru și apoi însumând) se obține:

$$x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 = d_z^2 \quad (9.36)$$

ecuație ce reprezintă un cilindru circular drept, având ca axă de simetrie, axa fixă a rigidului, iar ca rază distanța de la punct la axa fixă.

Relația $z_1 = z$ împreună cu (9.36) reprezintă ecuațiile traiectoriei unui punct oarecare, adică un cerc situat într-un plan perpendicular pe axa fixă, cu centrul pe această axă și cu raza egală cu distanța d_z a punctului până la această axă. Diferitele puncte ale rigidului descriu deci, cercuri concentrice cu centrele pe axa fixă, cercuri situate în plane paralele, perpendiculare pe axa fixă.

Distribuția vitezelor în mișcarea de rotație se determină din formula generală (9.16): $\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$, în care trebuie determinați vectorii \bar{v}_0 , $\bar{\omega}$. Din relația (9.30) rezultă:

$$\bar{v}_0 = 0 \quad (9.37)$$

$$\text{și deci: } \bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (9.38)$$

Pentru determinarea vectorului $\bar{\omega}$ să derivăm mai întâi, în raport cu timpul, relațiile (9.34) și obținem:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{i}} &= \dot{\varphi} \cdot (-\sin \varphi \cdot \bar{i}_1 + \cos \varphi \cdot \bar{j}_1) = \dot{\varphi} \cdot \bar{j}; \\ \dot{\bar{j}} &= -\dot{\varphi} \cdot (\cos \varphi \cdot \bar{i}_1 + \sin \varphi \cdot \bar{j}_1) = -\dot{\varphi} \cdot \bar{i} \end{aligned} \quad (9.39)$$

Pe de altă parte, deoarece $\bar{k} = \bar{k}_1$, avem $\dot{\bar{k}} = 0$, iar expresia $\bar{\omega} = (\dot{\bar{j}} \bar{k})\bar{j} + (\dot{\bar{k}} \bar{i})\bar{j} + (\dot{\bar{i}} \bar{j})\bar{k}$, conduce la: $\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k}$ de unde rezultă că $\bar{\omega} \parallel \bar{k}$, adică $\bar{\omega}$ se poate scrie: $\bar{\omega} = \omega \bar{k} = \dot{\varphi} \bar{k}$

$$(9.40)$$

$$\text{adică: } \dot{\varphi} = \omega \quad (9.41)$$

Rezultă că vectorul $\bar{\omega}$ are direcția axei de rotație (Oz) și scalarul egal cu viteza unghiulară ($\dot{\varphi} = \omega$) aceeași pentru toate punctele rigidului. Pentru aceste motive $\bar{\omega}$ este denumit *vectorul viteză unghiulară*. Ținând seama de (9.40) relația (9.38) devine :

$$\bar{v}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \bar{i} + \omega x \bar{j} \quad (9.42)$$

Pentru un punct oarecare $P(x, y, z)$, rezultă următoarele proiecții ale vitezei pe axele sistemului mobil T:

$$v_{1x} = -\omega y, \quad v_{1y} = \omega x, \quad v_{1z} = 0 \quad (9.43)$$

iar mărimea vitezei:

$$\bar{v}_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega \cdot d_z \quad (9.44)$$

formulă care se regăsește scriind mărimea produsului vectorial (9.38).

$$|\bar{v}_1| = |\bar{\omega} \times \bar{r}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}| \sin(\bar{\omega}, \bar{r}) = |\bar{\omega}| d_z = \dot{\varphi} d_z$$

Din expresiile proiecțiilor vitezei \bar{v}_1 pe axele sistemului mobil, rezultă următoarele *proprietăți* ale distribuției vitezelor într-o mișcare de rotație (fig.9.8):

- Singurele puncte în care viteza este nulă sunt cele care aparțin axei de rotație.
Într-adevăr, egalând cu zero v_{1x} și v_{1y} se obține $x = 0$, $y = 0$, care reprezintă ecuațiile lui Oz.
- Vitezele sunt conținute în plane normale pe axa de rotație Oz. Această proprietate rezultă din relația $v_{1z} = 0$.
- Punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa de rotație au aceeași viteză. Această proprietate rezultă din faptul că în expresiile vitezelor v_{1x} , v_{1y} , v_{1z} nu apare cota z a punctului, deci toate punctele care au o anumită abscisă x' și o anumită ordonată y' au aceeași viteză. Aceste puncte se găsesc pe dreapta $x = x'$, $y = y'$, paralelă cu Oz.
- Pe o dreaptă (Δ) care întâlnește axa de rotație sub un unghi drept vectorul viteză variază liniar (vârfurile vectorilor viteză ale diferitelor puncte de pe (Δ) se găsesc pe o dreaptă), scalarul său fiind proporțional cu distanța de la punct la axa de rotație, iar direcția sa făcând un unghi drept cu (Δ). Această proprietate este conținută în relația (9.44), regăsindu-se astfel rezultatul cunoscut de la mișcarea circulară a punctului material: $v = r \omega$.

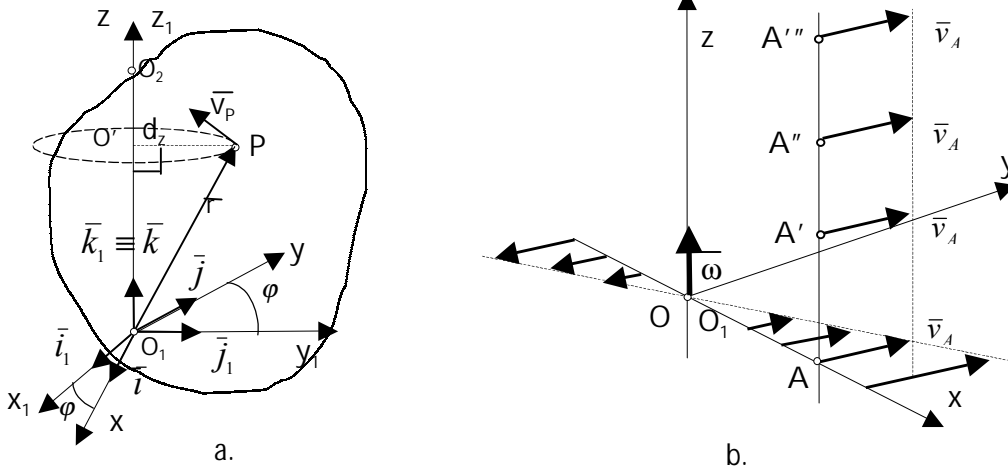


Fig.9.8

Distribuția accelerațiilor

Se studiază plecând de la relația generală (9.20):

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \text{ în care ținând seama că în mișcarea de rotație: } \bar{v}_0 = 0, \bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}, \text{ rezultă deci: } \bar{a}_0 = 0 \text{ și deci: } \bar{a}_1 = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}_1 \quad (9.45)$$

Pe de altă parte, derivând în raport cu timpul relația (9.40):

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \varepsilon \bar{k} \quad (9.46)$$

Rezultă că vectorul $\bar{\varepsilon}$ are direcția axei de rotație Oz și scalarul egal cu accelerația unghiulară $\dot{\bar{\omega}} = \varepsilon$, aceeași pentru toate punctele rigidului. Pentru aceste motive $\bar{\varepsilon}$ este denumit *vectorul accelerație unghiulară*.

În aceste condiții, relația (9.45) se scrie:

$$\bar{a}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} \text{ sau:} \quad (9.47)$$

$$\bar{a}_1 = (-\varepsilon y - \omega^2 x)\bar{i} + (\varepsilon x - \omega^2 y)\bar{j}$$

Proiecțiile vectorului accelerație pe axele triedrului mobil T vor fi

$$a_{1x} = -\varepsilon y - \omega^2 x, \quad a_{1y} = \varepsilon x - \omega^2 y, \quad a_{1z} = 0 \quad (9.48)$$

și deci: $|\bar{a}_1| = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2 + a_{1z}^2} = d_z \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (9.49)$

Un alt mod de interpretare a formulei (9.45) este acela de a considera accelerația unui punct având două componente:

- accelerația de rotație sau tangențială:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{rot} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \quad (9.50)$$

- accelerația axială (axipetă) sau normală:

$$\bar{a}_n = \bar{a}_{ax} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \times \bar{v}_1 \quad (9.51)$$

Iar mărimile acestora devin (fig.9.9):

$$a_t = |\bar{a}_{rot}| = \varepsilon r \cdot \sin(\bar{\varepsilon}, \bar{r}) = \varepsilon d_z \quad (9.53)$$

$$a_n = |\bar{a}_{ax}| = \omega v_1 \cdot \sin(\bar{\omega}, \bar{v}_1) = \omega^2 d_z$$

și deoarece $\bar{a}_t \perp \bar{a}_n$ rezultă: $|\bar{a}_1| = \sqrt{\bar{a}_t^2 + \bar{a}_n^2} = d_z \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, aceeași cu formula (9.49).

Acest mod de abordare a studiului accelerațiilor în mișcarea de rotație a rigidului conduce la concluzia că componentele \bar{a}_t , \bar{a}_n sunt identice respectiv cu accelerația tangențială și accelerația normală de la mișcarea circulară a punctului material, deoarece și în cazul rigidului în mișcarea de rotație, fiecare punct al lui (cu excepția punctelor ce aparțin axei de rotație) descrie un cerc (fig.9.9).

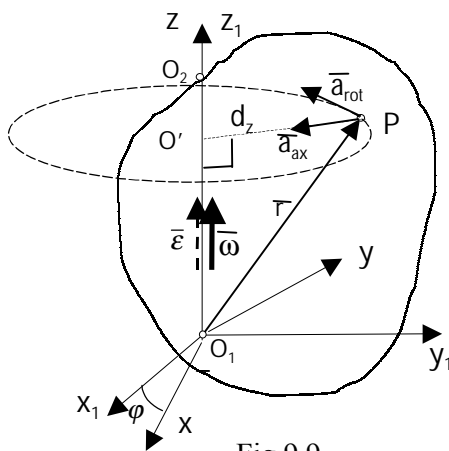


Fig.9.9

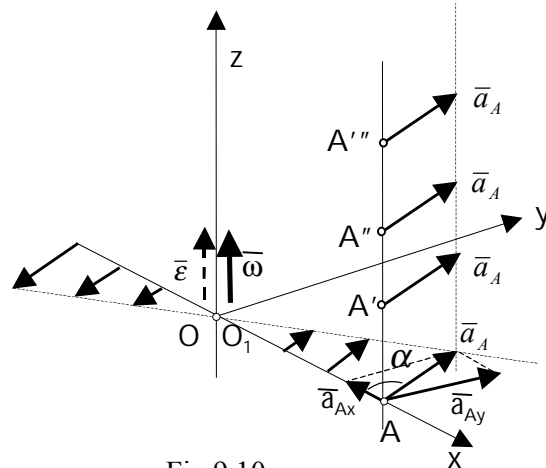


Fig.9.10

Rezultă următoarele proprietăți ale distribuției accelerațiilor în mișcarea de rotație (fig.9.10):

- a. Singurele puncte de accelerație nulă sunt cele care aparțin axei de rotație. Această afirmație rezultă din faptul că atât mărimile vectorilor \bar{a}_{rot} , \bar{a}_{ax} cât și a vectorului \bar{a}_1 depind de distanța d_z de la un punct la axa de rotație și ca atare, acestea vor fi nule dacă $d_z = 0$.
- b) Accelerațiile sunt conținute în plane normale pe axa de rotație, deoarece $a_{1z} = 0$.
- c) Punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa de rotație au aceeași accelerație (fig.9.10), deoarece cota z a punctului nu apare în expresiile (9.48), deci toate punctele de pe dreapta AA' au aceeași accelerație.
- d) Pe o dreaptă (Δ) care întâlnește axa de rotație sub un unghi drept, vectorul accelerație variază liniar (vârfurile vectorilor accelerație ai diferitelor puncte de pe (Δ) se găsesc pe o dreaptă, scalarul său fiind proporțional cu distanța de la punct la axa de rotație, iar direcția sa făcând un unghi constant ($\alpha = const.$) cu dreapta (Δ). Într-adevăr, dacă se consideră ca axă (Δ) axa Ox, un punct oarecare de pe aceasta are coordonatele $x = d_z$, $y = 0$, $z = 0$ și proiecțiile lui \bar{a}_1 sunt:

$$a_{1x} = -\varepsilon y - \omega^2 x = -\omega^2 d_z, \quad a_{1y} = \varepsilon x - \omega^2 y = \varepsilon d_z, \quad a_{1z} = 0$$

de unde rezultă formula (9.50) și formula:

$$tg\alpha = |a_y|/|a_x| = |\varepsilon|/\omega^2 = const. \quad (9.53)$$

În cazul în care vectorul accelerație unghiulară $\bar{\varepsilon}$ este nul într-un interval de timp, rezultă $\omega = ct.$ și mișcarea respectivă se numește *mișcare de rotație uniformă*. Dacă vectorul $\bar{\varepsilon}$ este constant, mișcarea se numește *mișcare de rotație uniform variată* și anume: *uniform accelerată* dacă $\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ au același sens și *uniform întârziată* dacă $\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ au sensurile opuse.

Dacă axa Oz nu coincide cu O_1z_1 atunci: $\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}$.

În construcția de mașini, pentru mașinile rotative se cunoaște de obicei turația n exprimată în *rot/min*. Legătura dintre viteza unghiulară și turația n se obține imediat considerând mișcarea efectuată într-un minut: $\omega = \pi n / 30$ (9.57) unde viteza unghiulară ω se măsoară *rad/s*, iar turația n în *rot/min*.

Aplicația 1

Se consideră o placă de formă dreptunghiulară $OABC$ ($OA = a$ și $OC = b$) care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe fixe care trece prin O și este perpendiculară pe placă. Să se calculeze vitezele și accelerațiile punctelor A și B .

Rezolvare

Aplicând formula: $\bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}$

se obține: $\bar{v}_{1A} = \bar{\omega} \times \overline{OA} = \omega a \bar{j}$

deci: $\bar{v}_{1A} \perp \overline{OA}, |\bar{v}_{1A}| = \omega a$

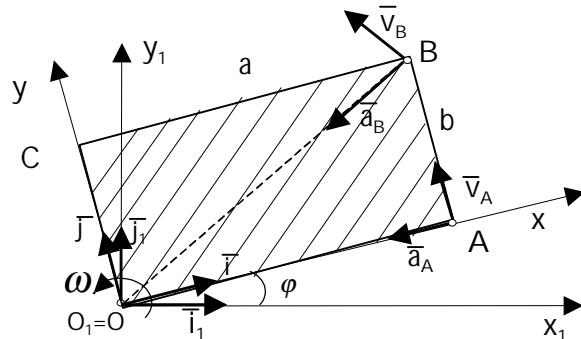


Fig.9.11

$$\text{\textcircled{si}}: \bar{v}_{1B} = \bar{\omega} \times \overline{OB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = -b\omega\bar{i} + a\omega\bar{j},$$

iar mărimea vitezei: $|\bar{v}_{1B}| = \omega\sqrt{a^2 + b^2}$

Aplicând formula accelerației: $\bar{a}_1 = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}_1$

se obține accelerația punctului A:

$$\bar{a}_{1A} = \varepsilon\bar{k} \times a\bar{i} + \omega\bar{k} \times \omega a\bar{j} = \varepsilon a\bar{j} - a\omega^2\bar{i}$$

Întrucât $\omega = \text{constant}$, avem $\varepsilon = 0$ și deci $a_{1A} = -a\omega^2\bar{i}$,

adică: $\bar{a}_{1A} \perp \overline{OA}$, $|\bar{a}_{1A}| = a\omega^2 = \omega^2 \cdot |\overline{OA}|$

Analog se obține:

$$\bar{a}_{1B} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{1B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -b & a & 0 \end{vmatrix}; \quad \bar{a}_{1B} = -\omega^2(a\bar{i} + b\bar{j})$$

și mărimea accelerației:

$$|\bar{a}_{1B}| = \omega^2\sqrt{a^2 + b^2} = \omega^2|\overline{OB}|.$$

Mărimile vitezelor și accelerațiilor se pot obține și direct din expresiile lui $|\bar{v}_1|$ și $|\bar{a}_1|$ obținute pentru mișcarea de rotație a rigidului.

Aplicația 2

Un paralelipiped având muchiile $OA = 3\text{cm}$, $OC = 4\text{cm}$, $OO' = 12\text{cm}$ (fig.9.12) se rotește uniform în jurul diagonalei OB' cu viteza unghiulară constantă $\omega = 26\text{ rad/s}$. Se cere să se determine vitezele și accelerațiile colțurilor A și B.

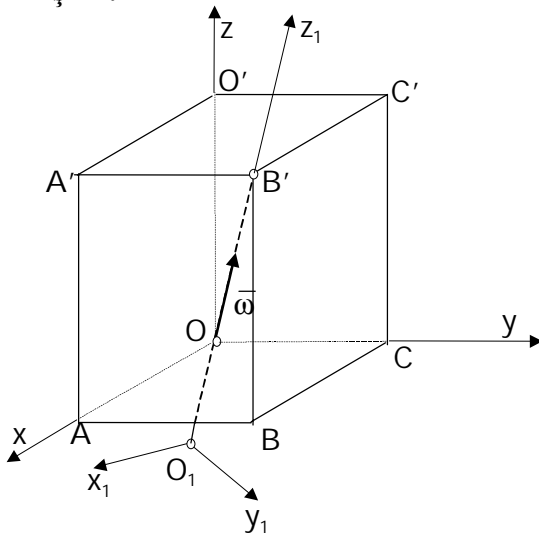


Fig. 9.12

Rezolvare

Se aleg axele sistemului mobil în lungul muchiilor OA , OC și OO' ale paralelipipedului.

Diagonala OB' este suportul axei fixe O_1z_1 .

Viteza unui punct al rigidului se determină cu formula: $\bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}$.

Mai întâi se determină expresia analitică a vectorului $\bar{\omega}$ (adică componentele sale ω_x , ω_y , ω_z) pe axele triedrului mobil $Oxyz$:

$$\bar{\omega} = |\bar{\omega}| \cdot \text{vers } \bar{\omega} = |\bar{\omega}| \cdot \text{vers } \overline{OB'} = |\bar{\omega}| \frac{\overline{OB'}}{|\overline{OB'}|}.$$

Ținând seama că $O(0, 0, 0)$, $B'(3, 4, 12)$ și $\omega = 26 \text{ rad/s}$, avem:

$$\omega = 26 \frac{3\bar{i} + 4\bar{j} + 12\bar{k}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = 26 \frac{3\bar{i} + 4\bar{j} + 12\bar{k}}{13} = 6\bar{i} + 8\bar{j} + 24\bar{k}$$

Vitezele punctelor $A(3, 0, 0)$ și $B(3, 4, 0)$ sunt:

$$\bar{v}_{1A} = \bar{\omega} \times \overline{OA} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 8 & 24 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 72\bar{j} - 24\bar{k}; \quad |\bar{v}_{1A}| = \sqrt{72^2 + (-24)^2} = 75,9 \text{ cm s}^{-1}.$$

$$\bar{v}_{1B} = \bar{\omega} \times \overline{OB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 8 & 24 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -96\bar{j} + 72\bar{k}; \quad |\bar{v}_{1B}| = \sqrt{(-96)^2 + 72^2} = 120 \text{ cm s}^{-1}.$$

Accelerațiile punctelor $A(3, 0, 0)$ și $B(3, 4, 0)$ se pot calcula cu formula (9.45) ținând seama că $\varepsilon=0$:

$$\bar{a}_{1A} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{1A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 8 & 24 \\ 0 & 72 & -24 \end{vmatrix} = -5760\bar{i} + 144\bar{j} + 432\bar{k};$$

$$|\bar{a}_{1A}| = \sqrt{5760^2 + 144^2 + 432^2} = 5777,97 \text{ cm s}^{-2}$$

$$\bar{a}_{1B} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{1B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 8 & 24 \\ 0 & -96 & 72 \end{vmatrix} = 2880\bar{i} - 432\bar{j} - 576\bar{k};$$

$$|\bar{a}_{1B}| = \sqrt{2880^2 + 432^2 + 576^2} = 2968,63 \text{ cm s}^{-2}$$

9.3.3. Mișcarea elicoidală (de rototranslație)

Un rigid efectuează o mișcare elicoidală dacă două puncte ale sale rămân tot timpul mișcării conținute pe o dreaptă fixă în spațiu; aceasta se numește *axa mișcării elicoidale*.

În cazul acestei mișcări, corpul are *două grade de libertate cinematică* care corespund celor *două posibilități de mișcare*: de a se deplasa de-a lungul dreptei fixe și de a se roti în același timp în jurul acestei drepte.

Ca exemple de mișcări elicoidale putem cita: mișcarea unui șurub, mișcarea unui glonte în interiorul unei țevi ghintuite, etc.

Pentru studiul acestei mișcări se consideră un triedru fix $T_1 (O_1x_1y_1z_1)$ astfel încât axa O_1z_1 să coincidă cu axa mișcării elicoidale și triedrul mobil $T (Oxyz)$ solidar cu rigidul a cărui axă Oz coincide cu axa O_1z_1 (fig.9.13).

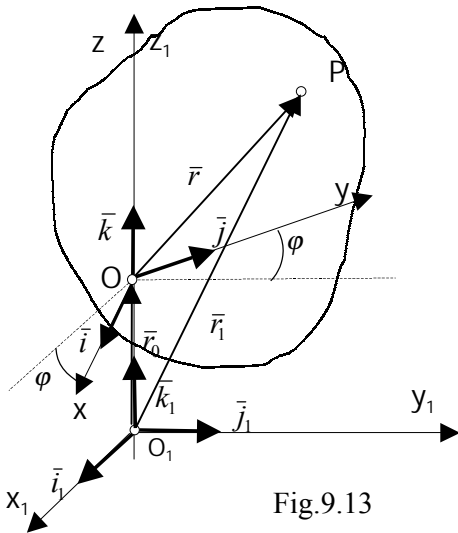


Fig.9.13

Spre deosebire de mișcarea de rotație, în această mișcare originea O a triedrului T se deplasează pe axa O_1z_1 , deci vectorul $\bar{r}_0 = \overline{O_1O}$ este variabil ca mărime. Avem deci: $\bar{r}_0 = \bar{k}r_0$; $\bar{k} = \bar{k}_1$ (9.58)

sau:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 0, \\ \psi &= 0, & \theta &= 0 \end{aligned} \quad (9.59)$$

Parametrii mișcării sunt:

$$z_0 = z_0(t); \varphi = \varphi(t) \quad (9.60)$$

Ecuțiile mișcării unui punct oarecare al rigidului în acest caz, rezultă din relația generală: $\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}$ unde, pentru cazul particular al acestei mișcări, vectorii \bar{r}_1 , \bar{r}_0 , \bar{r} au forma:

$$\bar{r}_1 = x_1\bar{i}_1 + y_1\bar{j}_1 + z_1\bar{k}_1; \quad \bar{r}_0 = z_0\bar{k}_1; \quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (9.61)$$

Ca și în mișcarea de rotație se observă că versorii mobili \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} se pot scrie:

$$\bar{i} = \bar{i}_1 \cos \varphi + \bar{j}_1 \sin \varphi; \quad \bar{j} = -\bar{i}_1 \sin \varphi + \bar{j}_1 \cos \varphi; \quad \bar{k} = \bar{k}_1 \quad (9.62)$$

Introducând expresiile (9.61) în relația: $\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}$, ținând seama de (9.62) și identificând, se obțin ecuațiile parametriche ale traiectoriei unui punct oarecare P (de coordonatele x , y , z față de T):

$$x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi; \quad y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi; \quad z_1 = z_0 + z \quad (9.63)$$

sau matricial:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Ecuțiile (9.63) împreună cu (9.60) reprezintă *ecuațiile parametriche ale mișcării unui punct oarecare al rigidului în mișcare elicoidală*.

Eliminând parametrul φ din primele două ecuații (9.63) se obține:

$$x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 = d_z^2 \quad (9.64)$$

unde d_z este distanța de la un punct al rigidului până la axa fixă.

Ecuția (9.64) reprezintă un cilindru circular drept, având ca axă dreaptă fixă. Rezultă deci că diferite puncte ale rigidului se mișcă pe cilindri coaxiali, axa comună fiind axa mișcării elicoidale.

Distribuția vitezelor în mișcarea elicoidală rezultă din formula (9.16):

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

în care: \bar{v}_0 este viteza originii sistemului mobil, care se deplasează pe axa fixă Oz :

$$\bar{v}_0 = v_0\bar{k} = \dot{z}_0\bar{k}_1 \quad (9.65)$$

vectorul $\bar{\omega}$ se determină din relația: $\bar{\omega} = (\dot{j} \cdot \bar{k})\bar{i} + (\dot{k} \cdot \bar{i})\bar{j} + (\dot{i} \cdot \bar{j})\bar{k}$

$$\text{în care dacă se fac înlocuirile : } \dot{i} = \bar{j}\dot{\phi}, \quad \dot{j} = -\bar{i}\dot{\phi}, \quad \dot{k} = \dot{k}_1 = 0 \quad (9.66)$$

$$\text{se obține: } \bar{\omega} = \dot{\phi}\bar{k} \quad (9.67)$$

$$\text{adică } \bar{\omega} \parallel \bar{k}, \quad \bar{\omega} \parallel \bar{v}_0 \quad \text{și deci } \bar{\omega} = |\bar{\omega}|\bar{k} = \omega\bar{k} \quad (9.68)$$

$$\text{și prin urmare: } \omega = \dot{\phi} \quad (9.69)$$

Rezultă că vectorul $\bar{\omega}$ în mișcarea elicoidală, este vectorul viteză unghiulară ($\omega = \dot{\phi}$) și el este coliniar cu vectorul \bar{v}_0 tot timpul mișcării. Ținând seama de acestea putem scrie:

$$\bar{v}_1 = \dot{z}_0\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\bar{i} + x\omega\bar{j} + \dot{z}_0\bar{k}, \quad (9.70)$$

iar componentele vitezei în raport cu axele triedrului mobil T sunt:

$$v_{1x} = -y\omega, \quad v_{1y} = x\omega, \quad v_{1z} = \dot{z}_0 = v_0 \quad (9.71)$$

Mărimea vectorului viteză este:

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2} = \sqrt{\omega^2(x^2 + y^2) + v_0^2} = \sqrt{v_{rot}^2 + v_0^2} \quad (9.72)$$

Rezultă următoarele proprietăți ale vitezei în mișcarea elicoidală:

- a) distribuția de viteze se obține prin suprapunerea a două câmpuri de viteze: unul specific unei mișcări de rotație în jurul axei Oz , cu viteza unghiulară ω ($|\bar{v}_{rot}| = \omega \cdot d_z$) și celălalt specific unei mișcări de translație în lungul axei O_1z_1 ($\bar{v}_0 = \dot{z}_0\bar{k}$). Axa Oz se numește axă de rototranslație:

$$\bar{v}_1 = (-y\omega\bar{i} + x\omega\bar{j}) + \dot{z}_0\bar{k} = \bar{v}_{rot} + \bar{v}_{tr} \quad (\text{fig.9.14});$$

- b) nu există puncte ale rigidului de viteză nulă, deoarece componenta v_{1z} este diferită de zero, iar punctele de pe axa mișcării au viteza minimă. Într-adevăr dacă în formula (9.72) înlocuim $x = 0, y = 0$, se obține $|\bar{v}_1|_{min} = |\bar{v}_0|$ (fig.9.14);
- c) punctele situate pe o dreaptă BB' (fig.9.14) paralelă cu axa mișcării elicoidale (având aceleași coordonate x, y), au vitezele egale, deoarece proiecțiile vitezei \bar{v}_1 (adică \bar{v}_{rot}) nu depind de cota z , deci sunt aceleași pentru toate punctele care au aceeași abscisă x_0 și aceeași ordonată y_0 , iar $x = x_0$ și $y = y_0$ sunt ecuațiile unei drepte paralele cu axa Oz (axa mișcării elicoidale);
- d) pentru punctele situate pe o dreaptă (Δ) care întâlnește axa mișcării elicoidale sub un unghi drept, vectorul viteză variază liniar. Această afirmație este justificată de faptul că în formulele (9.71) componentele v_{1x} , v_{1y} și v_{1z} ale vitezei sunt liniare în coordonatele x și y .

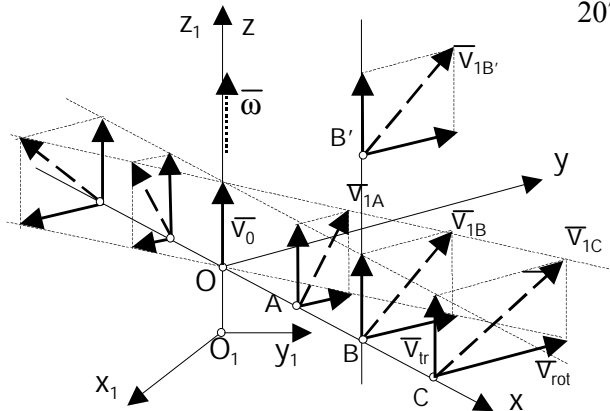


Fig.9.14

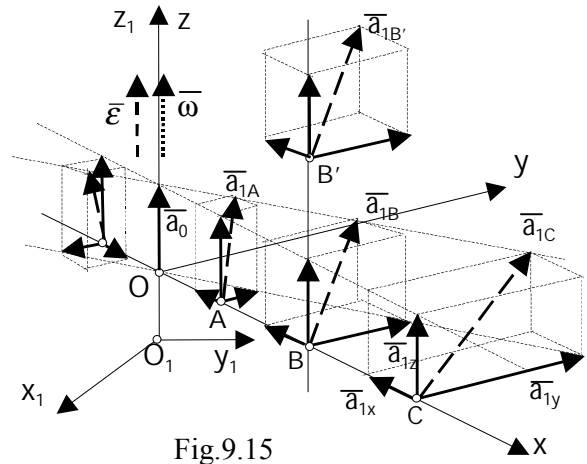


Fig.9.15

Distribuția accelerațiilor

Distribuția accelerațiilor în cazul mișcării elicoidale se studiază folosind relația generală: $\bar{a}_1 = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$

$$\text{unde: } \bar{a}_0 = \dot{\bar{v}}_0 = a_0 \bar{k} \quad (9.73)$$

este accelerația originii sistemului de axe mobil față de cel fix, iar din faptul că $\bar{\omega} = \omega \bar{k}$ și $\dot{\bar{\omega}} = \varepsilon$ rezultă că accelerația unghiulară este paralelă cu vectorul $\bar{\omega}$: $\bar{\varepsilon} = \varepsilon \bar{k} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega} \bar{k}$

$$(9.74)$$

Deci relația generală: $\bar{a}_1 = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ devine:

$$\bar{a}_1 = a_0 \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{sau: } \bar{a}_1 = (-\varepsilon y - \omega^2 x) \bar{i} + (\varepsilon x - \omega^2 y) \bar{j} + a_0 \bar{k} \quad (9.75)$$

de unde rezultă componentele vectorului accelerație pe axele sistemului mobil:

$$a_{1x} = -\varepsilon y - \omega^2 x, \quad a_{1y} = \varepsilon x - \omega^2 y, \quad a_{1z} = a_0 \quad (9.76)$$

și mărimea vectorului accelerație:

$$|\bar{a}_1| = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2 + a_{1z}^2} = \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(x^2 + y^2) + a_0^2} \quad (9.77)$$

$$|\bar{a}_1| = \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4) \cdot d_z^2 + a_0^2}$$

Se observă că componentele a_{1x} și a_{1y} sunt la fel ca în mișcarea de rotație iar componenta $a_{1z} = a_0$ este la fel ca în mișcarea de translație, deci (9.75) se mai scrie: $\bar{a}_1 = \bar{a}_{rot} + \bar{a}_{transl.}$

Rezultă următoarele *proprietăți ale distribuției accelerațiilor în mișcarea elicoidală*:

- a) *distribuția accelerațiilor se obține prin suprapunerea a două câmpuri de accelerații: unul corespunzând unei mișcări de rotație în jurul axei Oz ($\bar{a}_{rot} = a_{1x} \bar{i} + a_{1y} \bar{j}$, unde : $a_{1x} = a_{ax}$, $a_{1y} = a_{rot}$) și celălalt corespunzând unei mișcări de translație în lungul axei Oz ($a_{1z} = a_{transl} = a_0$);*
- e) *proiecția accelerației pe direcția axei de rotație elicoidale este constantă (nu depinde de coordonatele punctului);*

- b) în general, *nu există nici un punct al rigidului de accelerație nulă iar punctele de pe axa mișcării elicoidale au accelerația minimă*. Într-adevăr, făcând în relația (9.77) $x = 0, y = 0$ se obține $|\bar{a}_1|_{min} = a_0$, adică accelerațiile punctelor rigidului de pe axa mișcării elicoidale;
- c) *punctele situate pe o dreaptă BB' paralelă cu axa mișcării elicoidale (fig.9.15), au accelerații egale* (deoarece proiecțiile accelerației nu depind de cota z);
- d) *pentru punctele situate pe o dreaptă (Δ) perpendiculară pe axa mișcării elicoidale accelerațiile variază liniar*. Această afirmație este o consecință a faptului că expresiile componentelor accelerațiilor a_{1x}, a_{1y} , și a_{1z} (9.76) sunt liniare în coordonatele x și y .

A p l i c a ț i e. Mișcarea unui șurub.

Un caz particular al mișcării elicoidale este acela în care există o relație de proporționalitate între deplasarea pe axa mișcării elicoidale $z_0 = z_0(t)$ și unghiul $\varphi = \varphi(t)$ de forma: $z_0 = C\varphi$ ($C = constantă$)

(a) Această mișcare de șurub a rigidului are un singur grad de libertate. Dacă se consideră mișcarea unui șurub față de o piuliță fixă, atunci pentru $C > 0$ corespunde șurubului drept, iar pentru $C < 0$ corespunde șurubului stâng.

Derivând succesiv în raport cu timpul relația (a):

$$\dot{z}_0 = C\dot{\varphi}, \quad \ddot{z}_0 = C\ddot{\varphi} \quad (b)$$

sau: $v_0 = C\omega, \quad a_0 = C\varepsilon \quad (c)$

Pentru determinarea constantei C (care este în funcție de pasul p al șurubului) se observă că la o rotație completă a șurubului $\varphi = 2\pi$ acesta înaintază cu distanța $z_0 = p$. Înlocuind această condiție în relația (a) avem: $p = C \cdot 2\pi$ de unde rezultă: $C = p / 2\pi$, iar relațiile (c) care dau viteza și accelerația devin:

$$v_0 = \frac{p}{2\pi} \omega, \quad a_0 = \frac{p}{2\pi} \varepsilon. \quad (d)$$

Se cere viteza și accelerația unui punct de pe periferia unui șurub $M16$ care se rotește cu turația constantă: $n = 15 \text{ rot/min}$. (pentru $M16$, pasul este: $p = 2 \text{ mm}$).

Elementele cinematice care trebuiesc determinate sunt:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 15}{30} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}, \quad \dot{\omega} = \varepsilon = 0 \quad (e)$$

$$v_0 = \frac{\omega}{2\pi} p = \frac{1}{2} \text{ mm/s}, \quad a_0 = \dot{v}_0 = 0$$

Viteza punctului de pe periferia șurubului este deci:

$$v_1 = \sqrt{\omega^2 d_z^2 + v_0^2} = \sqrt{(8\pi/2)^2 + (1/2)^2} = 12,576 \text{ mm/s}, \quad (f)$$

Accelerația punctului de pe periferia șurubului (având numai o componentă normală) este:

$$a_1 = d_z \omega^2 = 8(\pi/2)^2 = 2\pi^2 = 19,74 \text{ mm/s}^2. \quad (g)$$

9.3.4. Mișcarea plan - paralelă (plană)

Un corp rigid are o mișcare plan - paralelă (sau plană) dacă trei puncte necoliniare ale sale sunt conținute tot timpul mișcării într-un plan fix din spațiu. Considerații geometrice elementare arată că toate punctele rigidului coplanare cu cele trei puncte, rămân de asemenea conținute în planul fix din spațiu.

Ca exemple de mișcări plan-paralele putem cita: mișcarea bielei ce leagă pistonul de manivela roții, mișcarea roții unui vehicul pe un drum rectiliniu, etc.

În acest caz, corpul are trei grade de libertate cinematică care corespund celor trei posibilități de deplasare: două translații independente în planul fix (două grade de libertate) și o rotație în jurul unui ax propriu, perpendicular pe planul fix (un grad de libertate).

Se poate deci afirma că mișcarea de rotație cu axă fixă și mișcarea de translație într-un plan, sunt două cazuri particulare de mișcări plan-paralele.

Pentru studiul mișcării se consideră un triedru fix $T_1 (O_1x_1y_1z_1)$ astfel încât axele O_1x_1 și O_1y_1 , să se găsească în planul considerat fix și un triedru mobil $T (Oxyz)$ solidar cu rigidul, ale cărui axe Ox și Oy se găsesc de asemenea în planul fix (fig.9.16).

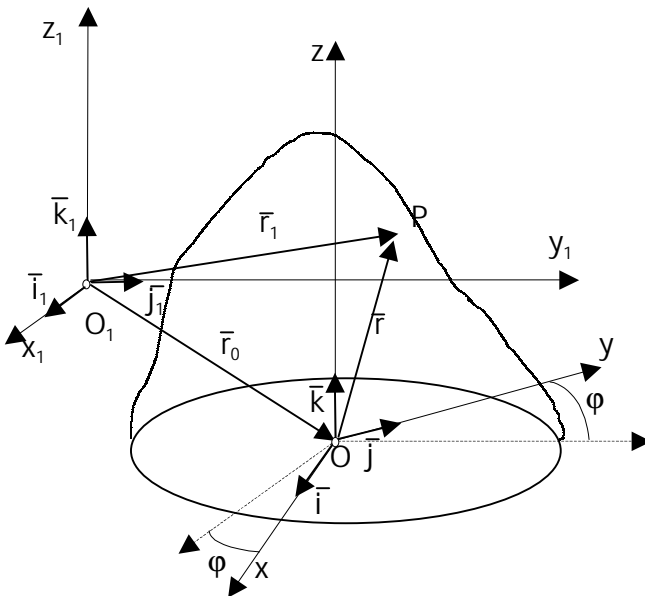


Fig.9.16

Se impun deci condițiile:

$$z_0 = 0, \quad \bar{k} = \bar{k}_1.$$

Dar relația $\bar{k} = \bar{k}_1$ echivalează cu relațiile scalare: $\psi = 0, \quad \theta = 0$

Mișcarea rigidului este cunoscută, dacă se determină coordonatele x_0 și y_0 ale originii triedrului mobil în raport cu triedrul fix și unghiul φ dintre axele O_1x_1 și Ox , adică cele trei funcții scalare:

$$x_0 = x_0(t), \quad y_0 = y_0(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

care reprezintă parametrii mișcării sau ecuațiile orare ale mișcării (și corespund celor trei grade de libertate cinematică)

Ecuațiile mișcării unui punct oarecare al corpului (adică ecuațiile traiectoriilor) se obțin pornind de la relația vectorială: $\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}$, care în cazul de față are forma particulară:

$$\bar{r}_1 = x_1\bar{i}_1 + y_1\bar{j}_1 + z_1\bar{k}_1, \quad \bar{r}_0 = x_0\bar{i}_1 + y_0\bar{j}_1, \quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\text{și deoarece: } \bar{i} = \bar{i}_1 \cos \varphi + \bar{j}_1 \sin \varphi; \quad \bar{j} = -\bar{i}_1 \sin \varphi + \bar{j}_1 \cos \varphi; \quad k = k_1 \quad (9.78)$$

această relație vectorială conduce la ecuațiile parametrice ale traiectoriilor:

$$x_1 = x_0 + x \cos \varphi - y \sin \varphi; \quad y_1 = y_0 + x \sin \varphi + y \cos \varphi; \quad z_1 = z \quad (9.79)$$

sau matricial:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (9.80)$$

Din aceste relații, rezultă următoarele *proprietăți ale traiectoriilor diferitelor puncte*:

- traiectoriile diferitelor puncte depind de parametrii mișcării x_0, y_0 și φ .*
- toate punctele se mișcă în plane paralele cu planul fix.*
- toate punctele situate pe o paralelă la Oz descriu traiectorii identice. Deci pentru a cunoaște mișcarea în orice plan, este suficient să se studieze mișcarea în planul xOy .*

Distribuția vitezelor în mișcarea plan-paralelă

Se studiază cu ajutorul relației generale (9.16) a distribuției de viteze:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\text{unde: } \bar{v}_0 = v_{0x} \bar{i} + v_{0y} \bar{j} \quad (9.81)$$

este viteza originii O a triedrului T din planul fix,

$$\text{iar în expresia: } \bar{\omega} = (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{k}) \bar{i} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i}) \bar{j} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j}) \bar{k} \quad (9.82)$$

$$\text{se înlocuiește: } \dot{\bar{i}} = \bar{j} \dot{\varphi}, \quad \dot{\bar{j}} = -\bar{i} \dot{\varphi}, \quad \dot{\bar{k}} = \dot{\bar{k}}_1 = 0 \quad (9.83)$$

$$\text{și conduce la: } \bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k} = \omega \bar{k} \quad \text{și deci: } \omega = \dot{\varphi} \quad (9.84)$$

Deci, vectorul $\bar{\omega}$ păstrează aceeași expresie ca și în mișcarea de rotație. În mișcarea plan-paralelă viteza unui punct oarecare se scrie:

$$\bar{v}_1 = v_{0x} \bar{i} + v_{0y} \bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (v_{0x} - \omega y) \bar{i} + (v_{0y} + \omega x) \bar{j} \quad (9.85)$$

Componentele vectorului \bar{v}_1 pe axele sistemului mobil, sunt deci:

$$\begin{cases} v_{1x} = v_{0x} - \omega y \\ v_{1y} = v_{0y} + \omega x \\ v_{1z} = 0 \end{cases} \quad (9.86)$$

Din aceste expresii rezultă următoarele *proprietăți ale distribuției de viteze*:

- a) vitezele diferitelor puncte sunt paralele cu planul fix;
 b) există în general puncte a căror viteză este nulă; dacă notăm cu ξ , η , ζ coordonatele unui asemenea punct, ele sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{aligned} 0 &= v_{0x} - \omega\eta, \\ 0 &= v_{0y} + \omega\xi \end{aligned} \quad (9.87)$$

din care rezultă coordonatele punctului de viteză nulă față de sistemul mobil:

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}, \eta = \frac{v_{0x}}{\omega}, \zeta = \text{arbitrar} \quad (9.88)$$

Punctele rigidului care au viteză nulă se găsesc deci pe o dreaptă paralelă cu Oz . Această dreaptă poartă numele de *axă instantanee de rotație*, iar punctul din planul xOy , care are viteza zero poartă numele de *centru instantaneu de rotație*. El se notează în continuare cu I ;

- c) distribuția de viteze într-o mișcare plan paralelă este identică cu cea de la mișcarea de rotație, ca și când rigidul s-ar roti în jurul axei instantanee de rotație. Într-adevăr, dacă se face o translație de axe în centrul instantaneu de rotație, definită de formulele: $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$, $z = z'$.

avem pentru v_{Ix} și v_{Iy} expresiile:

$$v_{Ix} = v_{0x} - \omega(y' + \eta) = v_{0x} - \omega y' - \omega \frac{v_{0x}}{\omega} = -\omega y' \quad (9.89)$$

$$v_{Iy} = v_{0y} + \omega(x' + \xi) = v_{0y} + \omega x' - \omega \frac{v_{0y}}{\omega} = \omega x' \quad (9.90)$$

Rezultă expresii analoge cu cele de la mișcarea de rotație:

$$v_{Ix} = -\omega y', \quad v_{Iy} = \omega x', \quad v_{Iz} = 0$$

Observație. Se face precizarea că *rigidul nu se rotește în jurul axei instantanee de rotație*. Această axă este în mișcare atât față de triedrul fix cât și față de triedrul mobil, deoarece ξ și η date de (9.88) sunt în general funcții de timp, deci sunt variabile.

Baza și Rostogolitoarea

Locul geometric al centrului instantaneu de rotație I în raport cu sistemul de referință mobil este o curbă denumită Rostogolitoare (sau Centroidă mobilă), iar locul geometric al centrului instantaneu de rotație I în raport cu sistemul de referință fix este o curbă denumită Bază (sau Centroidă fixă).

Ecuțiile parametrice ale Rostogolitoarei sunt: $\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega}, \eta = \frac{v_{0x}}{\omega} \quad (9.91)$

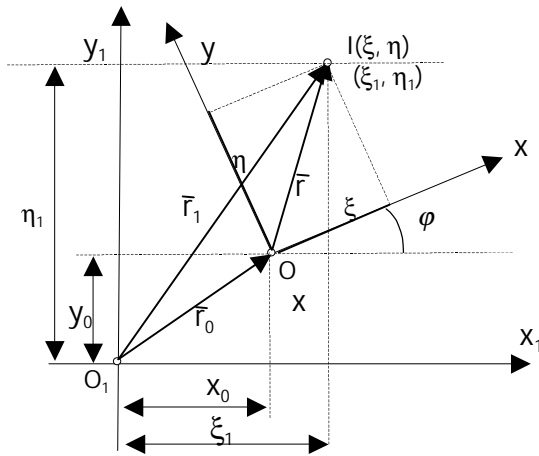


Fig.9.17

Ecuatiile parametrice ale Bazei, conform definiției, se pot obține din ecuațiile (9.80), unde coordonatele (x, y, z) față de triedrul mobil se înlocuiesc cu (ξ, η, θ) , iar coordonatele față de triedrul fix (x_1, y_1, z_1) cu $(\xi_1, \eta_1, \theta_1)$:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \\ \eta_1 &= y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \\ \zeta_1 &= 0\end{aligned}\quad (9.92)$$

sau înlocuind relațiile (9.91) se obține:

$$\xi_1 = x_0 - \frac{v_{0y}}{\omega} \cos \varphi - \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \varphi; \quad \eta_1 = y_0 - \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \varphi + \frac{v_{0x}}{\omega} \cos \varphi; \quad \zeta_1 = 0 \quad (9.93)$$

Ecuatiile (9.92) pot fi deduse direct (geometric) din fig.9.17, unde centrul instantaneu de rotație I , este exprimat prin proiecțiile lui în raport cu triedrul fix (ξ_1, η_1) și în raport cu triedrul mobil (ξ, η) .

Centroida fixă și centroida mobilă sunt două curbe plane tangente în punctul I , iar în timpul mișcării plane *centroida mobilă se rostogolește fără alunecare peste centroida fixă*.

Pentru determinarea poziției centrului instantaneu de rotație, se pot utiliza, atât procedee geometrice (folosind proprietățile distribuției de viteze din mișcarea plană), cât și procedee analitice.

S-a arătat la mișcarea de rotație că vectorul viteză este normal pe rază iar scalarul său este proporțional cu raza. Rezultă de aici că dacă se cunosc direcțiile vitezelor în două puncte oarecare A și B (fig.9.18.a) ale unui rigid aflat în mișcare plană, atunci centrul instantaneu de rotație I se află la intersecția normalelor duse în A și B pe suporturile celor două viteze.

Dacă se cunoaște deci scalarul vitezei unui punct (de exemplu A), se poate determina viteza unghiulară ω cu ajutorul formulei $\omega = \frac{v_A}{IA}$ și odată determinată aceasta, se poate afla viteza oricărui alt punct. De exemplu viteza punctului B va fi:

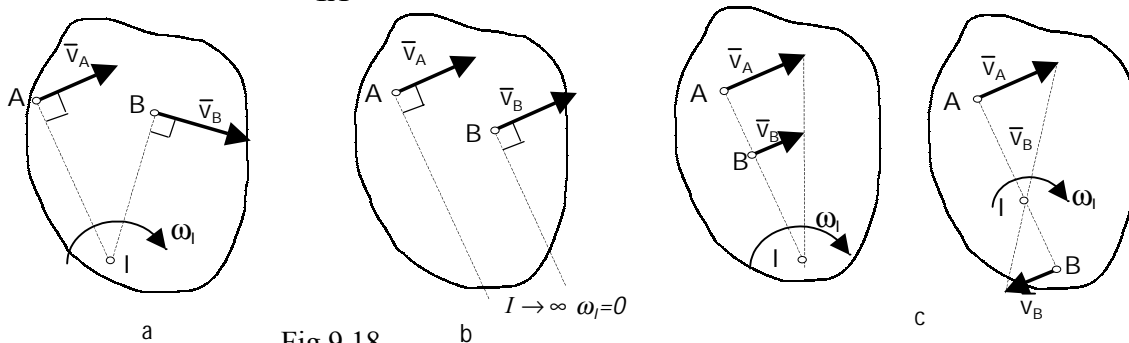
$$v_B = IB \cdot \omega = IB \cdot \frac{v_A}{IA} \quad (9.94)$$


Fig.9.18

În figura 9.18.b se arată cazul când suporturile vitezelor celor două puncte A și B sunt paralele și atunci normalele la aceste suporturi vor fi și ele paralele. Centrul instantaneu se va găsi la infinit. În acest caz distribuția de viteze în momentul considerat este cea corespunzătoare mișcării de translație.

În figura 9.18.c. se arată cazul când suporturile vitezelor sunt normale pe AB. În acest caz, orice punct al dreptei AB poate fi centru instantaneu. Pentru determinarea poziției lui este necesar să se cunoască nu numai direcțiile vitezelor v_A și v_B ci și scalarii lor. Folosind proprietatea de variație liniară a vitezelor în lungul razei, se găsește centrul instantaneu la intersecția lui AB cu dreapta ce unește vârfurile vectorilor \bar{v}_A și \bar{v}_B .

Observație. Dacă în loc de curbele descrise de *centrul instantaneu de rotație*, în raport cu sistemul de referință fix, respectiv în raport cu cel mobil, se consideră suprafețele generate de *axele instantanee de rotație* față de aceleași sisteme, se obțin două suprafețe cilindrice: una fixă (*axoidă fixă*) și alta mobilă (*axoidă mobilă*) care se rostogolește fără să alunece peste cea fixă.

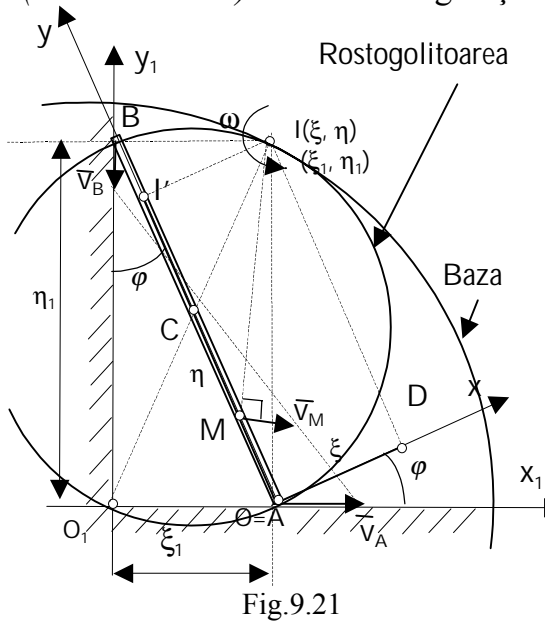


Fig. 9.21

Aplicație

Problema lui Cardan

O bară $AB = 2L$ (fig.9.21) se deplasează în plan, rezemându-se cu extremitățile A și B pe două ghidaje care fac între ele un unghi de $\pi/2$. Se dă viteza v_A punctului A, care este constantă. Se cer: *Baza, Rostogolitoarea și distribuția de viteze.*

Rezolvare:

1. Soluția geometrică

Se alege sistemul de coordonate $O_1x_1y_1$ și sistemul mobil Oxy ca în figura 9.21 ($O=A$).

Unghiul φ este parametrul mișcării (variabil în timp). Centrul instantaneu de rotație I se află la intersecția perpendiculei în A pe v_A , cu perpendicula în B pe Oy_1 . *Ecuatiile parametrice ale Bazei* sunt:

$$\xi_1 = O_1A = 2L \sin \varphi; \quad \eta_1 = O_1B = AI = 2L \cos \varphi$$

Eliminând parametrul φ se obține *ecuația implicită a Bazei*: $\xi_1^2 + \eta_1^2 = (2L)^2$, adică este ecuația unui cerc cu centrul în O_1 și rază $2L$.

Ecuatiile parametrice ale Rostogolitoarei sunt:

$$\begin{cases} \xi = AD = IA \sin \varphi = \eta_1 \sin \varphi = 2L \cos \varphi \sin \varphi = L \sin 2\varphi \\ \eta = AE = DI = IA \cos \varphi = \eta_1 \cos \varphi = 2L \cos^2 \varphi = L(\cos 2\varphi + 1) \end{cases}$$

Eliminând parametrul φ se obține *ecuația implicită a Rostogolitoarei*: $\xi^2 + (\eta - L)^2 = L^2$ care este un cerc cu centrul pe axa Ox : $C(0, L)$ și de rază L .

2. Soluția analitică

La același rezultat se ajunge dacă se folosesc ecuațiile parametrice (9.91) și (9.93). Pentru aceasta se admite că bara AB pleacă din poziția inițială care corespunde lui $\varphi = 0$. Deci legea de mișcare a originii sistemului de coordonate mobil $O \equiv A$ este:

$$x_0 = x_A = 2L \sin \varphi$$

Derivând în raport cu timpul această expresie se obține $v_0 \equiv v_A$:

$$v_0 = v_A = \dot{x}_A = 2L \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi = 2L\omega \cos \varphi$$

de unde rezultă: $\omega = \frac{v_0}{2L \cos \varphi}$.

Proiecțiile pe axele sistemului mobil ale vitezei originii sunt:

$$v_{0x} = v_0 \cos \varphi, \quad v_{0y} = -v_0 \sin \varphi,$$

iar coordonatele originii sistemului mobil în raport cu sistemul de referință fix sunt: $x_0 = 2L \sin \varphi, \quad y_0 = 0$.

Deci ecuațiile parametrice ale Rostogolitoarei conform (9.91) se scriu:

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega} = \frac{v_0 \cdot 2L \sin \varphi \cos \varphi}{v_0} = L \cdot \sin 2\varphi$$

$$\eta = \frac{v_{0x}}{\omega} = \frac{v_0 \cdot 2L \cos^2 \varphi}{v_0} = 2L \cdot \cos^2 \varphi = L(\cos 2\varphi + 1)$$

$$\text{adică: } \xi = L \sin 2\varphi; \quad \eta = L(\cos 2\varphi + 1)$$

Ecuațiile parametrice ale Bazei conform ecuațiilor (9.93) se scriu:

$$\xi_1 = x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi = 2L \sin \varphi + L \sin 2\varphi \cos \varphi - L(\cos 2\varphi + 1) \sin \varphi$$

$$\eta_1 = y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi = 2L \sin^2 \varphi \cos \varphi + 2L \cos^3 \varphi = 2L \cos(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

adică:

$$\xi_1 = 2L \sin \varphi; \quad \eta_1 = 2L \cos \varphi$$

Distribuția de viteze se obține cu ajutorul centrului instantaneu de rotație I .

Viteza unghiulară în jurul lui I este: $\Omega = \frac{v_A}{IA} = \frac{v_A}{2L \cos \varphi} = \dot{\varphi} = \omega$

și are sensul dat de direcția lui \bar{v}_A . Viteza unui punct oarecare M aparținând lui AB are mărimea: $v_M = IM \cdot \Omega$ și este perpendiculară pe IM și sensul dat de Ω .

Observație

În cazul acestei probleme există și o *soluție geometrică* elementară. Figura O_1AIB , fiind un dreptunghi, rezultă că din punctul I bara AB se vede în orice moment sub un unghi de 90° , deci *locul geometric al lui I* față de bara AB (rostogolitoarea) este un cerc construit pe segmentul AB ca diametru.

Față de sistemul fix se observă că distanța $IO_1 = AB = 2L$ este constantă. (ca diagonale ale dreptunghiului O_1AIB). Centrul instantaneu I găsindu-se la o distanță fixă de O_1 *locul geometric al lui I (baza)* este un cerc cu centrul în O_1 , de rază $2L$.

Studiul vectorial al vitezelor în mișcarea plan-paralelă

Se consideră două puncte A și B ale unui corp în mișcarea plană, care aparțin planului mobil xOy (fig.9. 19) . Dorim să găsim o relație vectorială între vitezele acestor două puncte.

Pentru aceasta se aplică relația distribuției de viteze : $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$ pentru cele două puncte A și B :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OA}; \quad \vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OB}.$$

Dacă scădem cele două relații membru cu membru se obține:

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times (\vec{OB} - \vec{OA}); \text{ sau } \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \quad (9.95)$$

Aceasta este *relația lui Euler pentru viteze* în mișcarea plan-paralelă a rigidului. Relația (9.95) se mai scrie:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad (9.96)$$

unde : $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$ este viteza punctului B al rigidului față de punctul A presupus fix și (conform definiției produsului vectorial) este perpendiculară pe vectorii $\vec{\omega}$ și \vec{AB} (fig.9. 20).

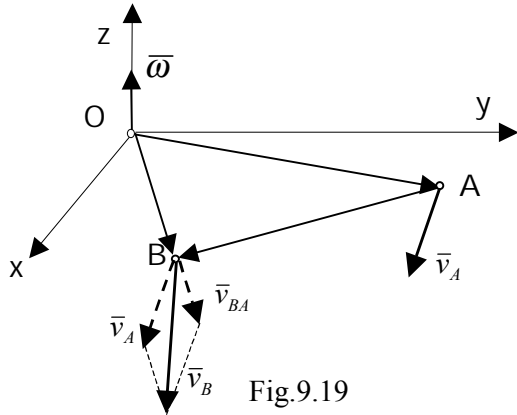


Fig.9.19

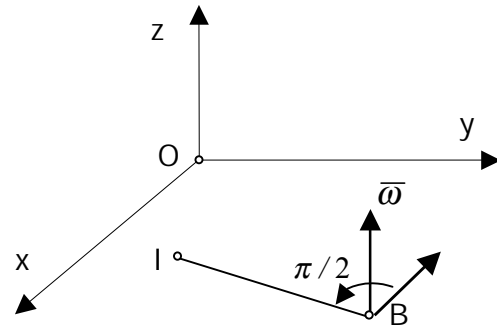


Fig.9.20

Dacă în particular punctul A coincide cu centrul instantaneu de rotație I (care are viteza nulă $\vec{v}_A = \vec{v}_I = 0$), din relația (9.95) rezultă:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{IB} \quad (9.97)$$

Această relație confirmă proprietatea c) a distribuției de viteze: la un moment dat este aceeași cu cea de la mișcarea de rotație cu axă fixă, în jurul axei instantanee de rotație.

Utilizând metoda vectorială se poate deduce poziția centrului instantaneu de rotație I . Astfel înmulțind vectorial la stânga cu $\vec{\omega}$ relația (9.97), se obține:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_B = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{IB}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{IB})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{IB}$$

Dar întrucât $\vec{\omega} \perp \vec{IB}$ avem: $(\vec{\omega} \cdot \vec{IB}) = 0$ și rezultă:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_B - \omega^2 \vec{BI} = 0 \quad (9.98)$$

de unde:
$$\overline{BI} = \frac{\overline{\omega} \times \overline{v}_B}{\omega^2} \quad \text{deci: } |\overline{BI}| = \frac{|\overline{\omega}| \cdot |\overline{v}_B| \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{\omega^2} = \frac{|\overline{v}_B|}{|\overline{\omega}|} \quad (9.99)$$

Pe baza relației (9.99), se poate stabili o regulă practică de determinare a poziției centrului instantaneu de rotație I : acesta se găsește în planul mișcării, pe perpendiculara dusă din punctul B pe \overline{v}_B la distanța $|\overline{BI}| = |\overline{v}_B|/|\overline{\omega}|$, în sensul dat de vectorul \overline{v}_B rotit cu 90° în sensul lui $\overline{\omega}$ (fig. 9.20).

În continuare problema se rezolvă conform celor prezentate la metoda grafo - analitică de determinare a centrului instantaneu de rotație.

Distribuția accelerațiilor în mișcarea plan-paralelă

În mișcarea plan-paralelă distribuția accelerațiilor se studiază cu ajutorul formulei generale (9.20):

$$\overline{a}_1 = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) \quad (9.100)$$

unde: $\overline{a}_0 = \dot{\overline{v}}_0 = a_{0x}\overline{i} + a_{0y}\overline{j}$ este accelerația originii sistemului mobil

iar vectorul accelerație unghiulară este : $\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \varepsilon \overline{k} = \varepsilon \overline{k}$ (9.101)

În acest caz rezultă:

$$\overline{a}_1 = a_{0x}\overline{i} + a_{0y}\overline{j} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix}$$

sau:
$$\overline{a}_1 = (a_{0x} - \varepsilon y - \omega^2 x)\overline{i} + (a_{0y} + \varepsilon x - \omega^2 y)\overline{j} \quad (9.102)$$

iar proiecțiile accelerației pe axele triedrului mobil sunt:

$$a_{1x} = a_{0x} - \varepsilon y - \omega^2 x; \quad a_{1y} = a_{0y} + \varepsilon x - \omega^2 y; \quad a_{1z} = 0 \quad (9.103)$$

Rezultă următoarele proprietăți ale câmpului de accelerații în mișcarea plan paralelă:

- accelerația oricărui punct al rigidului este cuprinsă într-un plan paralel cu planul fix al mișcării Oxy (deoarece $a_{1z}=0$, conform 9.103);
- accelerațiile punctelor care se găsesc pe o dreaptă perpendiculară pe planul fix (deci care are aceleași coordonate x și y) sunt egale ca mărime, direcție și sens.
- în general există puncte de accelerație nulă, care se găsesc pe o dreaptă paralelă cu axa Oz ; în planul Oxy există un singur asemenea punct și care se numește polul (centrul) accelerațiilor (și se notează cu J).

Coordonatele punctului de accelerație nulă $J(u,v)$ trebuie să satisfacă relațiile :

$$0 = a_{0x} - \varepsilon v - \omega^2 u; \quad 0 = a_{0y} + \varepsilon u - \omega^2 v \quad (9.104)$$

de unde rezultă :
$$u = \frac{\omega^2 a_{0x} - \varepsilon a_{0y}}{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad v = \frac{\varepsilon a_{0x} + \omega^2 a_{0y}}{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (9.105)$$

Din relațiile (9.105) se observă că centrul accelerațiilor este un punct care își schimbă tot timpul poziția (întrucât a_{0x} și a_{0y} sunt în general funcții de timp).

- d) distribuția accelerațiilor într-o mișcare plană este identică cu cea de la mișcarea de rotație, în jurul unei axe normale la planul fix și care trece prin polul accelerațiilor J .

Într-adevăr, efectuând o translație a sistemului mobil, definită de relațiile:

$$x = x' + u, \quad y = y' + v, \quad z = z' \quad (9.106)$$

astfel încât originea noului sistem să coincidă cu polul accelerațiilor J , componentele accelerației (relațiile 9.103) devin:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= a_{0x} - (y' + v)\varepsilon - (x' + u)\omega^2 \\ a_{1y} &= a_{0y} + (x' + u)\varepsilon - (y' + v)\omega^2 \end{aligned} \quad (9.107)$$

unde înlocuind u și v cu expresiile lor din (9.105) și efectuând calculele și simplificările respective, se obțin expresiile:

$$a_{1x} = -y'\varepsilon - x'\omega^2; \quad a_{1y} = x'\varepsilon - y'\omega^2 \quad (9.108)$$

care sunt analoage cu cele obținute la mișcarea de rotație, întrucât se poate scrie: $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = d'_z \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ unde: $d'_z = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$

În general J și I sunt două puncte diferite.

Determinarea grafo-analitică a polului accelerațiilor

Pentru determinarea grafo-analitică a polului accelerațiilor se folosește proprietatea d) adică distribuția instantanee de accelerații este identică cu cea a unei mișcări de rotație în jurul polului (centrului) accelerațiilor J . Se consideră cunoscute: accelerația \bar{a}_A a unui punct A al rigidului, viteza unghiulară $\bar{\omega}$ și accelerația unghiulară $\bar{\varepsilon}$ (unde $\varepsilon = \dot{\omega}$).

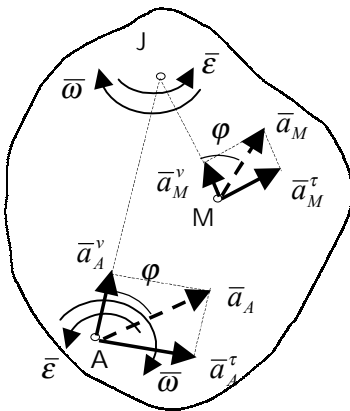


Fig.9.22

Dacă presupunem cunoscute: poziția punctului J (adică distanța AJ) și unghiul φ (fig.9.22) (care de fapt sunt tocmai necunoscutele care trebuie determinate), la fel ca în mișcarea de rotație se descompune accelerația \bar{a}_A în cele două componente: normală a_A^v și tangențială a_A^r ale căror mărimi au expresiile:

$$a_A^v = JA \cdot \omega^2, \quad a_A^r = JA \cdot \varepsilon; \quad (9.109)$$

avem evident:

$$a_A^2 = (a_A^v)^2 + (a_A^r)^2 = JA^2 (\varepsilon^2 + \omega^4) \quad (9.110)$$

de aici rezultă formula de calcul a mărimii lui JA : $JA = \frac{|\bar{a}_A|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ (9.111)

și a unghiului dintre direcțiile \bar{a}_A și JA : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_A^r}{a_A^v} = \frac{JA \cdot \varepsilon}{JA \cdot \omega^2} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ (9.112)

Se observă că unghiul φ și accelerația ε au același sens.

Pe baza relațiilor (9.111) și (9.112) se poate determina grafic centrul accelerațiilor și accelerația unui punct arbitrar M , astfel:

- prin punctul A se duce o dreaptă înclinată față de \bar{a}_A cu unghiul φ a cărei mărime se calculează cu relația (9.112); unghiul φ se ia în același sens cu accelerația unghiulară ε ;
- pe această dreaptă se determină centrul accelerațiilor J , cu ajutorul relației (9.111);
- Odată determinat centrul accelerațiilor, accelerația unui punct arbitrar M (fig.9.22) se determină ca în mișcarea de rotație în jurul punctului J , cu viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε , calculând cele două componente cu ajutorul relațiilor: $a_M^v = JM \cdot \omega^2$, $a_M^\tau = JM \cdot \varepsilon$

Studiul vectorial al accelerațiilor în mișcarea plan-paralelă

Se consideră două puncte A și B aparținând planului mobil xOy (fig.9.23.a). Se presupune cunoscută accelerația \bar{a}_A a punctului A și se cere să se exprime accelerația \bar{a}_B a punctului B în funcție de \bar{a}_A .

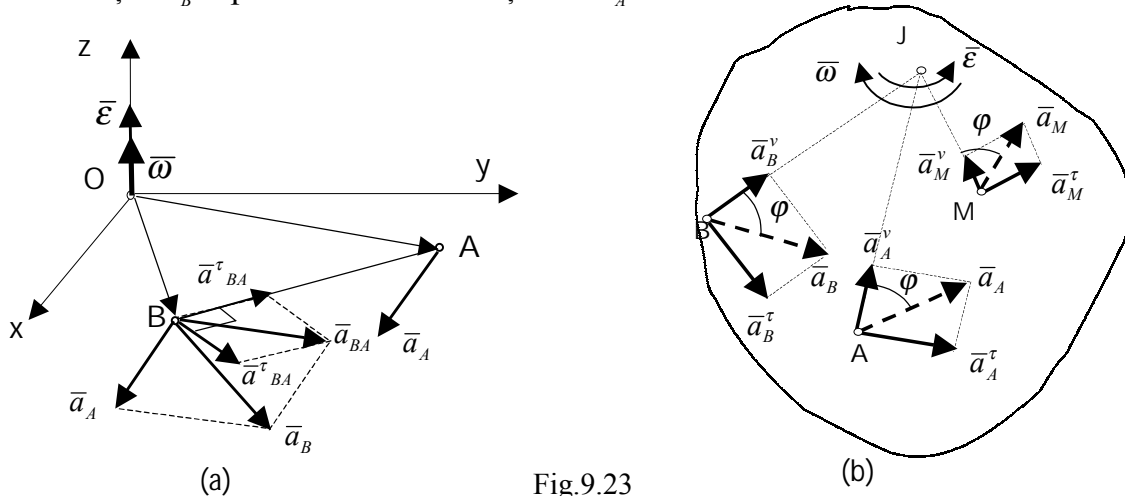


Fig.9.23

Aplicând formula accelerației din mișcarea generală a rigidului pentru cele două puncte:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OA}) \quad (9.113)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OB})$$

și ținând seama de formula de exprimare analitică a produsului dublu vectorial a trei vectori: $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$, se obțin expresiile pentru accelerațiile punctelor A și B :

$$\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} + (\bar{\omega} \cdot \overline{OA}) \cdot \bar{\omega} - \omega^2 \cdot \overline{OA} \quad (9.114)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OB} + (\bar{\omega} \cdot \overline{OB}) \cdot \bar{\omega} - \omega^2 \cdot \overline{OB}$$

Întrucât : $\bar{\omega} \cdot \overline{OA} = 0$ și $\bar{\omega} \cdot \overline{OB} = 0$, rezultă deci:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} - \omega^2 \cdot \overline{OA} \quad ; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OB} - \omega^2 \cdot \overline{OB} \quad (9.115)$$

scăzând membru cu membru rezultă:

$$\bar{a}_B - \bar{a}_A = -\omega^2 (\overline{OB} - \overline{OA}) + \bar{\varepsilon} \times (\overline{OB} - \overline{OA}) \quad (9.116)$$

de unde se deduce *formula lui Euler pentru accelerații* în mișcarea plan - paralelă:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A - \omega^2 \overline{AB} + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} \quad (9.117)$$

care se mai poate scrie și astfel: $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$ (9.118)

$$\text{unde: } \bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^v + \bar{a}_{BA}^\tau \quad (9.119)$$

este accelerația punctului B față de A (ca și cum punctul A ar fi fix), cu cele două componente:

- accelerația normală a punctului B față de punctul A:

$$\bar{a}_{BA}^v = -\omega^2 \overline{AB} \quad (9.120)$$

de mărime $a_{BA}^v = \omega^2 |AB| = \frac{v_{BA}^2}{AB}$, paralelă cu AB, iar sensul de la B spre A.

- accelerația tangențială a punctului B față de punctul A:

$$\bar{a}_{BA}^\tau = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} \quad (9.121)$$

de mărime $a_{BA}^\tau = \varepsilon |AB|$, perpendiculară pe AB, iar sensul dat de ε .

Dacă în particular punctul A coincide cu polul accelerațiilor J, adică $\bar{a}_A = \bar{a}_J = 0$, atunci relația lui Euler se scrie mai simplu:

$$\bar{a}_B = -\omega^2 \overline{JB} + \bar{\varepsilon} \times \overline{JB} \quad (9.122)$$

Această relație exprimă vectorial, faptul că la un moment dat distribuția de accelerații în mișcarea plan - paralelă se obține ca în mișcarea de rotație în jurul centrului accelerațiilor J (fig. 9.23.b).

Accelerațiile \bar{a}_A , \bar{a}_B , \bar{a}_M au aceeași înclinare față de razele JA, JB și JM, de unghi φ , dat de relația :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^\tau}{a^v} = \frac{\varepsilon \cdot JA}{\omega^2 \cdot JA} = \frac{\varepsilon \cdot JB}{\omega^2 \cdot JB} = \frac{\varepsilon \cdot JM}{\omega^2 \cdot JM} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (9.123)$$

Centrul accelerațiilor J poate fi determinat și vectorial. Înmulțind relația (9.122) cu ω^2 și apoi vectorial cu $\bar{\varepsilon}$ se obține:

$$\omega^2 \bar{a}_B - \omega^4 \overline{BJ} + \omega^2 (\bar{\varepsilon} \times \overline{BJ}) = 0 \quad (9.124)$$

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_B - \omega^2 (\bar{\varepsilon} \times \overline{BJ}) - \varepsilon^2 \overline{BJ} = 0 \quad (9.125)$$

și însumând aceste două relații rezultă:

$$\omega^2 \bar{a}_B + \bar{\varepsilon} \times \bar{a}_B - (\varepsilon^2 + \omega^4) \overline{BJ} = 0 \quad (9.126)$$

de unde:

$$\overline{BJ} = \frac{\omega^2 \bar{a}_B + \bar{\varepsilon} \times \bar{a}_B}{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (9.127)$$

Dacă în particular $B \equiv O$ și se proiectează relația vectorială (9.127) pe axele sistemului Oxy, se regăsesc relațiile (9.105) adică coordonatele (u, v) ale centrului accelerațiilor J :

$$u = \frac{\omega^2 a_{0x} - \varepsilon a_{0y}}{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad v = \frac{\varepsilon a_{0x} + \omega^2 a_{0y}}{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Aplicație

Se consideră mecanismul manivelă-piston din fig. 9.24.a, într-o poziție particulară. Manivela are lungimea $OA=10 L$, biela $AB=60 L$ iar distanța $AC=20 L$ (cm). Manivela OA se rotește cu viteza unghiulară $\omega_{OA} = 1,5 \omega_0$ (s^{-1}) și accelerația unghiulară $\varepsilon_{OA} = 2 \omega_0^2$ (s^{-2}), având sensurile indicate în figură.

Se cere să se determine: $v_A, a_A, v_B, a_B, v_C, a_C, \omega_{AB}, \varepsilon_{AB}$.

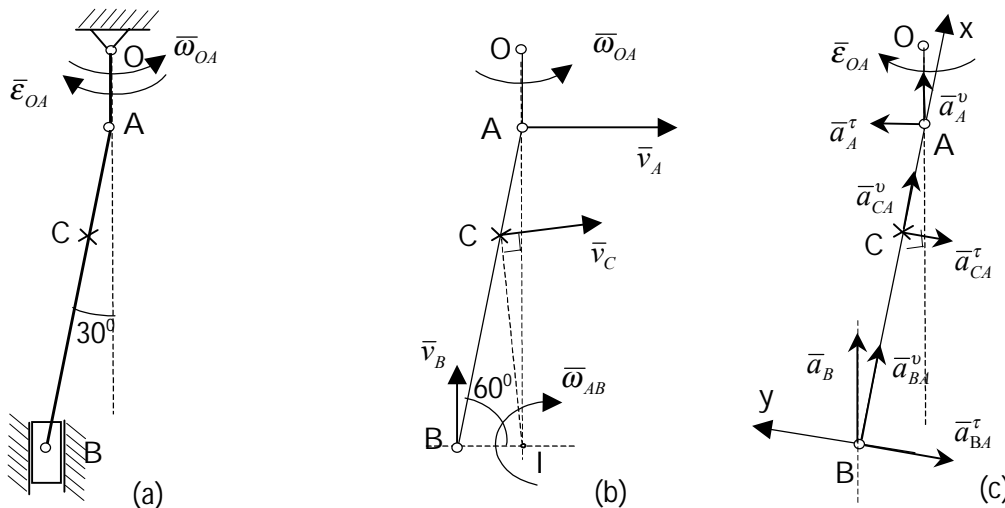


Fig.9.24

Rezolvare:

Distribuția de viteze este dată în fig. 9.24.b și avem:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 15L\omega_0 \text{ (} cms^{-1} \text{)}$$

Cunoscând direcția vitezelor v_A și v_B se poate determina poziția centrului instantaneu de rotație I (la intersecția perpendicularelor pe suporturile celor două viteze) și se scriu relațiile:

- pentru viteza unghiulară a bielei, care este orientată în sensul indicat de

$$\text{vitezele } v_A \text{ și } v_B: \quad \omega_{AB} = \frac{v_A}{IA} = \frac{v_A}{AB \cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{6} \omega_0 \text{ (} s^{-1} \text{)}$$

- pentru viteza punctului B:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot IB = \omega_{AB} \cdot AB \sin 30^\circ = 5\sqrt{3} L\omega_0 \text{ (} cms^{-1} \text{)}$$

- pentru viteza punctului C, care este orientată în sensul indicat $\overline{\omega}_{AB}$

$$v_C = \omega_{AB} \cdot IC = \omega_{AB} \cdot \sqrt{BC^2 + BI^2 - 2BC \cdot BI \cos 60^\circ} = 10,4 L\omega_0 \text{ (} cms^{-1} \text{)}$$

Distribuția accelerațiilor este dată în fig. 9.24.c și se poate scrie:

- pentru accelerația punctului A:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^v, \text{ unde:}$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 20 L\omega_0^2; \quad a_A^v = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 22,5 L\omega_0^2$$

$$\Rightarrow a_A = \sqrt{(a_A^v)^2 + (a_A^\tau)^2} = 30,1 L\omega_0^2 \text{ (} cms^{-2} \text{)}$$

- pentru accelerația punctului B:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^v + \overline{a}_{BA}^\tau + \overline{a}_{BA}^v \quad (a)$$

unde: $\overline{a}_{BA}^\tau \perp AB$ este accelerația tangențială a lui B față de A și este orientată în sensul dat de $\overline{\varepsilon}_{AB}$, iar $\overline{a}_{BA}^v \parallel AB$ este accelerația normală a lui B față de A fiind orientată dinspre B spre A: $B \rightarrow A$; aceste accelerații au expresiile:

$$a_{BA}^v = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 5 L\omega_0^2 \text{ (} cms^{-2} \text{)} \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} \quad (b)$$

Proiectând relația vectorială (a) pe axele sistemului de referință considerat în fig. 9.24.c se obține:

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A^\tau \cos 60^\circ + a_A^v \sin 60^\circ + a_{BA}^v \quad (c)$$

$$a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^v \cos 60^\circ - a_{BA}^\tau \quad (d)$$

Din relațiile (c) și (d) se obțin respectiv:

$$a_B = \frac{1}{\cos 30^\circ} (-a_A^\tau \cos 60^\circ + a_A^v \sin 60^\circ + a_{BA}^v) = \left(22,5 - \frac{10\sqrt{3}}{3} \right) L\omega_0^2 \text{ (} cms^{-2} \text{)}$$

$$a_{BA}^\tau = \frac{70\sqrt{3}}{6} L\omega_0^2 \text{ (} cms^{-2} \text{)}, \text{ iar din relația (b) se obține: } \varepsilon_{AB} = \frac{7\sqrt{3}}{36} \omega_0^2 \text{ (} s^{-2} \text{)}$$

- pentru accelerația punctului C:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^v + \overline{a}_{CA}^\tau + \overline{a}_{CA}^v \quad (e)$$

unde: $\overline{a}_{CA}^\tau \perp \overline{AB}$ este accelerația tangențială a lui C față de A și este orientată în sensul dat de $\overline{\varepsilon}_{AB}$, iar $\overline{a}_{CA}^v \parallel AB$ este accelerația normală a lui C față de A fiind orientată dinspre C spre A: $C \rightarrow A$; aceste accelerații au expresiile:

$$a_{CA}^v = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 1,7 L\omega_0^2 \text{ (} cms^{-2} \text{)}; \quad a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 6,8 L\omega_0^2 \text{ (} cms^{-2} \text{)}$$

Proiectând relația vectorială (e) pe axele sistemului din fig. 9.24.c se obține:

$$a_{CX} = -a_A^\tau \cos 60^\circ + a_A^v \sin 60^\circ + a_{CA}^v = 11,2 L\omega_0^2 \text{ (} cms^{-2} \text{)}$$

$$a_{CY} = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^v \cos 60^\circ - a_{CA}^\tau = 21,8 L\omega_0^2 \text{ (} cms^{-2} \text{)}$$

$$\text{prin urmare: } a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} = 24,5 L\omega_0^2 \text{ (} cms^{-2} \text{)}.$$

Planul vitezelor și al accelerațiilor

Se consideră un corp care execută o mișcare plană (de exemplu biela AB a unui mecanism patruleter) pentru care se cunosc viteza și accelerația punctului A, precum și direcția vitezei punctului B (tangenta la cercul cu centrul în B_0 , fig. 9.25) Distribuția de viteze pentru acest element se poate determina grafic cu ajutorul relațiilor lui Euler:

$$\underline{\bar{v}}_B = \underline{\bar{v}}_A + \underline{\bar{v}}_{BA}, \text{ cu } \underline{\bar{v}}_{BA} = \underline{\bar{\omega}}_2 \times \underline{\overline{AB}}$$

Planul vitezelor (fig.9.26) este figura formată din vectorii $\underline{\bar{v}}_A$ și $\underline{\bar{v}}_B$ aplicați în același punct p_v , numit *polul vitezelor*.

Se alege pentru această reprezentare o

$$\text{scară a vitezelor: } k_v = \frac{|\underline{\bar{v}}_A|}{(p_v a)} \left(\frac{m/s}{mm} \right).$$

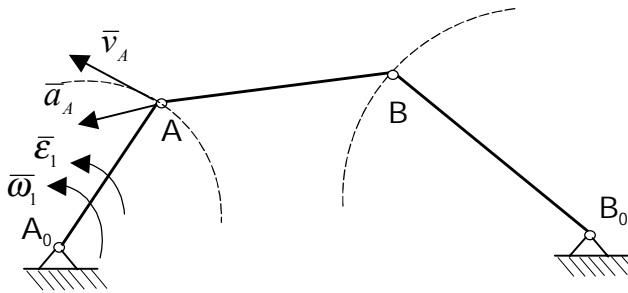


Fig.9.25

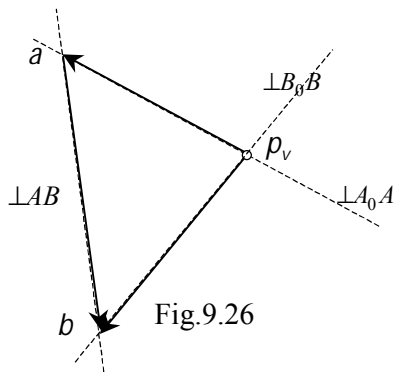


Fig.9.26

Cu ajutorul acestei reprezentări se poate rezolva grafic ecuația vectorială $\underline{\bar{v}}_B = \underline{\bar{v}}_A + \underline{\bar{v}}_{BA}$ unde s-a subliniat cu două linii vectorii cunoscuți atât ca modul cât și ca direcție, iar cu o linie vectorii cunoscuți numai ca direcție:

$\underline{\bar{v}}_B \perp \overline{B_0B}$; $\underline{\bar{v}}_{BA} \perp \overline{AB}$; astfel se pot determina modulele acestor viteze.

Distribuția de accelerații pentru elementul triunghiular (având ca latură AB) se poate determina grafic cu ajutorul relațiilor lui Euler:

$$\underline{\bar{a}}_B^v + \underline{\bar{a}}_B^r = \underline{\bar{a}}_A^v + \underline{\bar{a}}_A^r + \underline{\bar{a}}_{BA}^v + \underline{\bar{a}}_{BA}^r; \quad \underline{\bar{a}}_B^v = -\omega_3^2 \overline{B_0B}, \quad \underline{\bar{a}}_B^r = \underline{\bar{\epsilon}}_3 \times \overline{B_0B}; \quad \underline{\bar{a}}_{BA}^v = -\omega_2^2 \overline{AB}, \quad \underline{\bar{a}}_{BA}^r = \underline{\bar{\epsilon}}_2 \times \overline{AB}$$

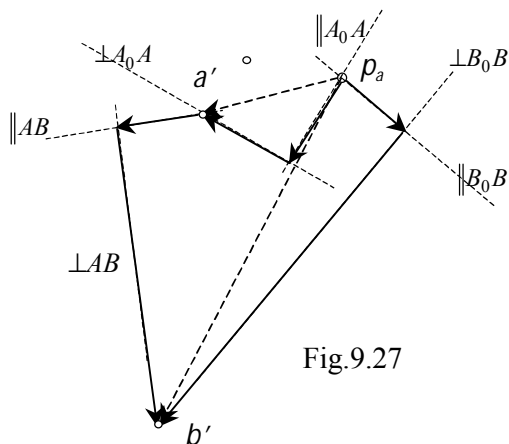


Fig.9.27

Planul accelerațiilor (fig.9.27) este figura formată din vectorii $\underline{\bar{a}}_A$, $\underline{\bar{a}}_B$ și $\underline{\bar{a}}_C$ aplicați în același punct p_a , numit *polul accelerațiilor*. Se alege pentru această reprezentare o scară a accelerațiilor:

$$k_a = \frac{|\underline{\bar{a}}_A|}{(p_a a')} \left(\frac{m/s^2}{mm} \right).$$

Cu ajutorul acestei reprezentări se poate rezolva grafic ecuația vectorială:

$$\underline{\bar{a}}_B^v + \underline{\bar{a}}_B^r = \underline{\bar{a}}_A^v + \underline{\bar{a}}_A^r + \underline{\bar{a}}_{BA}^v + \underline{\bar{a}}_{BA}^r,$$

unde s-a subliniat cu două linii vectorii cunoscuți atât ca modul cât și ca direcție, iar cu o linie vectorii cunoscuți numai ca direcție: $\underline{\bar{a}}_B^r \perp \overline{B_0B}$; $\underline{\bar{a}}_{BA}^r \perp \overline{AB}$; se reprezintă la scară suma vectorilor cunoscuți cu metoda poligonului, începând din polul accelerațiilor, pentru fiecare membru al ecuației și încheind cu trasarea

direcțiilor vectorilor necunoscuți ca modul. La intersecția celor două direcții se obține punctul b' care permite determinarea grafică a necunoscutelor problemei.

Cu ajutorul mărimilor $|\vec{a}_B^r|$, $|\vec{a}_{BA}^r|$ se pot determina accelerațiile necunoscute ε_2 și ε_3 .

9.3.5. Mișcarea rigidului cu punct fix

Pentru studiul mișcării rigidului cu un punct fix se va utiliza un triedru fix $T_1 (O_1x_1y_1z_1)$ și un triedru mobil $T (Oxyz)$ solidar cu rigidul, ale căror origini coincid cu punctul fix ($O_1 = O$) (fig.9.28). Rezultă că un punct oarecare M al rigidului se mișcă pe o sferă cu centrul în O și de rază OM , de aceea această mișcare se mai numește și sferică. Punctul O fiind fix, rigidul efectuează numai rotații. Din alegerea sistemelor de axe T_1 și $T (O_1 = O)$ rezultă:

$$\vec{r}_0 = 0 \quad (x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0) \quad (9.128)$$

deci vectorii de poziție ai punctului M coincid tot timpul: $\vec{r}_1 = \vec{r}$.

În această mișcare corpul are trei grade de libertate cinematică care corespund celor trei posibilități de a se roti în jurul celor trei axe care trec prin punctul fix. Parametrii acestei mișcări sunt unghiurile lui Euler (fig.9.28):

$$\psi = \psi(t); \quad \theta = \theta(t); \quad \varphi = \varphi(t) \quad (9.129)$$

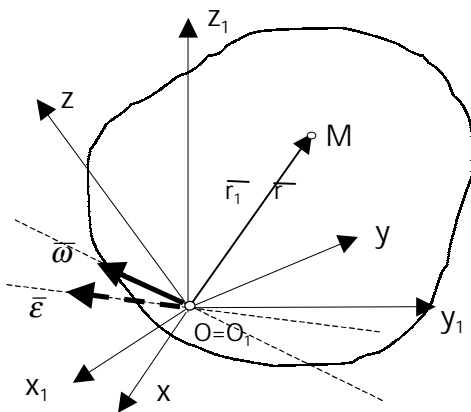


Fig.9.28

Se observă că traiectoriile diferitelor puncte sunt curbe pe sfere concentrice (cu centrul în punctul fix) cu raze egale cu distanțele punctelor la punctul fix.

Distribuția vitezelor în mișcarea cu un punct fix

Distribuția vitezelor în mișcarea cu punct fix se obține din relația generală (9.16): $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$ unde viteza originii lui T față de T_1 este nulă: $\vec{v}_0 = 0$ și prin urmare: $\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (9.130)

Întrucât în mișcarea rigidului cu punct fix viteza unghiulară este un vector de mărime și direcție variabilă care se scrie:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (9.131)$$

relația (9.130) devine:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k} \quad (9.132)$$

deci proiecțiile vitezelor pe axele triedrului mobil T sunt:

$$v_{1x} = \omega_y z - \omega_z y; \quad v_{1y} = \omega_z x - \omega_x z; \quad v_{1z} = \omega_x y - \omega_y x \quad (9.133)$$

Punctele de viteză nulă ($\vec{v}_1 = 0$) se pot determina din ecuația vectorială:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = 0 \quad (9.134)$$

care, reprezintă chiar condiția de colinearitate a vectorilor $\vec{\omega}$ și \vec{r} și are soluția generală: $\vec{r} = \lambda \vec{\omega}$ (9.135)

sau:
$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \quad (9.136)$$

Rezultă că au viteză nulă la un moment dat, numai punctele situate pe o dreaptă (Δ) care trece prin O și este paralelă cu $\bar{\omega}$.

Existând deci în orice moment o dreaptă (Δ) ale cărei puncte au viteze zero, distribuția de viteze este identică cu cea din cazul mișcării de rotație ca și cum rigidul s-ar roti în jurul axei (Δ) ce coincide cu vectorul $\bar{\omega}$ (fig.9.28).

Această axă poartă numele de *axă instantanee de rotație* și ea descrie în timpul mișcării, față de triedrul mobil T (legat de corpul de mișcare), un con care se numește *conul polodic (axoida mobilă)*, iar față de triedrul fix T_1 , un alt con numit *conul herpolodic (axoida fixă)*. Conul polodic se rostogolește în tot timpul mișcării fără să alunece, peste conul herpolodic fix, tangenta lor comună fiind axa instantanee de rotație (Δ).

Distribuția accelerațiilor în mișcarea cu un punct fix

Distribuția accelerațiilor în mișcarea cu un punct fix se obține din relația generală (9.20):

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

unde înlocuind accelerația punctului fix O : $a_0 = 0$, rezultă

$$\bar{a}_1 = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (9.137)$$

După cum s-a văzut anterior, în cazul rigidului cu un punct fix, ω este un vector de modul și direcție variabilă:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \quad (9.138)$$

În privința acestui vector nu se face nici o restricție în afară de faptul că suportul său trece prin punctul fix O . În consecință, rezultă că derivata acestuia $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ este un vector al cărui suport este diferit de cel al lui $\bar{\omega}$.

Pentru calculul componentelor accelerațiilor a_{1x} , a_{1y} , a_{1z} ale unui punct oarecare al rigidului, se ține seama de expresiile celor doi vectori:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \quad (9.139)$$

și
$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_x \bar{i} + \varepsilon_y \bar{j} + \varepsilon_z \bar{k} \quad (9.140)$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= -x(\omega_y^2 + \omega_z^2) + y(\omega_x \omega_y - \varepsilon_z) + z(\omega_z \omega_x + \varepsilon_y) \\ a_{1y} &= x(\omega_x \omega_y + \varepsilon_z) - y(\omega_z^2 + \omega_x^2) + z(\omega_y \omega_z - \varepsilon_x) \\ a_{1z} &= x(\omega_z \omega_x - \varepsilon_y) + y(\omega_y \omega_z + \varepsilon_x) - z(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{aligned} \quad (9.141)$$

Pentru a se găsi eventualele puncte de accelerație nulă, se face $a_{1x} = a_{1y} = a_{1z} = 0$. În afară de soluția banală ($x=y=z=0$) și cea corespunzătoare colinearității vectorilor $\bar{\omega}$, \bar{r} și $\bar{\varepsilon}$, nu mai există alte puncte de accelerație nulă.

CAPITOLUL 10

MIȘCAREA RELATIVĂ A PUNCTULUI MATERIAL ȘI A RIGIDULUI

10.1. Cinematica mișcării relative a punctului

10.1.1. Generalități. Definiții.

Este cunoscut faptul că un observator nu poate constata în timp schimbarea sau păstrarea poziției unui punct (sau a unui solid rigid) în spațiu, decât controlând continuu poziția acestuia față de un anumit reper (triedru), pe care în timpul observației sale îl consideră în mod convențional fix. Reperul presupus fix se mai numește și reper preferențial.

Sunt însă situații în practică când mișcarea unui punct (sau a unui continuu rigid de puncte) față de un anumit reper (fix) poate fi analizată mai comod, utilizând unul sau mai multe repere intermediare, în mișcare unul față de altul și deci și față de reperul considerat fix. În această situație se află, de exemplu, un observator de pe Pământ, care urmărind zborul interplanetar al unei nave cosmice vrea să determine elementele cinematice ale mișcării navei (traietorie, viteză, accelerație) în raport cu Soarele (ca reper fix).

În mișcarea relativă a punctului material intervin trei noțiuni importante:

- a) *Mișcarea absolută* este mișcarea punctului în raport cu reperul fix. Se numește *viteză* (respectiv *accelerație*) *absolută*, viteza (respectiv accelerația) punctului în această mișcare.
- b) *Mișcarea relativă* este mișcarea punctului în raport cu reperul mobil. Se numește *viteză* (respectiv *accelerație*) *relativă*, viteza (respectiv accelerația) punctului în această mișcare.
- c) *Mișcarea de transport* este mișcarea în raport cu reperul fix a unui punct solidar cu reperul mobil, care coincide cu punctul a cărui mișcare se studiază. Se numește *viteză* (respectiv *accelerație*) *de transport*, viteza (respectiv accelerația) punctului solidar cu reperul mobil. Aceste mărimi se determină cu ajutorul expresiilor generale cunoscute de la studiul mișcării rigidului :

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

și reprezintă mișcarea pe care ar avea-o punctul în fiecare moment, dacă ar înceta mișcarea lui relativă (s-ar solidariza cu sistemul mobil).

Exemplu

Să presupunem un punct P care se mișcă în interiorul unui tub OA , care la rândul lui se rotește în jurul punctului O_1 în planul fix $O_1x_1y_1$ (fig.10.1) cu viteza ω . Dorim să determinăm mișcările *absolută*, *relativă* și *de transport* ale punctului.

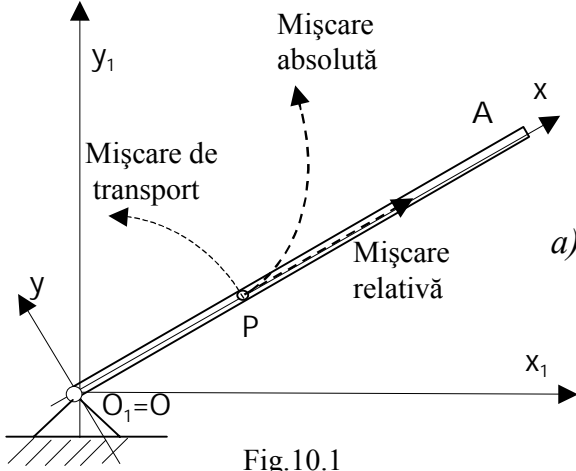


Fig.10.1

Pentru aceasta se consideră triedrul fix $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ și un triedru mobil $T(Oxyz)$, solidar cu tubul OA astfel încât O să coincidă cu originea O_1 , iar axa Ox să coincidă cu axa tubului.

- a) *Mișcarea absolută* este mișcarea punctului față de triedrul fix T_1 . Punctul deplasându-se pe axa Ox , iar această axă rotindu-se, punctul va descrie în față de triedrul fix o curbă gen spirală;

- b) *Mișcarea relativă* este mișcarea punctului față de triedrul mobil $T(Oxyz)$ și este o mișcare rectilinie după axa Ox ;
- c) *Mișcarea de transport* este mișcarea punctului P solidar în fiecare moment cu triedrul mobil $T(Oxyz)$. În această mișcare, punctul nu se mai deplasează pe Ox ci descrie un arc de cerc de rază OP . Viteza și accelerația din mișcarea de transport vor fi deci cele de la mișcarea circulară a punctului material, adică:

$$\vec{v}_t = \overline{OP} \times \vec{\omega}; \quad \vec{a}_t = -\omega^2 \overline{OP} + \vec{\varepsilon} \times \overline{OP}.$$

10.1.2. Derivata absolută și relativă a unui vector

Fie un triedru fix $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ și unul mobil $T(Oxyz)$ și un vector oarecare $\vec{U}(t)$ (fig.10.2), care poate fi definit fie prin proiecțiile sale atât pe axele triedrului mobil T (având versorii axelor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$):

$$\vec{U} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k} \quad (10.1)$$

fie prin proiecțiile lui pe axele triedrului fix T_1 :

(având versorii axelor $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$):

$$\vec{U} = U_{x1} \vec{i}_1 + U_{y1} \vec{j}_1 + U_{z1} \vec{k}_1 \quad (10.2)$$

Există relația vectorială evidentă:

$$\begin{aligned} U_{x1} \vec{i}_1 + U_{y1} \vec{j}_1 + U_{z1} \vec{k}_1 &= \\ &= U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Derivând în raport cu timpul această relație rezultă:

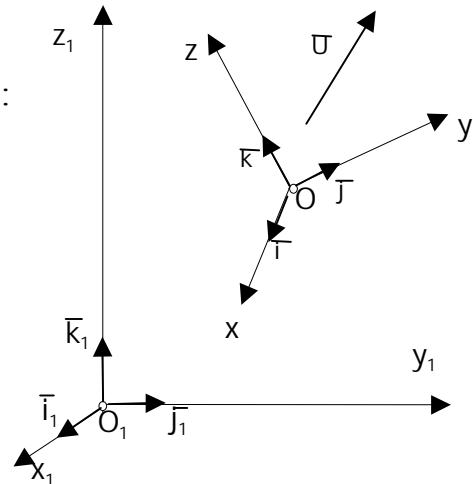


Fig.10.2

$$\dot{U}_{x_1}\bar{i}_1 + \dot{U}_{y_1}\bar{j}_1 + \dot{U}_{z_1}\bar{k}_1 = (\dot{U}_x\bar{i} + \dot{U}_y\bar{j} + \dot{U}_z\bar{k}) + (U_x\dot{\bar{i}} + U_y\dot{\bar{j}} + U_z\dot{\bar{k}}) \quad (10.4)$$

Termenii din primul membru al acestei egalități reprezintă derivata vectorului \bar{U} față de triedrul fix. Aceasta se numește *derivata absolută* a vectorului \bar{U} și se notează cu:

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \dot{\bar{U}} = \dot{U}_{x_1}\bar{i}_1 + \dot{U}_{y_1}\bar{j}_1 + \dot{U}_{z_1}\bar{k}_1 \quad (10.5)$$

Termenii din prima paranteză din membrul al doilea al egalității (10.4) reprezintă derivata vectorului \bar{U} calculată în raport cu triedrul mobil *ca și cum acest triedru ar fi fix* (deci presupunând versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ constanți). Aceasta se numește *derivata relativă* sau *derivata locală* a vectorului \bar{U} și se notează în continuare (în mod convențional) cu:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \dot{U}_x\bar{i} + \dot{U}_y\bar{j} + \dot{U}_z\bar{k} \quad (10.6)$$

Se notează cu \bar{A} a doua paranteză din membrul al doilea al egalității (10.4):

$$\bar{A} = U_x\dot{\bar{i}} + U_y\dot{\bar{j}} + U_z\dot{\bar{k}} \quad (10.7)$$

Ținând seama că orice vector \bar{a} se poate exprima prin proiecțiile sale (a_x, a_y, a_z), unde: $a_x = \bar{a} \cdot \bar{i}$, $a_y = \bar{a} \cdot \bar{j}$, $a_z = \bar{a} \cdot \bar{k}$ și conform relațiilor și notațiilor (9.3), (9.9) și (9.10) avem:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{i}} &= \dot{i}_x \cdot \bar{i} + \dot{i}_y \cdot \bar{j} + \dot{i}_z \cdot \bar{k} = (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{i})\bar{i} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j})\bar{j} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{k})\bar{k} = \omega_z\bar{j} - \omega_y\bar{k} \\ \dot{\bar{j}} &= \dot{j}_x \cdot \bar{i} + \dot{j}_y \cdot \bar{j} + \dot{j}_z \cdot \bar{k} = (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{i})\bar{i} + (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{j})\bar{j} + \dot{\bar{j}}(\dot{\bar{j}} \cdot \bar{k})\bar{k} = \omega_x\bar{k} - \omega_z\bar{i} \\ \dot{\bar{k}} &= \dot{k}_x \cdot \bar{i} + \dot{k}_y \cdot \bar{j} + \dot{k}_z \cdot \bar{k} = (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i})\bar{i} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{j})\bar{j} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{k})\bar{k} = \omega_y\bar{i} - \omega_x\bar{j} \end{aligned}$$

Derivatele de mai sus se mai pot scrie:

$$\dot{\bar{i}} = \omega_z\bar{j} - \omega_y\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \quad \dot{\bar{j}} = \omega_x\bar{k} - \omega_z\bar{i} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{\omega} \times \bar{j}$$

$$\dot{\bar{k}} = \omega_y\bar{i} - \omega_x\bar{j} = \bar{\omega} \times \bar{k}$$

Înlocuind aceste expresii în (10.7) rezultă:

$$\bar{A} = \bar{\omega} \times (U_x\bar{i} + U_y\bar{j} + U_z\bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{U} \quad (10.8)$$

și prin urmare, relația dintre *derivata absolută* și *derivata relativă* a unui vector \bar{U} se scrie :

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{U}$$

unde s-a notat:

$$\bar{\omega} = (\dot{\bar{j}} \cdot \bar{k})\bar{i} + (\dot{\bar{k}} \cdot \bar{i})\bar{j} + (\dot{\bar{i}} \cdot \bar{j})\bar{k} \quad (10.9)$$

Observații

- a) Dacă un vector este invariabil legat de un triedru mobil, derivata sa absolută este în general diferită de zero. Într-adevăr, deoarece în aceste caz, derivata relativă (sau locală) este nulă ($\partial \bar{U} / \partial t = 0$), rezultă: $\dot{\bar{U}} = \bar{\omega} \times \bar{U} \neq 0$
- b) Conform regulii de derivare (10.9) derivata absolută a vectorului $\bar{\omega}$, este:

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \quad \text{sau:} \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \quad (10.10)$$

Așadar, oricare ar fi mișcarea triedrului mobil față de cel fix, *derivata absolută a vectorului $\bar{\omega}$ va fi egală cu derivata sa locală*;

notând cu $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ avem: $\bar{\varepsilon} = \dot{\omega}_x \bar{i} + \dot{\omega}_y \bar{j} + \dot{\omega}_z \bar{k} = \dot{\omega}_{x1} \bar{i}_1 + \dot{\omega}_{y1} \bar{j}_1 + \dot{\omega}_{z1} \bar{k}_1$.

- c) Dacă triedrul mobil se translatează față de triedrul fix, adică $\bar{\omega} = 0$, derivata absolută a vectorului \bar{U} va fi egală cu derivata sa locală: $\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial t}$.

10.1.3. Compunerea vitezelor în mișcare relativă

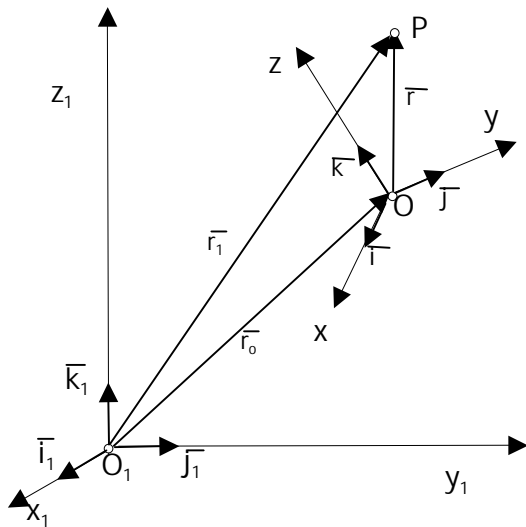


Fig.10.3

Problema fundamentală în mișcarea relativă a punctului material este determinarea mișcării absolute a unui punct material dacă se cunoaște mișcarea lui în raport cu un triedru mobil T și mișcarea triedrului T în raport cu un triedru fix T_1 , adică elementele cinematice în mișcarea absolută a lui P față de T_1 (viteza și accelerația absolută).

Mișcarea punctului P față de triedrul mobil T este definită de legea de variație a vectorului de poziție ca funcție de timp $\bar{r} = \bar{r}(t)$ sau $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$,

adică se cunosc coordonatele (x, y, z) punctului P față de triedrul mobil T .

- Să presupunem că mișcarea lui T în raport cu T_1 este cunoscută, fiind definită prin viteza \bar{v}_0 a originii O a lui T și de vectorul $\bar{\omega}$.
- Dacă notăm cu \bar{r}_1 vectorul de poziție al punctului P în raport cu T_1 și cu \bar{r}_0 vectorul de poziție al originii lui T în raport cu T_1 , conform fig.10.3, rezultă:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r} \quad (10.11)$$

Derivând relația (10.11) în raport cu timpul avem: $\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{r}}$.

Ținând seama că vectorului \bar{r} i se aplică regula de derivare (10.9) se obține:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_0 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (10.12)$$

Punând în evidență *viteza absolută, relativă și de transport* definite anterior se constată că:

- $\dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_a$ reprezintă *viteza absolută*, sau viteza punctului în raport cu triedrul T_1 ;
- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{v}_r$, *viteza relativă*, adică derivata relativă a vectorului \vec{r} ;
- $\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_t$, *viteza de transport* a punctului P , adică viteza punctului solidar cu triedrul mobil T , având vectorul de poziție \vec{r} (fig.10.3), ca și la mișcarea generală a rigidului, unde $\dot{\vec{r}}_0 = \vec{v}_0$ reprezintă viteza originii O a lui T în raport cu T_1 ;

Cu aceste notații și interpretări relația (10.12) devine:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t \quad (10.13)$$

$$\text{unde:} \quad \vec{v}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}; \quad \vec{v}_t = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (10.14)$$

Relația (10.13) este formula fundamentală pentru compunerea vitezelor în mișcarea relativă. Ea arată că viteza absolută a unui punct este egală cu suma vectorială dintre viteza relativă și viteza de transport.

10.1.4. Compunerea accelerațiilor în mișcarea relativă

Dacă se derivează în raport cu timpul relația (10.13) scrisă sub forma:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad ,$$

$$\text{avem:} \quad \dot{\vec{v}}_a = \dot{\vec{v}}_r + \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

și ținând seama că vectorii \vec{r} și $\partial \vec{r} / \partial t = \vec{v}_r$ sunt doi vectori definiți prin componentele lor pe axele triedrului mobil T , avem:

$$\dot{\vec{v}}_a = \left(\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{v}}_r \right) + \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \quad (10.15)$$

în care grupând termenii se obțin expresii având următoarele semnificații:

- $\dot{\vec{v}}_a = \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{a}_a$, *accelerația absolută* a punctului P în raport cu T_1 ;
- $\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{a}_r$, *accelerația relativă* sau derivata relativă a vitezei relative;
- $\vec{a}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_t$, *accelerația punctului solidar cu triedrul mobil* având vectorul de poziție \vec{r} care coincide, în momentul considerat, cu punctul material P și se numește *accelerația de transport*;

- $2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = \bar{a}_c$, *acelerația complementară Coriolis* reprezintă o accelerație care apare datorită efectului combinat al celor două mișcări: cea de transport și cea relativă.

În expresiile accelerațiilor de mai sus avem:

- $\dot{\bar{v}}_0 = \ddot{\bar{r}}_0 = \bar{a}_0$, *acelerația originii triedrului mobil T*;
- $\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$, *acelerația unghiulară a triedrului mobil T*;

Relația (10.15) se mai scrie:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \quad \text{unde:} \quad (10.16)$$

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2}, \quad \bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \quad \bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \quad (10.17)$$

Relația (10.16) reprezintă formula fundamentală pentru compunerea accelerațiilor în mișcarea relativă a punctului material. Ea arată că *acelerația absolută a unui punct este egală cu suma vectorială dintre accelerația relativă, accelerația de transport și accelerația Coriolis.*

Observație

În afară de cazul banal $\bar{v}_r = 0$, accelerația Coriolis se mai anulează când $\bar{\omega} = 0$, adică atunci când triedrul mobil execută în raport cu triedrul fix o mișcare de translație și când mișcarea relativă a punctului material se face astfel încât viteza lui relativă \bar{v}_r rămâne tot timpul paralelă cu vectorul $\bar{\omega}$ (de exemplu cazul în care un punct se deplasează pe generatoarea unui cilindru care rotește în jurul axei sale).

Aplicație

Se reconsideră exemplul din paragraful 10.1.1., adică un tub OA care se rotește în jurul capătului O al său. În același timp un punct material P (de exemplu, o bilă) se deplasează în tub după legea $OP = 0,5 a_0 t^2$. Rotirea tubului se face în planul fix $O_1 x_1 y_1$ după legea $\varphi = 0,5 \varepsilon_0 t^2$.

Se cere să se determine viteza și accelerația absolută ale punctului la momentul t .

Rezolvare.

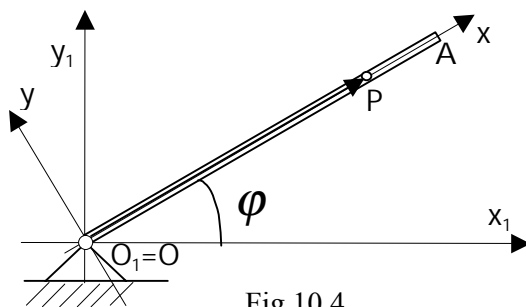


Fig.10.4

Originile celor două triedre se aleg astfel încât să coincidă ($O_1 \equiv O$). Tubul OA se ia în planul fix $x_1 O_1 y_1$ iar axa mobilă Ox de-a lungul tubului, deci axele $O_1 z_1$ și Oz coincid (fig.10.4).

În aceste condiții vectorii \bar{r} , \bar{r}_0 , \bar{v}_0 , \bar{a}_0 , $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$ au următoarele expresii analitice:

$$\bar{r} = \frac{1}{2} a_0 t^2 \bar{i}, \quad \bar{r}_0 = 0, \quad \bar{v}_0 = 0, \quad \bar{a}_0 = 0,$$

$$\bar{\omega} = \dot{\phi} \bar{k} = \varepsilon_0 t \bar{k}, \quad \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \varepsilon_0 \bar{k}.$$

Expresiile analitice ale componentelor vitezei absolute, se scriu:

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = a_0 t \bar{i}; \quad \bar{v}_t = \bar{\omega} \times \bar{r} = (\varepsilon_0 t \bar{k}) \times \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 \bar{i} \right) = \frac{a_0 \varepsilon_0 t^3}{2} (\bar{k} \times \bar{i}) = \frac{a_0 \varepsilon_0 t^3}{2} \bar{j}$$

deci viteza absolută va fi:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = a_0 t \bar{i} + \frac{1}{2} a_0 \varepsilon_0 t^3 \bar{j}; \quad v_{ax} = a_0 t, \quad v_{ay} = \frac{1}{2} a_0 \varepsilon_0 t^3$$

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{(a_0 t)^2 + \left(\frac{1}{2} a_0 \varepsilon_0 t^3 \right)^2} = a_0 \varepsilon_0 t \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0^2} + \frac{t^4}{4}}$$

Reprezentarea acestor componente este dată în fig.10.5.a.

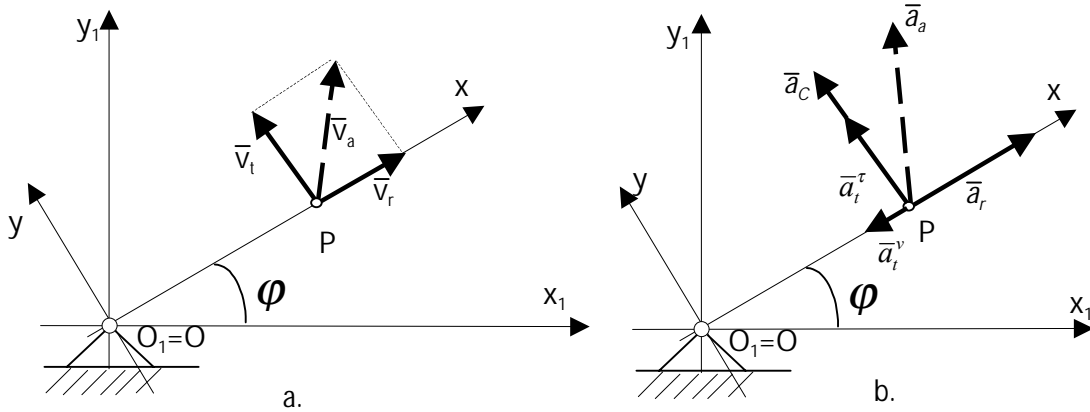


Fig.10.5

Expresiile analitice ale componentelor accelerației absolute sunt:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = a_0 \bar{i}$$

$$\bar{a}_t = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{1}{2} a_0 \varepsilon_0 t^2 \bar{j} - \frac{1}{2} a_0 \varepsilon_0^2 t^4 \bar{i}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_t = 2(\varepsilon_0 t \bar{k}) \times \left(\frac{a_0 \varepsilon_0 t^3}{2} \bar{j} \right) = a_0 \varepsilon_0^2 t^4 \bar{i}$$

Reprezentarea acestor componente este dată în fig.10.5.b. și deci, accelerația absolută va fi:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = \left(a_0 - \frac{1}{2} a_0 \varepsilon_0^2 t^4 \right) \bar{i} + \left(2a_0 \varepsilon_0 t^2 + \frac{1}{2} a_0 \varepsilon_0 t^2 \right) \bar{j}$$

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{\left(a_0 - \frac{1}{2} a_0 \varepsilon_0^2 t^4 \right)^2 + \left(2a_0 \varepsilon_0 t^2 + \frac{1}{2} a_0 \varepsilon_0 t^2 \right)^2}$$

10.2. Dinamica mișcării relative a punctului

Se știe că principiile mecanicii clasice, așa cum au fost ele enunțate de Newton, sunt verificate în raport cu un sistem de referință presupus fix. Acest lucru este valabil și pentru principiul fundamental al dinamicii:

$$m\bar{a}=\bar{F} \quad (10.18)$$

unde \bar{a} este accelerația punctului material față de un reper fix, deci accelerația absolută a punctului în înțelesul strict al cuvântului, iar \bar{F} este rezultanta forțelor active și a forțelor de legătură (în cazul unui punct material eliberat de legături, în baza axiomei legăturilor):

$$\bar{F}=\bar{F}^{(a)}+\bar{F}^{(leg)} \quad (10.19)$$

Întrucât *un observator oarecare nu poate sesiza decât mișcarea relativă a unui punct material în raport cu un reper oarecare mobil în care el se află* (reper aflat în mișcare față de un reper “fix”) utilizarea relației de mai sus, sub formula (10.18), față de acest reper, nu mai poate fi corectă (ea putând fi cel mult acceptată ca o relație aproximativă), deoarece în membrul întâi \bar{a} este accelerația relativă a punctului.

În continuare, ne propunem să găsim modul în care trebuie corectată ecuația (10.18) atunci când ea este scrisă în raport cu un sistem mobil. În acest scop vom folosi expresia accelerației absolute stabilită în cinematica mișcării relative, adică relația (10.16) completată cu relațiile (10.17). Din (10.16) avem:

$$\bar{a}_r=\bar{a}_a-\bar{a}_t-\bar{a}_c \quad (10.20)$$

și multiplicând această relație cu masa m se obține:

$$m\bar{a}_r=m\bar{a}_a-m\bar{a}_t-m\bar{a}_c \quad (10.21)$$

Relația (10.21) reprezintă o primă formă de scriere a ecuației de mișcare a punctului material în raport cu un sistem mobil și deoarece $m\bar{a}_a=\bar{F}$ relația (10.21) devine:

$$m\bar{a}_r=\bar{F}-m\bar{a}_t-m\bar{a}_c \quad (10.22)$$

Expresiile $-m\bar{a}_t$ și $-m\bar{a}_c$ reprezintă două forțe pe care le vom nota, în cele ce urmează cu:

$$\bar{F}_t=-m\bar{a}_t=-m[\bar{a}_0+\bar{\varepsilon}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})], \quad (10.23)$$

$$\bar{F}_c=-m\bar{a}_c=-2m\bar{\omega}\times\bar{v}_r \quad (10.24)$$

Ecuația (10.22) se poate scrie sub forma:

$$m\bar{a}_r=\bar{F}+\bar{F}_t+\bar{F}_c \quad (10.25)$$

Se observă că, în raport cu un sistem de referință mobil ecuația fundamentală a dinamicii se corectează cu cei doi termeni complementari, ale căror expresii date de (10.23), (10.24) și au dimensiunile unor forțe: aceștia sunt denumiți respectiv: forța *complementară de transport* \bar{F}_t și forța *complementară Coriolis* \bar{F}_c . Riguros vorbind, \bar{F}_t și \bar{F}_c nu sunt forțe în sensul în care au fost ele definite, deoarece nu corespund unor acțiuni mecanice reale exercitate asupra punctului material.

O problemă foarte importantă, care se pune în legătură cu forțele complementare în mișcarea relativă, este aceea de a vedea dacă există repere mobile față de care aceste forțe complementare sunt nule. În acest caz ecuația de mișcare va fi de aceeași formă ca și în cazul mișcării absolute a punctului material:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} \quad (10.26)$$

Aceasta înseamnă că trebuie să fie îndeplinită condiția:

$$\bar{F}_t + \bar{F}_c = -m[\bar{a}_0 + \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r] = 0 \quad (10.27)$$

oricare ar fi viteza \bar{v}_r .

Rezultă deci următoarele condiții care trebuie îndeplinite:

$$\bar{\omega} = 0 \quad (\bar{\epsilon} = 0) \quad \text{și} \quad \bar{a}_0 = \ddot{\bar{r}}_0 = 0 \quad (10.28)$$

Reciproc, dacă aceste condiții sunt îndeplinite, ecuația de mișcare va fi (10.26). Deci, *condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația lui Newton să rămână invariabilă (având aceeași formă pentru studiul mișcării) este ca triedrul mobil la care se raportează mișcarea, să aibă o mișcare de translație ($\bar{\omega} = 0$), rectilinie ($\bar{a}_t^v = 0$) și uniformă ($\bar{a}_t^r = 0$).*

Astfel de triedre mobile se numesc în Mecanică *sisteme inerțiale*. Un exemplu de acest gen ar fi un sistem de axe de coordonate cu originea în centrul Soarelui și axele paralele cu trei direcții invariabile dacă presupunem că mișcarea absolută a Centrului Soarelui este rectilinie și uniformă.

Se observă că orice reper, care se mișcă rectiliniu și uniform față de un reper inerțial este tot un reper inerțial. Se constată că atât existența reperului preferențial (fix) cât și a reperului inerțial este ipotetică. Totuși, poate fi declarat ca reper inerțial un reper preferențial, față de care relația $m\bar{a}_r = \bar{F}$ se verifică în mod practic (cu o bună aproximație), cu ajutorul celor mai bune mijloace de măsură de care dispunem la ora actuală.

Aplicația 1

Se consideră un tub OA în care se mișcă fără frecare un punct material P (obilă) de masă m . În același timp bara se mișcă în jurul punctului O cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ de mărime constantă și având direcția axei Oz. Să se studieze mișcarea punctului material și să se determine reacțiunile tubului asupra punctului P, dacă la momentul inițial ($t=0$) punctul se află la distanța ($x=x_0$) față de O și are viteza nulă ($v_0=0$).

Rezolvare

Se aleg axele triedrului fix $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ și mobil $T(Oxyz)$ ca în figura 10.6. Forța ce acționează asupra punctului material este greutatea proprie $\bar{G} = m\bar{g}$ și forțele de legătură (reacțiunile) \bar{N}_1 și \bar{N}_2 perpendiculare pe Ox (\bar{N}_1 este paralelă cu Oz, iar \bar{N}_2 paralelă cu Oy). Din fig. 10.6 se observă că se poate scrie:

$$\bar{r} = \overline{OP} = x\bar{i},$$

$$\bar{v}_0 = 0, \quad \bar{v}_0 = 0, \quad \bar{a}_0 = 0,$$

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k}, \quad \bar{\varepsilon} = 0.$$

care înlocuite în relațiile (10.14) conduc la expresiile vitezelor:

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i},$$

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} = \omega\bar{k} \times x\bar{i} = \omega x\bar{j}$$

(mișcarea de transport este o mișcare uniformă pe un cerc de rază $r = x$).

Conform relațiilor (10.17) se obțin accelerațiile:

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\bar{i},$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = (\omega\bar{k}) \times (\omega x\bar{j}) = -\omega^2 x\bar{i}$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = (2\omega\bar{k}) \times (\dot{x}\bar{i}) = 2\omega\dot{x}\bar{j}$$

Expresiile forțelor conform (fig.10.6) sunt:

$$\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = -mg\bar{k} + N_1\bar{k} + N_2\bar{j}$$

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = mx\omega^2\bar{i}$$

$$\bar{F}_c = -m\bar{a}_c = -2m\omega\dot{x}\bar{j}$$

Ecuția fundamentală a mișcării relative (10.25): $m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c$,

devine în acest caz:

$$m\ddot{x}\bar{i} = -mg\bar{k} + N_1\bar{k} + N_2\bar{j} + mx\omega^2\bar{i} - 2m\omega\dot{x}\bar{j}$$

care proiectată pe axele triedrului mobil conduce la următoarele trei ecuații:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x \qquad \ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

$$0 = N_2 - 2m\omega\dot{x} \qquad \text{sau} \qquad N_1 = mg$$

$$0 = -mg + N_1 \qquad N_2 = 2m\omega\dot{x}$$

Prin rezolvarea ecuației: $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ se obține o soluție de forma $x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$, unde C_1 și C_2 sunt două constante de integrare, care se determină punând condițiile inițiale: ($x(0) = x_0$ și $v(0) = 0$), obținându-se astfel ecuația mișcării:

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = x_0 \cosh \omega t; \quad \dot{x} = x_0 \omega \sinh \omega t.$$

Din a treia ecuație rezultă reacțiunea: $N_2 = 2m\omega^2 x_0 \sinh \omega t$;

Reacțiunea totală N a tubului asupra punctului material este dată de:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = m\sqrt{g^2 + 4\omega^4 x_0^2 \sinh^2 \omega t}.$$

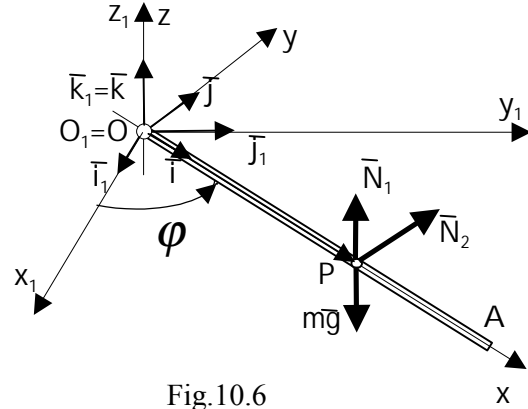


Fig.10.6

Aplicația 2. Efectul forțelor complementare asupra vehiculelor care se deplasează la suprafața Pământului

Un vehicul M de greutate G parcurge un drum după direcția unui meridian terestru, de la ecuator spre polul nord, cu viteza constantă v_r . În același timp, Pământul se rotește în jurul axei sale $N-S$ cu viteza unghiulară constantă ω . Se cere să se determine mărimile forțelor complementare față de un reper preferențial care se translatează odată cu Pământul în jurul soarelui.

Rezolvare:

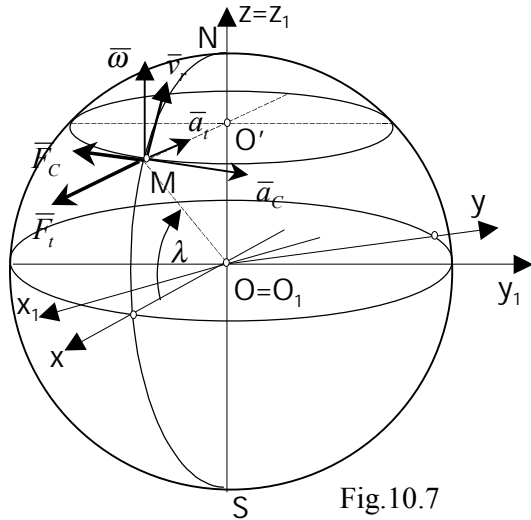


Fig.10.7

Conform fig.10.7 trebuie să determinăm expresiile forțelor complementare: F_t - forța de transport și F_c - forța Coriolis.

Mișcarea zilnică a Pământului în jurul axei sale $N-S$ cu viteza unghiulară constantă $\omega = \text{constant}$ ($\omega \parallel Oz$) este în acest caz mișcarea de transport. Vehiculul descrie în această mișcare un cerc de rază $r = O'M = R \cdot \cos \lambda$, unde R este raza Pământului, iar λ este latitudinea la care se află la un moment oarecare t (fig. 10.7).

$$\bar{r} = R \cos \lambda \bar{i} + R \sin \lambda \bar{k}; \quad \bar{\omega} = \omega \bar{k}; \quad \bar{\varepsilon} = 0$$

$$\bar{v}_r = v_r \sin \lambda \bar{i} + v_r \cos \lambda \bar{k}.$$

Componentele accelerației de transport \bar{a}_t sunt:

$$\bar{a}_t^r = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} = 0; \quad \bar{a}_t^v = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = -\omega^2 R \cos \lambda \bar{i}, \text{ deci } \bar{a}_t = \bar{a}_t^v = -(\omega^2 R \cos \lambda) \bar{i},$$

Deci forța complementară de transport va fi: $\bar{F}_t = -m \bar{a}_t = m(\omega^2 R \cos \lambda) \bar{i}$.

Datorită faptului că vehiculul M se deplasează după un meridian terestru, de la ecuator spre polul nord, cu viteza relativă \bar{v}_r , va apărea accelerația complementară Coriolis \bar{a}_c având expresia: $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$, fiind perpendiculară pe planul format de vectorii \bar{v}_r și $\bar{\omega}$ și orientată ca în fig. 10.7.

$$\text{Prin urmare } \bar{a}_c = 2\omega \bar{k} \times (v_r \sin \lambda \bar{i} + v_r \cos \lambda \bar{j}) = -(2\omega v_r \cdot \sin \lambda) \bar{j}$$

Deci forța complementară Coriolis va fi: $\bar{F}_c = -m \bar{a}_c = (2m\omega v_r \sin \lambda) \bar{j}$.

Mărimile celor două forțe complementare sunt:

$$|\bar{F}_t| = m\omega^2 R \cos \lambda, \text{ respectiv } |\bar{F}_c| = 2m\omega v_r \sin \lambda.$$

Dacă se consideră următoarele date numerice :

$$G = 10tf = 98100N; \quad \lambda = 45^\circ; \quad v_r = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}, \quad \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \cong 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

$R = 6400 \text{ km} = 64 \cdot 10^5 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ ms}^{-1}$, rezultă valorile forțelor complementare:

$$|\bar{F}_t| = 10^4 (7,27 \cdot 10^{-5})^2 64 \cdot 10^5 \cos 45^\circ = 239,33 \text{ N sau } |\bar{F}_t| = 0,24\% G$$

$$|\bar{F}_c| = 2 \cdot 10^4 \cdot 7,27 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot \sin 45^\circ = 20,57 \text{ N sau } |\bar{F}_c| = 0,02\% G$$

Observații:

1. În comparație cu greutatea vehicolului, aceste forțe pot fi neglijate, într-o problemă în care se acceptă o eroare de calcul de $\pm 2,5\%$
2. Efectul acestor forțe poate fi neglijat pentru toate corpurile care se deplasează pe suprafața Pământului, în timp ce în cazul sateliților artificiali sau al navelor cosmice lansate de pe Pământ, acest lucru nu se mai acceptă, efectul acestor forțe asupra traiectoriei lor fiind important.

10.3. Cinematica mișcării relative a rigidului**10.3.1. Generalități. Definiții**

Cunoscând mișcarea unui solid față de un *reper mobil* $T_1(O_1x_1y_1z_1)$, mișcarea reperului mobil T_1 față de un reper un *reper considerat în mod convențional fix* $T_0(O_0x_0y_0z_0)$ și luând un triedru cartezian mobil, *solidar cu rigidul* $T_2(O_2x_2y_2z_2)$ dorim să determinăm mișcarea solidului față de reperul considerat în mod convențional fix T_0 (fig. 10.8).

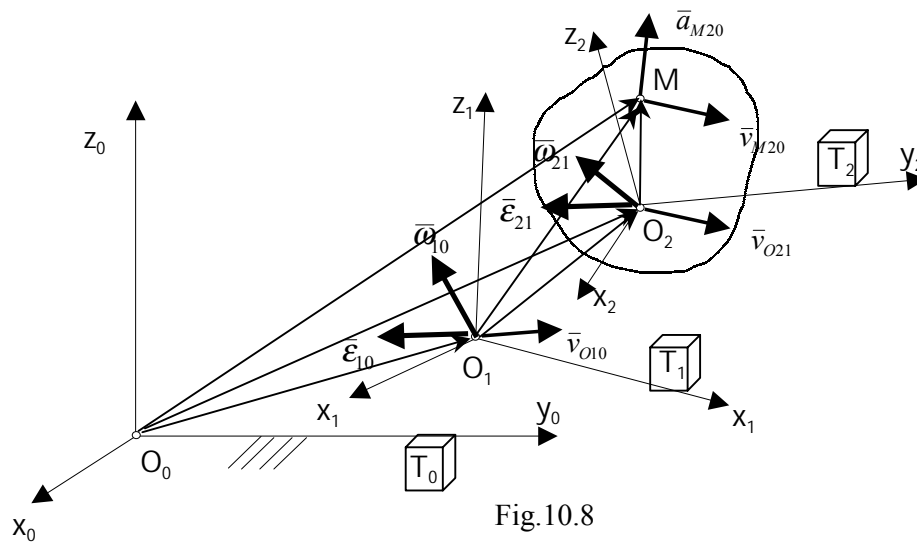


Fig.10.8

Poziția punctului M față de triedrul fix T_0 este definită de vectorul de poziție \overline{OM} , față de triedrul mobil T_1 , de vectorul de poziție $\overline{O_1M}$ și față de triedrul solidar cu rigidul T_2 de vectorul de poziție $\overline{O_2M}$; acești vectori sunt cunoscuți și între ei există relațiile vectoriale evidente:

$$\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M} = \overline{OO_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2M} \quad (10.29)$$

Vitezele și accelerațiile absolute și relative cunoscute sunt:

- $\overline{v}_{O_{10}}, \overline{v}_{O_{21}}$ - vitezele relative ale originilor lui T_1 față de T_0 și T_2 față de T_1 ;
- $\overline{\omega}_{10}, \overline{\omega}_{21}$ - vitezele unghiulare relative ale reperelor T_1 față de T_0 și T_2 față de T_1 ;
- $\overline{a}_{O_{10}}, \overline{a}_{O_{21}}$ - accelerațiile relative ale originilor lui T_1 față de T_0 și T_2 față de T_1 ;
- $\overline{\epsilon}_{10}, \overline{\epsilon}_{21}$ - accelerațiile unghiulare relative ale lui T_1 față de T_0 , și T_2 față de T_1 ;

Vitezele și accelerațiile absolute necunoscute sunt:

- \bar{v}_{M20} - viteza absolută a punctului M (aparținând rigidului și lui T_2) față de T_0 ;
- \bar{a}_{M20} - accelerația absolută a punctului M față de T_0
- $\bar{\omega}_{20}$ - viteza unghiulară absolută a reperului T_2 (față de T_0);
- $\bar{\varepsilon}_{20}$ - viteza unghiulară absolută a triedrelui T_2 (față de T_0);

A determina mișcarea rigidului față de reperul $T_0(O_0x_0y_0z_0)$ considerat în mod convențional fix, constă în exprimarea distribuției de viteze și accelerații, adică a vitezei și accelerației a unui punct oarecare al rigidului M în raport cu reperul fix.

10.3.2. Compunerea vitezelor în mișcarea relativă a rigidului

Se folosesc relațiile (10.13) pentru viteze de la mișcarea relativă a punctului material: $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$, unde se consideră ca mișcare de transport mișcarea rigidului imobilizat în reperul T_1 (fig.10.8), deci vitezele au forma particulară:

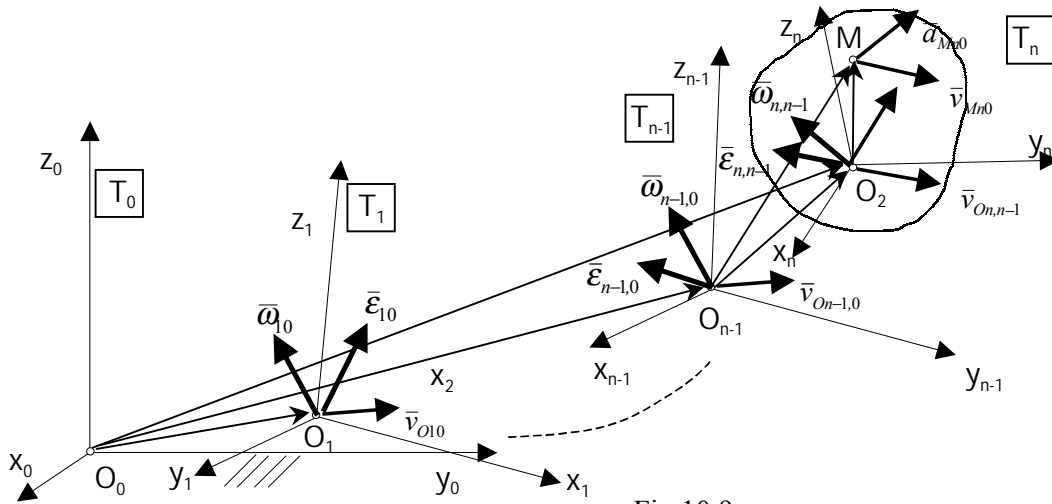


Fig.10.9

$$\bar{v}_a = \bar{v}_{M20}; \quad \bar{v}_r = \bar{v}_{M21} = \bar{v}_{O21} + \bar{\omega}_{21} \times \overline{O_2M}; \quad \bar{v}_t = \bar{v}_{M10} = \bar{v}_{O10} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1M} \quad (10.30)$$

și înlocuind se obține:

$$\bar{v}_{M20} = \bar{v}_{O10} + \bar{v}_{O21} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1M} + \bar{\omega}_{21} \times \overline{O_2M} \quad (10.31)$$

Viteza punctului M se mai poate scrie:

$$\bar{v}_{M20} = \bar{v}_{O20} + \bar{\omega}_{20} \times \overline{O_2M} \quad \text{unde:} \quad \bar{v}_{O20} = \bar{v}_{O21} + \bar{v}_{O10} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1O_2} \quad (10.32)$$

și înlocuind se obține:

$$\bar{v}_{M20} = \bar{v}_{O10} + \bar{v}_{O21} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1O_2} + \bar{\omega}_{20} \times \overline{O_2M} \quad (10.33)$$

Identificând expresiile (10.31) și (10.33) și ținând seama de relațiile (10.29) se obține:

$$\overline{\omega}_{20} = \overline{\omega}_{10} + \overline{\omega}_{21} \quad (10.34)$$

Generalizând expresiile (10.31, 10.33, 10.34) pentru cazul un sistem de triedre (fig. 10.9) se obține respectiv:

$$\overline{v}_{Mn0} = \sum_{i=1}^n \overline{v}_{O_i, i-1} + \sum_{i=1}^n \overline{\omega}_{i, i-1} \times \overline{O_i M} \quad (10.31')$$

$$\overline{v}_{Mn0} = \sum_{i=1}^n \overline{v}_{O_i, i-1} + \sum_{i=1}^n \overline{\omega}_{i, 0} \times \overline{O_i O_{i-1}} \quad (10.33')$$

$$\overline{\omega}_{n, 0} = \sum_{i=1}^n \overline{\omega}_{i, i-1} \quad (10.34')$$

Observații:

- Relațiile (10.31') sunt *relațiile generale de compunere a vitezelor* pentru cazul când se cunosc *vitezele unghiulare relative* $\overline{\omega}_{i, i-1}$;
- Relațiile (10.33') sunt *relațiile generale de compunere a vitezelor* pentru cazul când se cunosc *vitezele unghiulare absolute* $\overline{\omega}_{i, 0}$.

10.3.3. Compunerea accelerațiilor în mișcarea relativă a rigidului

Se folosesc relațiile (10.16) de la mișcarea relativă a punctului material pentru accelerații, unde dacă se consideră mișcarea de transport ca mișcarea rigidului imobilizat în triedrul T_1 (fig.10.8), accelerațiile au forma particulară:

$$\begin{aligned} \overline{a}_a &= \overline{a}_{M20} \\ \overline{a}_r &= \overline{a}_{M21} = \overline{a}_{O21} + \overline{\varepsilon}_{21} \times \overline{O_2 M} + \overline{\omega}_{21} \times (\overline{\omega}_{21} \times \overline{O_2 M}) \\ \overline{a}_t &= \overline{a}_{M10} = \overline{a}_{O10} + \overline{\varepsilon}_{10} \times \overline{O_1 M} + \overline{\omega}_{10} \times (\overline{\omega}_{10} \times \overline{O_1 M}) \\ \overline{a}_{Cor} &= 2\overline{\omega}_{10} \times \overline{v}_{M21} = 2\overline{\omega}_{10} \times (\overline{v}_{O21} + \overline{\omega}_{21} \times \overline{O_2 M}) \end{aligned} \quad (10.35)$$

și înlocuind se obține relația vectorială:

$$\begin{aligned} \overline{a}_{M20} &= \overline{a}_{O10} + \overline{a}_{O21} + \overline{\varepsilon}_{10} \times \overline{O_1 M} + \overline{\varepsilon}_{21} \times \overline{O_2 M} + \\ &+ \overline{\omega}_{10} \times (\overline{\omega}_{10} \times \overline{O_1 M}) + \overline{\omega}_{21} \times (\overline{\omega}_{21} \times \overline{O_2 M}) + 2\overline{\omega}_{10} \times \overline{v}_{M21} \end{aligned} \quad (10.36)$$

Dacă se cunosc *vitezele și accelerațiile unghiulare absolute* ale triedrelor T_1 și T_2 accelerația punctului M se scrie:

$$\overline{a}_{M20} = \overline{a}_{O20} + \overline{\varepsilon}_{20} \times \overline{O_2 M} + \overline{\omega}_{20} \times (\overline{\omega}_{20} \times \overline{O_2 M}) \quad (10.37)$$

unde:

$$\overline{a}_{O20} = \overline{a}_{O21} + \overline{a}_{O10} + \overline{\varepsilon}_{10} \times \overline{O_1 O_2} + \overline{\omega}_{10} \times (\overline{\omega}_{10} \times \overline{O_1 O_2}) + 2\overline{\omega}_{10} \times \overline{v}_{O21}.$$

Rezultă după înlocuire relația vectorială:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{M20} = & \bar{a}_{O10} + \bar{a}_{O21} + \bar{\varepsilon}_{10} \times \overline{O_1 O_2} + \bar{\varepsilon}_{20} \times \overline{O_2 M} + \\ & + \bar{\omega}_{10} \times (\bar{\omega}_{10} \times \overline{O_1 O_2}) + \bar{\omega}_{20} \times (\bar{\omega}_{20} \times \overline{O_2 M}) + 2\bar{\omega}_{10} \times \bar{v}_{O21}. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Relația pentru compunerea accelerațiilor unghiulare se obține derivând în raport cu timpul expresia (10.34) de compunere a vitezelor unghiulare:

$$\dot{\bar{\omega}}_{20} = \dot{\bar{\omega}}_{10} + \dot{\bar{\omega}}_{21} \quad (10.39)$$

unde : $\dot{\bar{\omega}}_{20} = \bar{\varepsilon}_{20}$; $\dot{\bar{\omega}}_{10} = \bar{\varepsilon}_{10}$;

Ținând seama de regula de derivare (10.9) avem:

$$\dot{\bar{\omega}}_{21} = \frac{\partial \bar{\omega}_{21}}{\partial t} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{21} = \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{21}$$

înlocuind se obține relația vectorială:

$$\bar{\varepsilon}_{20} = \bar{\varepsilon}_{10} + \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{21} \quad (10.40)$$

Generalizând expresiile (10.36, 10.38, 10.40) pentru cazul un sistem de triedre (fig. 10.9) se obține respectiv:

$$\bar{a}_{Mn,0} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_{O_{i,i-1}} + \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,i-1} \times \overline{O_i M} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} \times (\bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{O_i M}) + 2 \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i-1,0} \times \bar{v}_{Mn,i}$$

$$\text{unde: } \bar{v}_{Mn,i} = \bar{v}_{O_{i,i-1}} + \bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{O_i M}$$

$$\bar{a}_{Mn,0} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_{O_{i,i-1}} + \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,0} \times \overline{O_i O_{i+1}} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,0} \times (\bar{\omega}_{i,0} \times \overline{O_i O_{i+1}}) + 2 \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i-1,0} \times \bar{v}_{O_{i,i-1}}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n0} = \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i-1,0} \times \bar{\omega}_{i,i-1}$$

Observații:

- Relațiile (10.36') sunt relațiile generale de compunere a accelerațiilor pentru cazul când se cunosc vitezele și accelerațiile unghiulare relative $\bar{\omega}_{i,i-1}, \bar{\varepsilon}_{i,i-1}$;
- Relațiile (10.38') sunt relațiile generale de compunere a accelerațiilor pentru cazul când se cunosc vitezele și accelerațiile unghiulare absolute $\bar{\omega}_{i,0}, \bar{\varepsilon}_{i,0}$.

10.4. Cinematica mișcării sistemelor de rigide

10.4.1. Definiții.

Se înțelege prin *lanț cinematic* (notat cu LC) un sistem de corpuri rigide care sunt legate între ele; corpurile unui lanț cinematic se mai numesc *elemente cinematice*, iar legăturile dintre ele *cuple cinematice*. Lanțurile cinematice (notate în continuare cu LC) pot fi:

- LC deschise care includ sau nu elementul fix ;
- LC simplu închise care includ sau nu elementul fix ;
- LC multiplu închise care includ sau nu elementul fix .

În studiul lanțurilor cinematice se notează elementul fix cu (0), iar elementele cinematice mobile se notează cu: (1), (2), (3), ... (n), și se atașează fiecărui element câte un sistem de referință (triedru) mobil solidar legat de acesta notat cu: $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, iar pentru elementul fix sistemul de referință fix T_0 (fig.10.10).

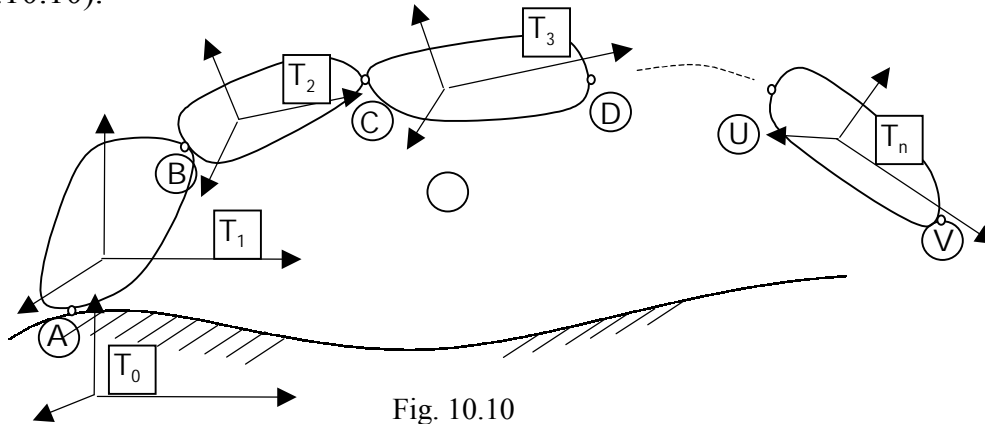


Fig. 10.10

Cuplele cinematice se notează cu litere mari : A, B, C, ... U, V.(fig. 10.10).

O cuplă cinematică răpește un număr de mișcări relative ale rigidului față de celălalt corp, care poate fi de la unu la cinci (și corespunde clasei cuplei). Se exclud: cuplele de clasa 0 deoarece acestea nu răpesc nici una dintre posibilitățile de mișcare relativă, deci nu au sens, și cuplele de clasa 6 care răpesc toate cele șase posibilități de mișcare relativă, deci în acest caz cele două corpuri sunt complet rigidizate. Astfel legăturile ideale prezentate în paragraful 5.2, reprezintă cuple de următoarele clase:

- reazemul simplu - o cuplă cinematică de clasa 1;
- articulația sferică - o cuplă cinematică de clasa 3;
- articulația cilindrică - o cuplă cinematică de clasa 5;

Se va studia în continuare cinematica mișcării sistemelor de rigide folosind rezultatele obținute la paragraful 10.3, atât pentru LC deschise, cât și pentru LC închise. Alte condiții cinematice specifice unor cuple folosite în construcția lanțurilor cinematice plane sunt prezentate la paragraful 10.4.3.

10.4.2. Generalizarea relațiilor de la mișcarea relativă a rigidului în cazul lanțurilor cinematice deschise

Pentru găsirea ecuațiilor generale ale mișcării elementelor unui LC, se va alege în continuare originea sistemului de referință O_i atașat fiecărui element astfel încât să coincidă cu prima cuplă cinematică pe care o vom nota generic cu A (iar a doua cuplă o cu B, fig 10.11.a).

Se consideră lanțul cinematic deschis simplu, cu element fix (fig.10.11) unde se cunosc:

- vitezele liniare relative din cuplele cinematice: $\bar{v}_{Ai,i-1}$, $i=1,2,\dots,n$;
- vitezele unghiulare relative și absolute din cuplele cinematice: $\bar{\omega}_{i,i-1}$, $\bar{\omega}_{i,0}$, $i=1,2,\dots,n$;
- accelerațiile liniare relative din cuplele cinematice: $\bar{a}_{Ai,i-1}$, $i=1,2,\dots,n$;
- accelerațiile unghiulare relative și absolute din cuplele cinematice $\bar{\varepsilon}_{i,i-1}$, $\bar{\varepsilon}_{i,0}$, $i=1,2,\dots,n$;

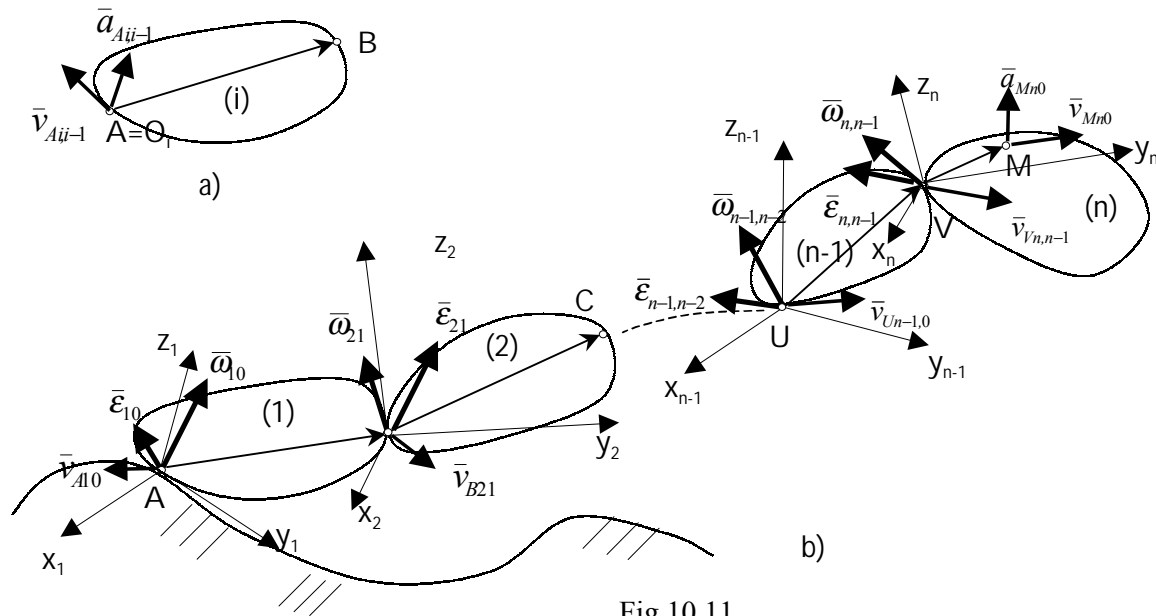


Fig.10.11

Relațiile deduse la cinematica mișcării relative a rigidului se scriu pentru acest caz, atât în termenii vitezelor și accelerațiilor unghiulare relative, cât și absolute, astfel:

- pentru viteze :
$$\bar{\omega}_{n,0} = \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} \quad (10.41)$$

$$\bar{v}_{Mn,0} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{AM} \quad \text{sau:} \quad \bar{v}_{Mn,0} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,0} \times \overline{AB} \quad (10.42)$$

- pentru accelerații:

$$\bar{\varepsilon}_{n,0} = \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i-1,0} \times \bar{\omega}_{i,i-1} \quad (10.42)$$

$$\bar{a}_{Mn,0} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,i-1} \times \overline{AM} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} \times (\bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{AM}) + 2 \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i-1,0} \times \bar{v}_{Mn,i} \quad (10.43)$$

sau:

$$\bar{a}_{Mn,0} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,0} \times \overline{AB} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,0} \times (\bar{\omega}_{i,0} \times \overline{AB}) + 2 \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i-1,0} \times \bar{v}_{Ai,i-1} \quad (10.44)$$

Aceste reprezintă relațiile generale ale mișcării elementelor unui LC simplu deschis.

10.4.3. Generalizarea relațiilor de la mișcarea relativă a rigidului în cazul lanțurilor cinematice închise

Acesta este un caz particular al lanțurilor cinematice deschise în care ultimul element coincide cu elementul fix, deci:

$$\bar{\omega}_{n,0} = 0; \bar{\varepsilon}_{n,0} = 0; M \in (0) \Rightarrow \bar{v}_{Mn,0} = 0, \bar{a}_{Mn,0} = 0.$$

Relațiile (10.41 ...10.44) scrise atât în termenii vitezelor și accelerațiilor unghiulare relative, cât și absolute, în acest caz devin:

- pentru viteze :
$$\sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} = 0 \quad (10.45)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{v}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{AM} = 0$$

sau
$$\sum_{i=1}^n \bar{v}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,0} \times \overline{AB} = 0 \quad (10.46)$$

- pentru accelerații:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i-1,0} \times \bar{\omega}_{i,i-1} = 0 \quad (10.47)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,i-1} \times \overline{AM} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,i-1} \times (\bar{\omega}_{i,i-1} \times \overline{AM}) + 2 \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i-1,0} \times \bar{v}_{Mn,i} = 0 \quad (10.48)$$

sau:
$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,0} \times \overline{AB} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,0} \times (\bar{\omega}_{i,0} \times \overline{AB}) + 2 \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i-1,0} \times \bar{v}_{Ai,i-1} = 0 \quad (10.49)$$

Aceste reprezintă relațiile generale ale mișcării elementelor unui LC simplu închis.

10.4.4. Analiza cinematică a lanțurilor cinematice închise plane. Metoda ciclurilor independente

Dacă mișcarea sistemului de corpuri are loc într-un plan (de exemplu Oxy), acesta este un caz particular mișcării unui LC simplu închis în care avem următoarele particularizări:

$$\bar{\omega}_{i,0} = \omega_{i,0} \bar{k}; \bar{\varepsilon}_{i,0} = \varepsilon_{i,0} \bar{k};$$

$$\bar{v}_{Ai,i-1} = v_{Ai,i-1}^x \bar{i} + v_{Ai,i-1}^y \bar{j};$$

$$\bar{a}_{Ai,i-1} = (a_{Ai,i-1}^{nx} + a_{Ai,i-1}^{tx}) \bar{i} + (a_{Ai,i-1}^{ny} + a_{Ai,i-1}^{ty}) \bar{j}$$

Așa cum rezultă din fig 10.11.a, s-a notat cu A și B cele două cuple ale elementului cinematic i și cu $\bar{v}_{Ai,i-1}$ și $\bar{a}_{Ai,i-1} = \bar{a}_{Ai,i-1}^n + \bar{a}_{Ai,i-1}^t$, viteza respectiv accelerația relativă din cupla cinematică.

Se folosesc relațiile generale ale mișcării în termenii vitezelor și accelerațiilor unghiulare absolute $\bar{\omega}_{i,0}$, $\bar{\varepsilon}_{i,0}$, astfel încât:

- pentru analiza vitezelor avem relația vectorială:

$$\sum_{i=1}^n \bar{v}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,0} \times \overline{AB} = 0$$

care este echivalentă cu două ecuații scalare:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_{Ai,i-1}^x - \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} (y_B - y_A) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n v_{Ai,i-1}^y + \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} (x_B - x_A) &= 0 \end{aligned} \quad (10.50)$$

- pentru analiza accelerațiilor avem relația vectorială:

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_{Ai,i-1} + \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_{i,0} \times \overline{AB} + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,0} \times (\bar{\omega}_{i,0} \times \overline{AB}) + 2 \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_{i,0} \times \bar{v}_{Ai,i-1} = 0$$

care este echivalentă cu două ecuații scalare:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^x - \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,0} (y_B - y_A) &= \sum_{i=1}^n \omega_{i,0}^2 (x_B - x_A) - \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{nx} + 2 \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} v_{Ai,i-1}^y \\ \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^y + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,0} (x_B - x_A) &= \sum_{i=1}^n \omega_{i,0}^2 (y_B - y_A) - \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{ny} - 2 \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} v_{Ai,i-1}^x \end{aligned} \quad (10.51)$$

sau:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^x - \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,0} (y_B - y_A) &= L_x \\ \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^y + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,0} (x_B - x_A) &= L_y \end{aligned} \quad (10.51')$$

Relațiile (10.50) și (10.51) stau la baza *Metodei ciclurilor independente* *.

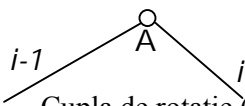
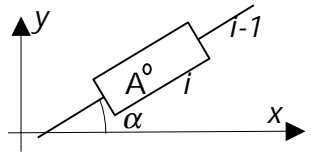
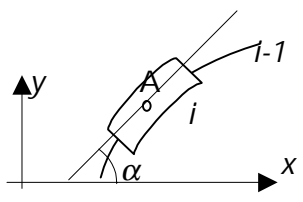
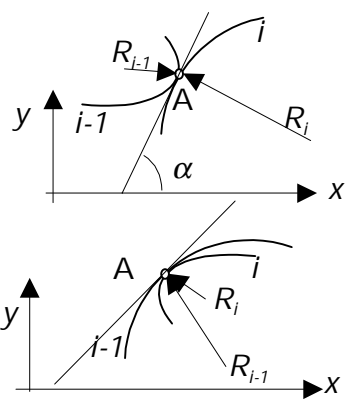
În cadrul acestei metode se face o analiză topologică și se definește *graful asociat al LC*, o reprezentare schematică a elementelor și cuplelor cinematice, privind modul de legătură a elementelor cinematice în cadrul LC.

În cazul LC multiple, se definește o *bază de cicluri independente*, prin extragerea unui număr de contururi închise, independente din punct de vedere al ecuațiilor de condiție care se scriu (*bucle cinematice independente*).

După aceea se face o analiză pozițională sau a geometriei elementelor și cuplelor, numită *analiză cinematică de ordinul zero (AC0)*, care furnizează datele necesare de viteze (*AC1-Analiza cinematică de ordinul I*) respectiv analizei de accelerații (*AC2-Analiza cinematică de ordinul II*): coordonatele punctelor caracteristice ale cuplelor cinematice, unghiurile poziționale ale cuplelor de translație, față de sistemul de referință global ales.

Pentru LC plane se folosesc cuplele cinematice de clasa 4 și 5, de tipurile prezentate în tabel:

*Această metodă a fost propusă și dezvoltată de către prof. univ. dr. ing. Mihail Atanasiu, Universitatea Valahia Târgoviște

Tipul cuplei	Viteze relative	Accelerații relative
 <p>Cupla de rotație (articulație)</p>	$v_{Ai,i-1} = 0$ $\omega_{i,i-1} \neq 0$	$a_{Ai,i-1} = 0$ $\varepsilon_{i,i-1} \neq 0$
 <p>Cupla de translație liniară</p>	$v_{Ai,i-1} \neq 0$ $v_{Ai,i-1}^x = v_{Ai,i-1} \cos \alpha$ $v_{Ai,i-1}^y = v_{Ai,i-1} \sin \alpha$ $\omega_{i,i-1} = 0, \omega_{i-1,0} = \omega_{i,0}$	$a_{Ai,i-1} \neq 0; a_{Ai,i-1}^n = 0$ $a_{Ai,i-1}^{rx} = a_{Ai,i-1} \cos \alpha$ $v_{Ai,i-1}^{ry} = a_{Ai,i-1} \sin \alpha$ $\varepsilon_{i,i-1} = 0, \varepsilon_{i-1,0} = \varepsilon_{i,0}$
 <p>Cupla de translație circulară</p>	$v_{Ai,i-1} \neq 0$ $v_{Ai,i-1}^x = v_{Ai,i-1} \cos \alpha$ $v_{Ai,i-1}^y = v_{Ai,i-1} \sin \alpha$ $\omega_{i,i-1} = 0, \omega_{i-1,0} = \omega_{i,0}$	$\bar{a}_{Ai,i-1} = \bar{a}_{Ai,i-1}^t + \bar{a}_{Ai,i-1}^n$ $a_{Ai,i-1}^{rx} = a_{Ai,i-1}^t \cos \alpha$ $a_{Ai,i-1}^{ry} = a_{Ai,i-1}^t \sin \alpha$ $a_{Ai,i-1}^n = R_i \omega_{Ai,i-1}^2$ $a_{Ai,i-1}^{nx} = a_{Ai,i-1}^n \sin \alpha$ $a_{Ai,i-1}^{ny} = -a_{Ai,i-1}^n \cos \alpha$ $\varepsilon_{i,i-1} = 0, \varepsilon_{i-1,0} = \varepsilon_{i,0}$
 <p>Cupla superioară de translație și rotație exterioră interioară</p>	$v_{Ai,i-1} \neq 0$ $v_{Ai,i-1}^x = v_{Ai,i-1} \cos \alpha$ $v_{Ai,i-1}^y = v_{Ai,i-1} \sin \alpha$ $\omega_{i,i-1} \neq 0$	$\bar{a}_{Ai,i-1} = \bar{a}_{Ai,i-1}^t + \bar{a}_{Ai,i-1}^n$ $a_{Ai,i-1}^{rx} = a_{Ai,i-1}^t \cos \alpha$ $a_{Ai,i-1}^{ry} = a_{Ai,i-1}^t \sin \alpha$ $a_{Ai,i-1}^n = \frac{\omega_{Ai,i-1}^2}{\frac{1}{R_{i-1}} \pm \frac{1}{R_i}}$ $a_{Ai,i-1}^{nx} = a_{Ai,i-1}^n \sin \alpha$ $a_{Ai,i-1}^{ny} = \pm a_{Ai,i-1}^n \cos \alpha$ $\varepsilon_{i,i-1} \neq 0.$

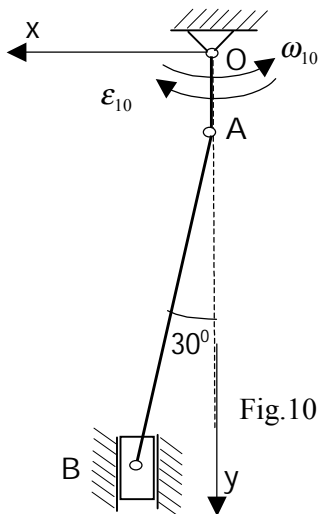


Fig.10.12

Aplicația 1

Se consideră mecanismul manivelă-piston din fig. 10.12, într-o poziție particulară. Manivela are lungimea $OA=10L$, biela $AB=60$. Manivela OA se rotește cu viteza unghiulară: $\omega_{10} = 1,5 \omega_0$ și accelerația unghiulară $\varepsilon_{10} = -2 \omega_0^2$, având sensurile indicate în figură. Se cere să se determine: $a_B, v_B, \omega_{20}, \varepsilon_{20}$ (aceeași aplicație cu cea prezentată la pag.216).

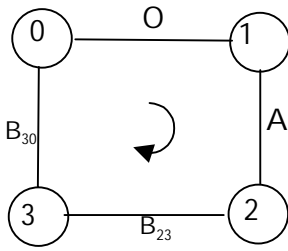


Fig.10.13

Rezolvare:

Alegând sistemul de axe ca în fig 10.12, avem următoarele coordonate ale punctelor: $O(0,0)$; $A(0,10L)$; $B(30L, (10+30\sqrt{3})L)$. Graful asociat acestui lanț cinematic *monociclu* este dat în fig. 10.13 (cu cercuri s-au figurat elementele și cu linii cuplele cinematice).

Ecuțiile de condiție pentru viteze (10.50) :

$$\sum_{i=1}^n v_{Ai,i-1}^x - \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} (y_B - y_A) = 0; \quad \sum_{i=1}^n v_{Ai,i-1}^y + \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} (x_B - x_A) = 0$$

se scriu:

$$v_{B03}^x - \omega_{10} (y_A - y_O) - \omega_{20} (y_B - y_A) = 0;$$

$$v_{B03}^y + \omega_{10} (x_A - x_O) + \omega_{20} (x_B - x_A) = 0;$$

$$v_{B03}^x = 0; \quad v_{B03}^y = -v_{B30} = -v_B$$

Înlocuind valorile se obține:

$$\omega_{20} = -\omega_{10} \frac{y_A - y_O}{y_B - y_A} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \omega_0; \quad v_B = -5\sqrt{3} L \omega_0$$

Ecuțiile de condiție (10.51) pentru accelerații :

$$\sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{ix} - \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,0} (y_B - y_A) = \sum_{i=1}^n \omega_{i,0}^2 (x_B - x_A) - \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{nx} + 2 \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} v_{Ai,i-1}^y$$

$$\sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{iy} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,0} (x_B - x_A) = \sum_{i=1}^n \omega_{i,0}^2 (y_B - y_A) - \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{ny} - 2 \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} v_{Ai,i-1}^x$$

se scriu:

$$a_{B03}^{ix} - \varepsilon_{10} (y_A - y_O) - \varepsilon_{20} (y_B - y_A) = \omega_{10}^2 (x_A - x_O) + \omega_{20}^2 (x_B - x_A);$$

$$a_{B03}^{iy} + \varepsilon_{10} (x_A - x_O) + \varepsilon_{20} (x_B - x_A) = \omega_{10}^2 (y_A - y_O) + \omega_{20}^2 (y_B - y_A)$$

$$a_{B03}^{ix} = 0; \quad a_{B03}^{iy} = -a_{B30} = -a_B$$

$$\text{Rezolvând se obține: } \varepsilon_{20} = \frac{7\sqrt{3}}{36} \omega_0^2 \quad a_B = \left(\frac{10\sqrt{3}}{3} - 22,5 \right) L \omega_0^2 .$$

Aplicația 2

Se consideră mecanismul manivelă-balansier-piston din fig. 10.14, într-o poziție particulară ($\varphi = 60^\circ$) în raport cu sistemul de referință Oxy. Lungimile elementelor (în mm) sunt: $A_0A = a = 50$, $BC = b = 100$, $CD = c = 90$, $OB = d = 80$, $BA_0 = e = 90$. Manivela OA se rotește cu viteza unghiulară constantă: $\omega_{10} = \omega_0 = 0,5 \text{ rad/s}$, având sensul indicat în figură.

Se cere să se determine:

$$v_{A32}, v_{D50}, a_{A32}, a_{D50}, \omega_{30}, \omega_{40}, \varepsilon_{30}, \varepsilon_{40}.$$

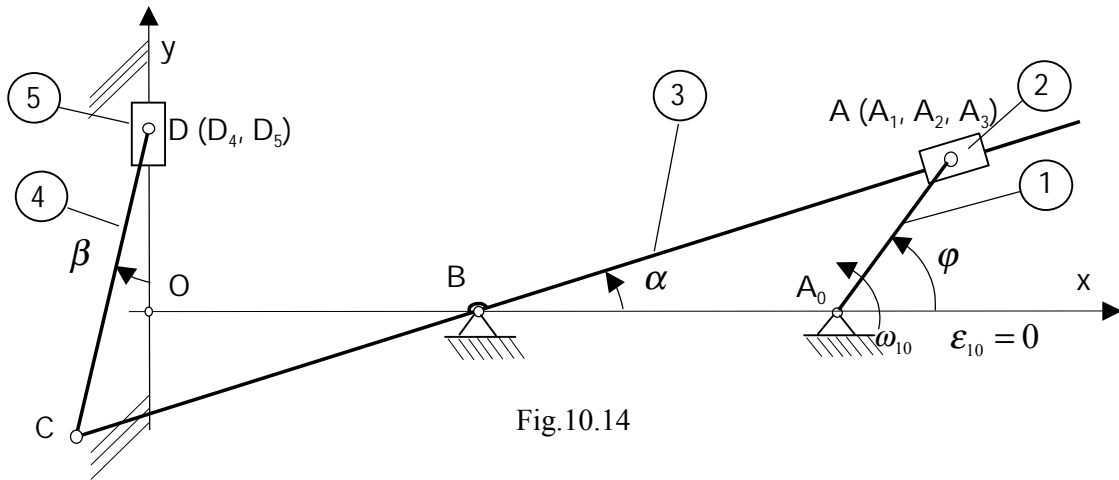


Fig.10.14

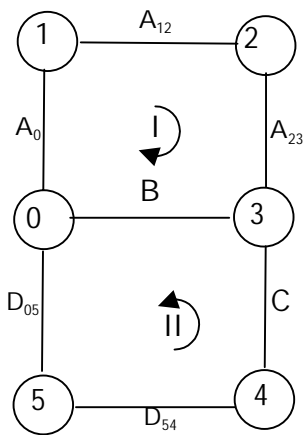


Fig. 10.15

Rezolvare:

Graful asociat acestui lanț cinematic *biciclu* este dat în fig. 10.15 (cu cercuri s-au figurat elementele și cu linii cuplele cinematice). În punctele A și D se suprapun câte două cuple cinematice notate pe graful asociat cu: A (A_{12} , A_{23}) respectiv D (D_{45} , D_{50})

1. Analiza pozițională a LC

Pentru *analiza pozițională* a elementelor și cuplelor acestui lanț cinematic (LC), se determină mai întâi unghiurile α și β în funcție de elementele cunoscute : a , b , c , d , e și φ .

Astfel dacă de scrie teorema sinusurilor în triunghiul A_0AB se obține unghiul α :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{e}{\sin(\varphi - \alpha)}, \text{ rezultă: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{a \cdot \sin \varphi}{e + a \cdot \cos \varphi}$$

și dacă de scriu proiecțiile laturilor triunghiului BCD pe Ox se obține unghiul β :

$$b \cos \alpha = d + c \sin \beta, \text{ rezultă: } \sin \beta = \frac{b \cos \alpha - d}{c},$$

unde α este unghiul determinat mai sus.

În tabelul de mai jos sunt date coordonatele cuplelor cinematice ale LC:

Cupla cinematică	A_0	A	B	C	D
x	$d+e$	$d+e+a \cos \varphi$	d	$d-b \cos \alpha$	0
y	0	$a \sin \varphi$	0	$-b \sin \alpha$	$c \cos \beta - b \sin \alpha$

2. Analiza cinematică a vitezelor

Ecuțiile de condiție pentru viteze (10.50):

$$\sum_{i=1}^n v_{Ai,i-1}^x - \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} (y_B - y_A) = 0; \quad \sum_{i=1}^n v_{Ai,i-1}^y + \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} (x_B - x_A) = 0$$

se scriu astfel, pentru *primul ciclu*: 0 - A₀ - I - A₁₂ - 2 - A₂₃ - 3 - B - 0:

$$v_{A32}^x - \omega_{10} (y_A - y_{A_0}) - \omega_{30} (y_B - y_A) = 0;$$

$$v_{A32}^y + \omega_{10} (x_A - x_{A_0}) + \omega_{30} (x_B - x_A) = 0;$$

$$v_{A32}^x = v_{A32} \cos \alpha; \quad v_{A32}^y = v_{A32} \sin \alpha$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$\omega_{30} = -\omega_{10} \frac{(y_A - y_{A_0}) \sin \alpha + (x_A - x_{A_0}) \cos \alpha}{(y_B - y_A) \sin \alpha + (x_B - x_A) \cos \alpha}$$

$$v_{A32} = \omega_{10} \frac{(y_A - y_{A_0})(x_B - x_A) + (x_A - x_{A_0})(y_B - y_A)}{(y_B - y_A) \sin \alpha + (x_B - x_A) \cos \alpha}$$

Pentru al II-lea ciclu: 0 - D₀₅ - 5 - D₅₄ - 4 - C - 3 - B - 0 ecuațiile se scriu:

$$v_{D50}^x - \omega_{40} (y_C - y_D) - \omega_{30} (y_B - y_C) = 0;$$

$$v_{D50}^y + \omega_{40} (x_C - x_D) + \omega_{30} (x_B - x_C) = 0;$$

$$v_{D50}^x = 0; \quad v_{D50}^y = v_{D50}$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$\omega_{40} = -\omega_{30} \frac{(y_B - y_C)}{(y_C - y_D)} = \omega_{10} \frac{(y_B - y_C)}{(y_C - y_D)} \cdot \frac{(y_A - y_{A_0}) \sin \alpha + (x_A - x_{A_0}) \cos \alpha}{(y_B - y_A) \sin \alpha + (x_B - x_A) \cos \alpha}$$

$$v_{D50} = \omega_{30} \left[\frac{(y_B - y_C)}{(y_C - y_D)} (x_C - x_D) - (x_B - x_C) \right], \quad \text{sau}$$

$$v_{D50} = \omega_{10} \frac{(y_A - y_{A_0}) \sin \alpha + (x_A - x_{A_0}) \cos \alpha}{(y_B - y_A) \sin \alpha + (x_B - x_A) \cos \alpha} \cdot \left[(x_B - x_C) - \frac{(y_B - y_C)}{(y_C - y_D)} (x_C - x_D) \right]$$

3. Analiza cinematică a accelerațiilor

Ecuțiile de condiție pentru accelerații (10.51):

$$\sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{ix} - \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,0} (y_B - y_A) = \sum_{i=1}^n \omega_{i,0}^2 (x_B - x_A) - \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{nx} + 2 \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} v_{Ai,i-1}^y$$

$$\sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{iy} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,0} (x_B - x_A) = \sum_{i=1}^n \omega_{i,0}^2 (y_B - y_A) - \sum_{i=1}^n a_{Ai,i-1}^{ny} - 2 \sum_{i=1}^n \omega_{i,0} v_{Ai,i-1}^x$$

se scriu astfel, pentru *primul ciclu*: 0 - A₀ - I - A₁₂ - 2 - A₂₃ - 3 - B - 0:

$$a_{A32}^{ix} - \varepsilon_{10} (y_A - y_{A_0}) - \varepsilon_{30} (y_B - y_A) = \omega_{10}^2 (x_A - x_{A_0}) + \omega_{30}^2 (x_B - x_A) + 2\omega_{30} v_{A32}^y$$

$$a_{A32}^{iy} + \varepsilon_{10} (x_A - x_{A_0}) + \varepsilon_{30} (x_B - x_A) = \omega_{10}^2 (y_A - y_{A_0}) + \omega_{30}^2 (y_B - y_A) - 2\omega_{30} v_{A32}^x$$

$$a_{A32}^{ix} = a_{A32}^{ix} \cos \alpha; \quad a_{A32}^{iy} = a_{A32}^{iy} \sin \alpha; \quad \varepsilon_{10} = 0$$

Dacă se notează:

$$\omega_{10}^2(x_A - x_{A_0}) + \omega_{30}^2(x_B - x_A) + 2\omega_{30}v_{A32}^y = L_{1x}$$

$$\omega_{10}^2(y_A - y_{A_0}) + \omega_{30}^2(y_B - y_A) - 2\omega_{30}v_{A32}^x = L_{1y}$$

rezolvând acest sistem se obține:

$$\varepsilon_{30} = \frac{L_{1y} \cos \alpha - L_{1x} \sin \alpha}{(y_B - y_A) \sin \alpha + (x_B - x_A) \cos \alpha}$$

$$a_{A32} = \frac{(x_B - x_A)L_{1x} - (y_B - y_A)L_{1y}}{(y_B - y_A) \sin \alpha + (x_B - x_A) \cos \alpha}$$

Pentru al II-lea ciclu: $0 - D_{05} - 5 - D_{54} - 4 - C - 3 - B - 0$ ecuațiile se scriu astfel:

$$a_{D50}^{ix} - \varepsilon_{40}(y_C - y_D) - \varepsilon_{30}(y_B - y_C) = \omega_{40}^2(x_C - x_D) + \omega_{30}^2(x_B - x_C)$$

$$a_{D50}^{iy} + \varepsilon_{40}(x_C - x_D) + \varepsilon_{30}(x_B - x_C) = \omega_{40}^2(y_C - y_D) + \omega_{30}^2(y_B - y_C)$$

$$a_{D50}^{ix} = 0; \quad a_{D50}^{iy} = a_{D50}$$

Rezolvând acest sistem se obține:

$$\varepsilon_{40} = \frac{-\varepsilon_{30}(y_B - y_C) + \omega_{40}^2(x_C - x_D) + \omega_{30}^2(x_B - x_C)}{(y_C - y_D)}$$

$$a_{D50} = -\varepsilon_{40}(x_C - x_D) - \varepsilon_{30}(x_B - x_C) + \omega_{40}^2(y_C - y_D) + \omega_{30}^2(y_B - y_C)$$

Înlocuind valorile numerice se obțin următoarele rezultate:

$$tg \alpha = 0,376; \quad \alpha = 20,633^\circ; \quad \sin \beta = 0,151; \quad \beta = 8,862^\circ.$$

Pentru coordonatele cuplelor cinematice ale LC:

Cupla cinematică	A_0	A	B	C	D
x (mm)	170	195	80	-13,585	0
y (mm)	0	43,301	0	-35,238	53,731

Pentru viteze:

Viteza	v_{A32} (mm/s)	v_{D50} (mm/s)	ω_{30} (rad/s)	ω_{40} (rad/s)
	24,666	-13,848	0,157	0,062

Pentru accelerații

Accelerația	a_{A32} (mm/s ²)	a_{D50} (mm/s ²)	ε_{30} (rad/s ²)	ε_{40} (rad/s ²)
	4,864	0,315	-0,0015	-0,017

CAPITOLUL 11

MOMENTE DE INERȚIE

11.1. Momente de inerție mecanice polare, axiale, planare și centrifugale. Raze de girație (de inerție)

Momentele de inerție sunt elemente geometrice care caracterizează un sistem de puncte materiale din punct de vedere al răspândirii masei. Ele reprezintă inerția rigidelor în mișcarea lor de rotație.

Se consideră un sistem de puncte materiale A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de mase m_i . Fie u_i distanța de la punctul A_i la o *varietate geometrică* V (punct, dreaptă, plan). Se definește *momentul de inerție mecanic* J_v al sistemului de puncte materiale în raport cu *varietatea geometrică* V , mărimea:

$$J_v = \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 \quad (11.1)$$

Dacă sistemul este un continuu material (corp), atunci expresia din membrul drept al relației (11.1) se transformă într-o integrală pe domeniul (D) ocupat de corp:

$$J_v = \int_{(D)} u^2 dm \quad (11.2)$$

unde u este distanța de la punctul curent A al corpului la varietatea V , iar dm este masa elementară din interiorul volumului elementar al unei vecinătăți a punctului.

Relațiile ce se vor stabili pentru sistemele discrete de puncte materiale vor fi valabile și în cazul corpurilor (continuului material), cu singura deosebire că în acest caz sumele finite devin sume integrale.

Dacă varietatea geometrică V este un punct O , atunci $J_v = J_O$ reprezintă momentul de inerție al sistemului material față de punctul O (numit și pol) și poartă numele de *moment de inerție polar* (fig.11.1.a).

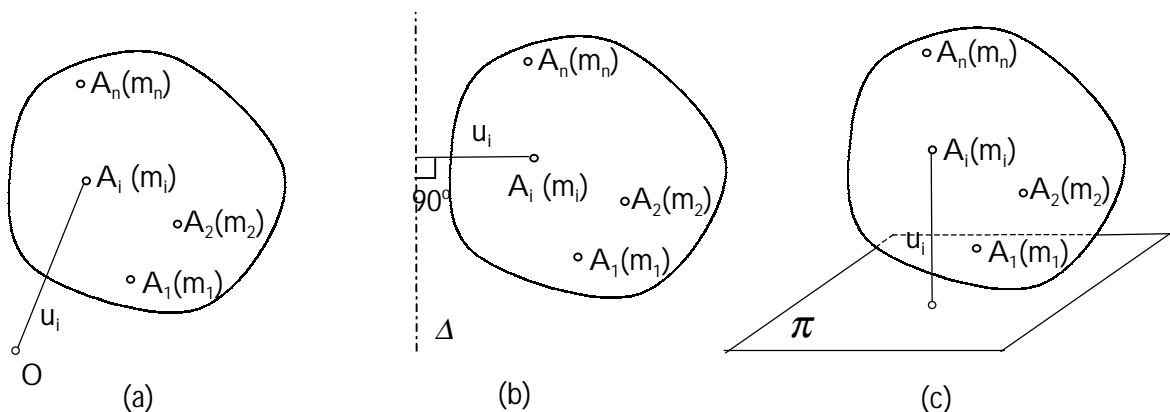


Fig.11.1

Dacă varietatea V este o dreaptă Δ , atunci $J_v = J_\Delta$, reprezintă momentul de inerție al sistemului material față de axa Δ și se numește *moment de inerție axial* (fig.11.1.b). Dacă varietatea V este un plan π , atunci $J_v = J_\pi$, reprezintă momentul de inerție în raport cu planul π și se numește *moment de inerție planar* (fig.11.1.c).

Se observă că J_v este o mărime scalară nenegativă ($J_v \geq 0$).

Dimensional, momentul de inerție J_v se exprimă prin: $[J_v] = ML^2$.

În afara expresiilor de forma (11.1), în aplicațiile tehnice se întâlnesc și expresii de forma:

$$J_{\pi,\pi'} = \sum_{i=1}^n m_i u_i v_i \quad (11.3)$$

unde u_i și v_i sunt distanțele de la punctele A_i de mase m_i respectiv la planele π, π' (fig.11.2) și expresia (11.3) poartă numele de *moment de inerție centrifugal* sau produs de inerție. Un astfel de moment de inerție este tot o mărime scalară de aceeași dimensiune ca și J_0, J_Δ, J_π dar spre deosebire de acestea, poate fi și negativ. Când momentul de inerție centrifugal este nul, se spune că cele două plane π, π' , în raport cu care se calculează, sunt *plane conjugate din punct de vedere al inerției* sistemului de puncte respectiv.

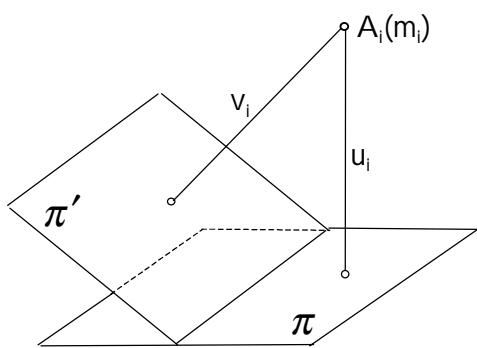


Fig.11.2

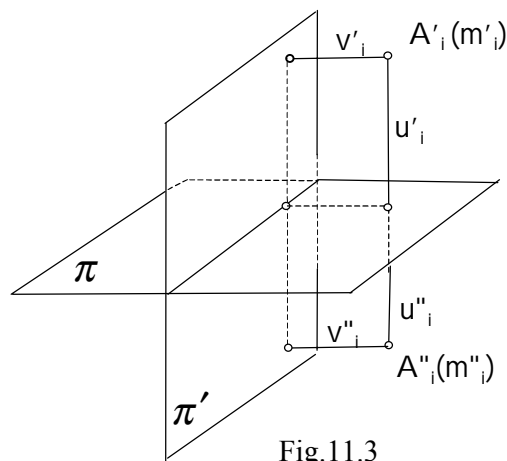


Fig.11.3

Se poate demonstra următoarea proprietate a momentelor de inerție centrifugale: *Dacă un sistem de puncte materiale admite un plan de simetrie, acesta este conjugat cu orice plan normal pe el.*

Pentru demonstrație să considerăm planul π ca plan de simetrie cu punctele A'_i, A''_i ale sistemului, simetrice față de π (fig.11.3), iar planul π' perpendicular pe π adică: $m'_i = m''_i, u'_i = -u''_i, v'_i = v''_i$

Rezultă:

$$J_{\pi \perp \pi'} = \sum_{i=1}^n m_i u_i v_i = \sum m'_i u'_i v'_i + \sum m''_i u''_i v''_i = \sum m'_i u'_i v'_i + \sum m'_i (-u'_i) v'_i = 0$$

În cazul unui continuu material (corp) momentul de inerție centrifugal se exprimă sub forma integrală: $J_{\pi,\pi'} = \int_{(D)} uv dm$ (11.4)

Este util uneori (din motive tehnice) să se scrie momentele de inerție sub forma: $J_v = M i_v^2$ (11.5)

unde: $M = \sum m_i$ (sau $M = \int_{(D)} dm$) este masa totală a corpului,

i_v - se numește *rază de inerție (rază de rotație)*.

Formula (11.5) arată că momentul de inerție al unui corp poate fi calculat ca produsul dintre masa lui totală și pătratul razei de inerție. Raza de inerție reprezintă deci distanța fictivă în raport cu o axă, un plan sau un pol la care ar trebui plasată întreaga masă a corpului (concentrată într-un punct) pentru ca să avem relația: $\sum m_i u_i^2 = M i_v^2$.

Deci raza de inerție este dată de relația:

$$i_v = \sqrt{\frac{J_v}{M}} \quad (11.6)$$

În cazul momentelor de inerție polare, axiale și planare, razele de inerție au respectiv expresiile:

$$i_0 = \sqrt{\frac{J_0}{M}}, \quad i_\Delta = \sqrt{\frac{J_\Delta}{M}}, \quad i_\pi = \sqrt{\frac{J_\pi}{M}} \quad (11.7)$$

11.2. Momente de inerție mecanice în raport cu un sistem de axe cartezian. Relații între ele.

Momentele de inerție ale sistemelor de puncte materiale se mai numesc și *momente de inerție mecanice*. Vom vedea că acestea capătă denumiri și expresii diferite, după cum varietatea geometrică este un punct, o axă, un plan sau două plane. Considerăm un sistem de puncte A_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Un punct oarecare A_i al sistemului de masă m_i este determinat față de un triedru ortonormat Oxyz prin vectorul lui de poziție \vec{r}_i , ale cărui proiecții pe axele triedrului sunt (x_i, y_i, z_i) (fig.11.4).

Definițiile date anterior se transcriu corespunzător fiecărei situații în parte, considerate pentru un sistem discret de puncte materiale și pentru un continuu material. Față de un sistem de referință cartezian avem:

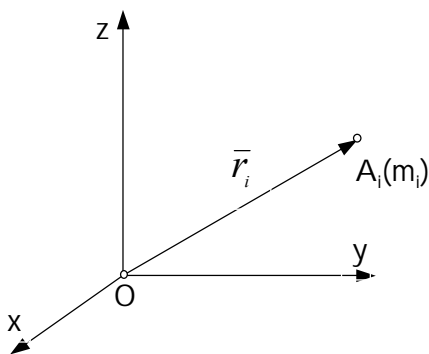


Fig. 11.4

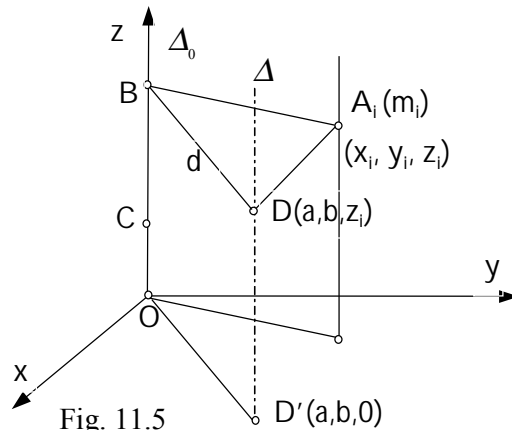


Fig. 11.5

a) Momente de inerție polare

- pentru sisteme discrete: $J_0 = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ (11.8)

- pentru corpuri: $J_0 = \int_{(D)} r^2 dm = \int_{(D)} (x^2 + y^2 + z^2) dm$ (11.9)

b) Momente de inerție axiale

- pentru sisteme discrete:

$$J_x = \sum m_i (\bar{r}_i \times \bar{i})^2 = \sum m_i d_{xi}^2 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$J_y = \sum m_i (\bar{r}_i \times \bar{j})^2 = \sum m_i d_{yi}^2 = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2)$$

$$J_z = \sum m_i (\bar{r}_i \times \bar{k})^2 = \sum m_i d_{zi}^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$
(11.10)

- pentru corpuri:

$$J_x = \int_{(D)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int_{(D)} (z^2 + x^2) dm; \quad J_z = \int_{(D)} (x^2 + y^2) dm.$$
(11.11)

c) Momente de inerție planare

- pentru sisteme discrete:

$$J_{x_0y} = \sum m_i z_i^2, \quad J_{y_0z} = \sum m_i x_i^2, \quad J_{z_0x} = \sum m_i y_i^2$$
(11.12)

- sau pentru corpuri:

$$J_{x_0y} = \int_{(D)} z^2 dm, \quad J_{y_0z} = \int_{(D)} x^2 dm, \quad J_{z_0x} = \int_{(D)} y^2 dm.$$
(11.13)

d) Momente de inerție centrifugale

- pentru sisteme discrete:

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i, \quad J_{yz} = \sum m_i y_i z_i, \quad J_{zx} = \sum m_i z_i x_i$$
(11.14)

- pentru corpuri:

$$J_{xy} = \int_{(D)} xy dm, \quad J_{yz} = \int_{(D)} yz dm, \quad J_{zx} = \int_{(D)} zx dm$$
(11.15)

Am văzut anterior că momentele de inerție centrifugale sunt nule dacă ele sunt calculate în raport cu două plane conjugate (două plane perpendiculare între ele, unul dintre ele fiind un plan de simetrie).

Între cele patru tipuri de momente de inerție există următoarele relații evidente:

$$J_x + J_y + J_z = 2J_0$$
(11.16)

$$J_{x_0y} + J_{y_0z} + J_{z_0x} = J_0$$
(11.17)

$$J_x + J_{y_0z} = J_y + J_{z_0x} = J_z + J_{x_0y} = J_0$$
(11.18)

$$J_x = J_{z_0x} + J_{x_0y}, \quad J_y = J_{x_0y} + J_{y_0z}$$
(11.19)

În cazul maselor repartizate într-un plan ($z = 0$) se obțin momentele de inerție:

$$\begin{aligned} J_x &= \int y^2 dm, & J_y &= \int x^2 dm, \\ J_0 &= \int (x^2 + y^2) dm, & J_{xy} &= \int xy dm \end{aligned} \quad (11.20)$$

cu proprietatea:

$$J_0 = J_x + J_y \quad (11.21)$$

11.3. Momente de inerție geometrice

Se știe că în cazul mediului continuu elementele de masă dm au expresia:

$$dm = \mu dV \quad (11.22)$$

unde cu dV s-a notat elementul de volum și cu μ densitatea corpului în punctul considerat. Integralele pe domeniul (D) de mai sus, vor deveni integrale de volume, de exemplu:

$$\begin{aligned} J_0 &= \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) \mu dV, & J_x &= \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \mu dV, \\ J_{x_0y} &= \iiint_{(V)} z^2 \mu dV, & J_{xy} &= \iiint_{(V)} xy \mu dV \end{aligned} \quad (11.23)$$

unde în general densitatea corpului este o funcție depinzând de coordonate: $\mu = \mu(x, y, z)$

În cazul corpului omogen ($\mu = \text{const.}$) acestea se scriu:

$$\begin{aligned} J_0 &= \mu \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dV, & J_x &= \mu \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) dV, \\ J_{x_0y} &= \mu \iiint_{(V)} z^2 dV, & J_{xy} &= \mu \iiint_{(V)} xy dV \end{aligned}$$

Numim *moment de inerție polar geometric*, integrala:

$$I_0 = \iiint_V r^2 dV,$$

Între cele două momente de inerție (mecanic și geometric) există deci relația:

$$J_0 = \mu I_0.$$

În general putem scrie pentru corpuri omogene ($\mu = \text{const.}$):

$$J_v = \mu I_v \quad (11.24)$$

relație valabilă pentru toate momentele de inerție definite mai înainte, pentru corpuri, plăci și bare omogene, iar μ , μ_S , μ_L , fiind densitățile corespunzătoare.

11.4. Variația momentelor de inerție mecanice față de axe paralele (Teorema lui Steiner)

Fie Δ și Δ_O două axe paralele situate la distanța d , axa Δ_O trecând prin centrul maselor sistemului de puncte materiale A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de mase m_i . Dorim să determinăm momentul de inerție J_Δ în funcție de J_{Δ_O} care este cunoscut.

Considerăm ca axa Δ_O coincide cu axa Oz a triedrului ortonormat $T(Oxyz)$ și fie punctul A_i de coordonate (x_i, y_i, z_i) față de acest triedru (fig.11.5). Prin punctul A_i ducem planul paralel cu xOy care întâlnește axa Δ în D ($BD = d$).

Momentul de inerție al sistemului de puncte materiale A_i față de axa Δ_O este dat de:

$$J_{\Delta_O} = \sum m_i (\overline{A_i B})^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Momentul de inerție al sistemului de puncte materiale A_i față de axa Δ este dat de:

$$J_\Delta = \sum m_i (\overline{A_i D})^2 = \sum m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

Dezvoltând această relație rezultă:

$$J_\Delta = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum m_i x_i - 2b \sum m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum m_i$$

Se notează cu: $J_{\Delta_O} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$, $M = \sum m_i$ masa întregului sistem, distanța dintre axe $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, iar din teorema momentelor statice:

$$\sum m_i x_i = M\xi = 0, \quad \sum m_i y_i = M\eta = 0$$

centrul de masă C aflându-se pe axa $Oz = \Delta_O$ ($\xi = \eta = 0$); rezultă deci:

$$J_\Delta = J_{\Delta_O} + M d^2 \quad (11.25)$$

Această formulă exprimă **teorema lui Steiner**:

“momentul de inerție față de o axă oarecare este suma dintre momentul de inerție față de o axă paralelă cu axa dată ce trece prin centrul maselor sistemului și produsul dintre masa totală a sistemului cu pătratul distanței dintre cele două axe”.

Comparând între ele momentele de inerție ale aceluiași sistem de puncte (A) față de axele având aceeași direcție, se pot enunța următoarele *proprietăți*, pe baza formulei (11.25):

- Momentul de inerție minim corespunde axei care trece prin centrul maselor sistemului; această axă va fi axa de moment de inerție minim pentru direcția dată;
- Considerând momentele de inerție J_{Δ_1} și J_{Δ_2} față de două drepte Δ_1 și Δ_2 paralele cu Δ_O , situate la distanțele d_1 și d_2 de aceasta, avem:

$$J_{\Delta_2} = J_{\Delta_1} + M(d_2^2 - d_1^2), \quad (11.26)$$

Într-adevăr dacă se scriu acestea în funcție de $J_{\Delta O}$:

$$J_{\Delta 1} = J_{\Delta 0} + Md_1^2, \quad J_{\Delta 2} = J_{\Delta 0} + Md_2^2,$$

proprietatea rezultă imediat. Formula (11.25) este un caz particular al formulei (11.26). Dacă se folosesc razele de inerție, formulele (11.25) și (11.26) devin respectiv:

$$i_{\Delta}^2 = i_{\Delta 0}^2 + d^2 \quad (11.27)$$

$$\text{și : } i_{\Delta 2}^2 = i_{\Delta 1}^2 + (d_2^2 - d_1^2) \quad (11.28)$$

Observații

- Se pot demonstra formule și pentru momente de inerție polare sau planare.
- O teoremă analoagă cu teorema lui Steiner se obține și pentru momentele de inerție centrifugale.

Dacă se consideră sistemul de puncte materiale A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de mase m_i , al cărui moment de inerție centrifugal față de sistemul de axe Oxyz este (fig.11.6):

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i$$

atunci, momentul centrifugal față de sistemul de axe O'x'y'z' este :

$$J_{x'y'} = \sum m_i x'_i y'_i = \sum m_i (x_i - a)(y_i - b)$$

$$\text{adică: } J_{x'y'} = J_{xy} - bM\xi - aM\eta + Mab,$$

unde s-a notat cu ξ , η și ζ coordonatele centrului maselor C (fig.11.6) ; dacă centrul maselor se confundă cu originea O a sistemului de axe, atunci $\xi = \eta = \zeta = 0$ și se obține relația de legătură dintre cele două momente centrifugale:

$$J_{x'y'} = J_{xy} + Mab. \quad (11.29)$$

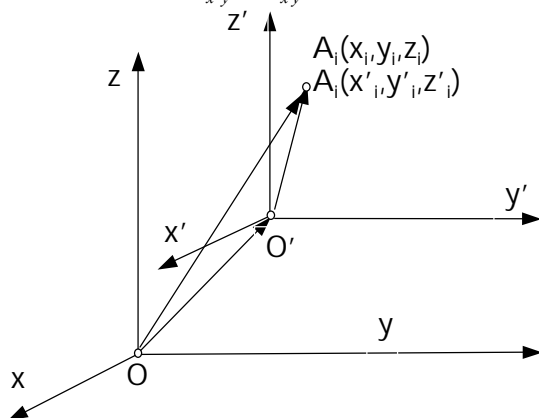


Fig. 11.6

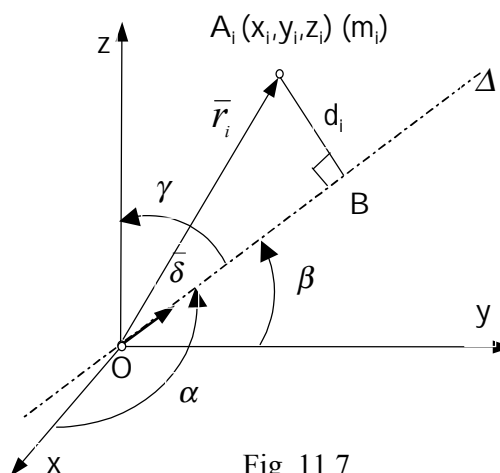


Fig. 11.7

Se observă că momentul de inerție centrifugal nu mai este minim dacă este calculat față de un sistem de axe cu originea în centrul de mase, deoarece produsul Mab poate fi pozitiv sau negativ.

11.5. Variația momentelor de inerție mecanice față de axe concurente

Fie un sistem de puncte materiale A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de mase m_i raportat la un triedru ortonormat $Oxyz$ și să presupunem cunoscute momentele de inerție axiale J_x, J_y, J_z precum și momentele de inerție centrifugale J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} ale sistemului $Oxyz$. Se cere să se determine momentul de inerție J_Δ al sistemului de puncte față de o axă Δ , care trece prin punctul O (fig.11.7). Punctul A_i al sistemului este definit de vectorul său de poziție \bar{r}_i :

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k}.$$

Notând cu B proiecția lui A_i pe axa Δ și cu d_i distanța $A_i B$ avem evident:

$$J_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 \quad (11.30)$$

Din triunghiul dreptunghic $A_i O B_i$ rezultă : $d_i^2 = r_i^2 - \overline{OB}^2$

unde: $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$

iar : $\overline{OB} = \bar{r}_i \cdot \bar{\delta} = l x_i + m y_i + n z_i$

unde $\bar{\delta}(l, m, n)$ este versorul axei Δ (l, m, n sunt cosinusurile directoare ale axei Δ)

Rezultă: $d_i^2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (l x_i + m y_i + n z_i)^2$. (11.31)

Introducând (11.31) în (11.30) și grupând termenii după l, m, n se obține:

$$J_\Delta = l^2 \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) + m^2 \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) + n^2 \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2lm \sum m_i x_i y_i - 2mn \sum m_i y_i z_i - 2nl \sum m_i z_i x_i \quad (11.32)$$

Ținând seama de relațiile obținute pentru momentele de inerție axiale și centrifugale rezultă:

$$J_\Delta = l^2 J_x + m^2 J_y + n^2 J_z - 2lm J_{xy} - 2mn J_{yz} - 2nl J_{zx} \quad (11.33)$$

Expresia (11.33) a momentului de inerție față de o axă Δ de orientare $\bar{\delta}$, este o formă pătratică în variabilele l, m, n . Ea este (după cum se știe din matematică) *un invariant al grupului de transformări de axe*, deoarece J_Δ este o mărime scalară, deci independentă de poziția axelor față de Δ .

Forma pătratică a formulei (11.33) ne arată că dacă se schimbă simultan semnele celor trei cosinusi directoare (l, m, n), valoarea lui J_Δ nu se schimbă; rezultă deci că momentul de inerție J_Δ nu depinde de orientarea axei, ci numai de suportul acestei axe. În cazul particular al unui sistem ale cărui puncte se află în planul Oxy , axa Δ fiind de asemenea în acest plan, avem: $z_i = 0$, $\gamma = 90^\circ$ deci $n = \cos \gamma = 0$; $l = \cos \alpha$,

$$\alpha + \beta = 90^\circ, \text{ deci } m = \cos \beta = \cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

Formula (11.33) are forma particulară:

$$J_{\Delta} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (11.34)$$

Observație

Din expresia (11.33) a lui J_{Δ} , se constată că momentul de inerție este în funcție de componentele unui tensor, numit *tensorul moment de inerție* ce conține următoarele elemente:

$$(\tau_J) = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix} \quad (11.35)$$

Pentru termenii acestui tensor se mai folosesc adesea următoarele notații:

$$(\tau_J) = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{vmatrix} \quad (11.36)$$

Pentru un sistem de puncte materiale, tensorul moment de inerție definit de matricea simetrică (11.35) sau (11.36) este determinat dacă se cunosc componentele sale pe axele de coordonate.

11.6. Momente și axe de inerție principale.

Din relația (11.33) se observă că momentul de inerție J_{Δ} calculat față de axa Δ ce trece prin originea sistemului de referință depinde de cosinusurile directe l, m, n sau de unghiurile α, β, γ față de care $J_{\Delta} = F(\alpha, \beta, \gamma)$ și poate atinge valori extreme (*maxime* sau *minime*). Axele Δ_i față de care momentele de inerție au valori extreme (*maxime* și *minime*) se numesc *axe principale de inerție*, iar momentele de inerție calculate față de aceste axe se numesc *momente principale de inerție* și se notează de obicei cu J_1, J_2, J_3 .

Momentele de inerție J_1, J_2, J_3 se pot determina studiindu-se extremul funcției: $J_{\Delta} = F(l, m, n) = F(\alpha, \beta, \gamma)$

care depinde de variabilele α, β, γ și care sunt legate între ele prin relația cunoscută: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Proprietăți ale axelor principale de inerție:

- axele principale de inerție formează un triedru ortogonal;
- momentele de inerție centrifugale față de axele principale sunt nule. Prin urmare, alegând sistemul de coordonate cu Ox, Oy, Oz să coincidă cu axele principale, cosinusurile directe ale axei Δ sunt:

$$l_1 = \cos \alpha_1, m_1 = \cos \beta_1, n_1 = \cos \gamma_1,$$

din expresia (11.33) rezultă:

$$J_{\Delta} = J_1 \cos^2 \alpha_1 + J_2 \cos^2 \beta_1 + J_3 \cos^2 \gamma_1 \quad (11.37)$$

- c. dacă centrul de masă al sistemului de puncte materiale coincide cu originea sistemului de axe (referință), adică: $O = C$, momentele de inerție corespunzătoare axelor ce trec prin acest punct se numesc *momente centrale de inerție*. Momentele față de axele principale de inerție, ce trec prin centrul de masă, se numesc *momente de inerție centrale principale* și au valori extreme.
- d. în cazul particular al plăcilor plane omogene, alegând planul xOy , în care se găsește și axa (Δ), formula (11.34) se mai poate scrie și astfel:

$$J_{\Delta} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \quad (11.38)$$

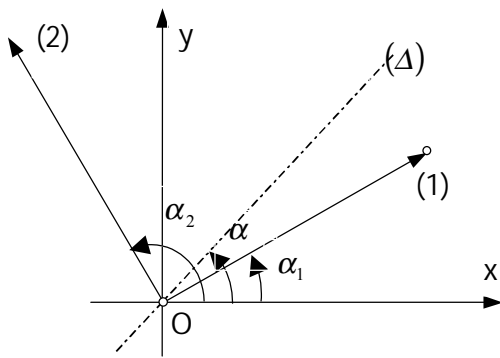


Fig. 11.8

În acest caz parametrul variabil este numai unghiul α pe care îl face axa (Δ) cu axa Ox (fig.11.8). Pentru a determina direcțiile principale ale lui J_{Δ} , se calculează extremul (maximul și minimul) acestei funcții, adică

$$\text{anularea derivatei: } \frac{dJ_{\Delta}}{d\alpha} = 0$$

$$\text{obținându-se : } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Pentru unghiul α rezultă valorile $\alpha_1, \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ adică direcțiile principale (1) și (2) din figura 11.8. Ținând seama de formulele trigonometrice:

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \pm \frac{2J_{xy}}{\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}};$$

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \pm \frac{J_y - J_x}{\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}}$$

și înlocuind aceste valori în relația (11.38) se obțin *momentele de inerție principale* (maxime și minime) corespunzătoare celor două direcții principale:

$$\begin{aligned} J_{\Delta 1} = J_1 &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2} \\ J_{\Delta 2} = J_2 &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2} \end{aligned} \quad (11.39)$$

11.7. Elipsoidul de inerție

Formula (11.33) care dă legea de variație a momentului de inerție față de o axă Δ care trece prin originea triedrului, în funcție de orientarea acestei axe:

$$J_{\Delta} = l^2 J_x + m^2 J_y + n^2 J_z - 2lmJ_{xy} - 2mnJ_{yz} - 2nlJ_{zx}$$

este susceptibilă de o reprezentare geometrică remarcabilă.

Să luăm pe axa Δ ce trece prin originea O (folosind anumite unități convenționale) un segment OP (vezi fig.11.9), astfel încât:

$$OP = \frac{1}{\sqrt{J_{\Delta}}} \quad (11.40)$$

Punctul P are deci vectorul de poziție

($\bar{\delta}$ fiind versorul axei Δ) :

$$\bar{r}_p = \frac{1}{\sqrt{J_{\Delta}}} \bar{\delta} = (J_{\Delta})^{-\frac{1}{2}} \cdot \bar{\delta} \quad (11.41)$$

ale cărui coordonate se scriu:

$$x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{J_{\Delta}}} = \frac{l}{\sqrt{J_{\Delta}}}; \quad y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{J_{\Delta}}} = \frac{m}{\sqrt{J_{\Delta}}}; \quad z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{J_{\Delta}}} = \frac{n}{\sqrt{J_{\Delta}}}.$$

$$\text{sau: } l = x\sqrt{J_{\Delta}}; \quad m = y\sqrt{J_{\Delta}}; \quad n = z\sqrt{J_{\Delta}}. \quad (11.42)$$

care introduse în ecuația (11.33) conduc la următoarea expresie:

$$J_{\Delta} = J_x J_{\Delta} x^2 + J_y J_{\Delta} y^2 + J_z J_{\Delta} z^2 - 2(J_{xy} J_{\Delta} xy + J_{yz} J_{\Delta} yz + J_{zx} J_{\Delta} zx) \quad (11.43)$$

sau (presupunând că $J_{\Delta} \neq 0$) prin împărțire cu J_{Δ} la expresia:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx = 1 \quad (11.44)$$

Rezultă deci că locul geometric al punctului P când axa Δ se rotește în jurul punctului O este o cuadrică închisă: un elipsoid cu centrul în O , denumit *elipsoidul de inerție* corespunzător punctului O . Elipsoidul de inerție dă o reprezentare geometrică sugestivă a variației momentului de inerție față de axele care trec prin punctul O .

Raportând ecuația (11.44) la axele elipsoidului ($Ox_1y_1z_1$) ea capătă forma (fig.11.10): $J_1 x_1^2 + J_2 y_1^2 + J_3 z_1^2 = 1$ (11.45)

unde J_1, J_2, J_3 sunt momente principale de inerție.

Lipsa termenilor centrifugali (J_{xy}, J_{yz} și J_{xz}) se interpretează astfel: în raport cu axele principale de inerție momentele centrifugale sunt nule. Această proprietate permite uneori identificarea axelor principale de inerție: *dacă un corp are o axă de simetrie, atunci momentele centrifugale sunt nule și axa respectivă este o axă principală de inerție.*

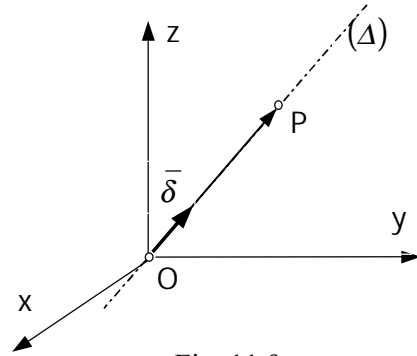


Fig. 11.9

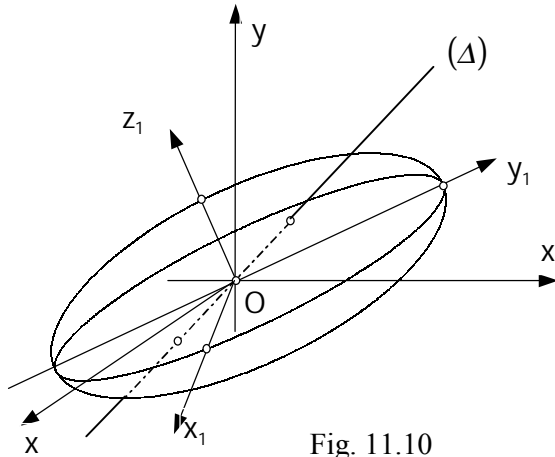


Fig. 11.10

Dacă se notează:

$$a^2 = \frac{1}{J_1}, \quad b^2 = \frac{1}{J_2}, \quad c^2 = \frac{1}{J_3} \quad (11.46)$$

ecuația elipsoidului raportat la axele sale (11.45) capătă forma cunoscută din geometria analitică:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \quad (11.47)$$

unde a, b, c sunt semiaxele principale ale elipsoidului.

Din relațiile (11.46) rezultă: $J_1 = \frac{1}{a^2}, J_2 = \frac{1}{b^2}, J_3 = \frac{1}{c^2}$ (11.48)

adică, momentele principale de inerție sunt invers proporționale cu pătratul semiaxelor elipsoidului de inerție.

În plan, în raport cu axele Ox, Oy , vom avea o elipsă de inerție de ecuație:

$$J_x x^2 + J_y y^2 - 2J_{xy} xy = 1 \quad (11.49)$$

sau, în raport cu axele principale, de ecuație:

$$J_1 x_1^2 + J_2 y_1^2 = 1 \quad (11.50)$$

11.8. Aplicații

11.8.1. Momentul de inerție ale unei bare omogene.

Se dă o bară omogenă $AB = L$ și de masă M . (fig.11.11). Se cere să se determine momentele de inerție J_x, J_y, J_O, J_A și momentul centrifugal J_{xy} .

Se alege originea sistemului Oxy la mijlocul distanței: $OA = OB = L/2$ și axa Ox după direcția barei. Se consideră apoi un element de bară de lungime dx și de masă $dm = \mu dx$ ($\mu =$ densitatea lineară) și conform definiției avem:

$$J_x = \int_{(L)} y^2 dm = 0$$

$$J_y = \int_{(L)} x^2 dm, \quad \text{sau}$$

$$J_y = \mu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \mu \frac{L^3}{12} = \frac{ML^2}{12}$$

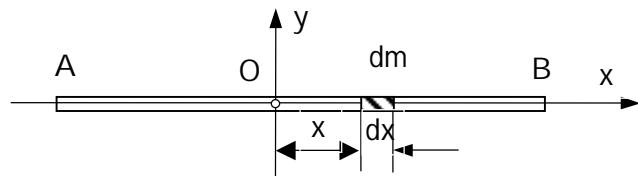


Fig. 11.11

$$J_0 = J_x + J_y = \frac{ML^2}{12}; \quad J_{xy} = \int_{(L)} xy dm = 0$$

Momentul de inerție față de capătul A al barei se calculează cu ajutorul formulei lui Steiner:

$$J_A = J_0 + Md^2 = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

11.8.2. Momentele de inerție ale unei plăci dreptunghiulare

Se consideră o placă dreptunghiulară omogenă având laturile a și b (fig.11.12). Se cer momentele de inerție: J_x, J_y, J_{xy}, J_0 și J_{x1}, J_{y1}, J_{01} .

Rezolvare:

Integralele se vor efectua pe întreaga arie a plăcii $A = ab$, elementul de arie este $dA = dxdy$

Avem relația generală:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{(A)} y^2 dm = \int_{(A)} y^2 \mu dA \\ &= \mu \iint_{(A)} y^2 dxdy = \mu \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \end{aligned}$$

Se obține astfel:

- momentul de inerție axial:

$$J_x = \mu \frac{ab^3}{12} = \frac{Mb^2}{12}, \quad J_y = \frac{Ma^2}{12}$$

$$J_{x1} = J_x + Md^2 = \frac{Mb^2}{3}, \quad J_{y1} = J_y + Md^2 = \frac{Ma^2}{3}$$

- polar: $J_0 = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}; \quad J_{01} = J_0 + M(O_1O)^2 = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}$

- centrifugal:

$$J_{xy} = \mu \iint_{(A)} xy dxdy = \mu \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y dy = 0$$

$$J_{x1y1} = \int_{(A)} xy dm = \mu \iint_{(A)} xy dxdy = \mu \int_0^a x dx \int_0^b y dy = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{Mab}{4}$$

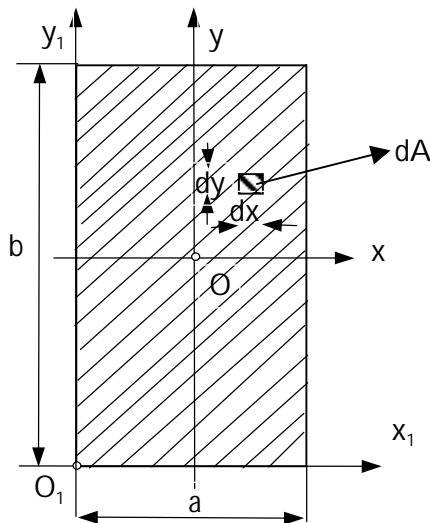


Fig. 11.12

11.8.3. Momentele de inerție ale unui disc circular omogen

Se consideră un disc omogen de rază R și masă M (fig.11.13)

Să se determine momentele de inerție J_x , J_y , J_{xy} , J_0 și J_B .

Rezolvare:

Dacă se consideră coordonatele polare ρ și θ , coordonatele carteziene (x, y) sunt legate de ρ și θ prin relațiile:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta,$$

iar elementul de arie:

$$dA = \rho d\rho d\theta$$

și elementul de masă $dm = \mu dA$ ($\mu =$ densitatea superficială).

Avem:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{(A)} y^2 dm = \iint \rho^2 \sin^2 \theta \mu \rho d\rho d\theta = \mu \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \\ &= \mu \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \mu \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \mu \pi R^2 \cdot \frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4} \end{aligned}$$

$$J_y = \int_{(A)} x^2 dm = \mu \iint \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \frac{MR^2}{4};$$

$$J_0 = J_x + J_y = \frac{MR^2}{2}$$

$$J_{xy} = \int_{(A)} xy dm = \iint \rho^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$J_{xy} = \mu \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \mu \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = 0$$

$$J_B = J_0 + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}.$$

Faptul că $J_{xy} = 0$ rezultă și din faptul că triedrul este principal.

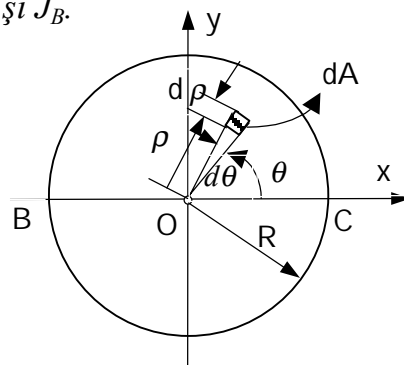


Fig. 11.13

11.8.4. Momentul de inerție ale unei plăci triunghiulare

Se consideră placa omogenă sub forma triunghiului dreptunghic din figura 11.14 și un sistem de axe Oxy alese astfel încât Ox să coincidă cu baza $OB = b$ și Oy cu înălțimea $OA = h$ a triunghiului.

Considerându-se elementul de arie $dA = xdy$ avem $dm = \mu dA = \mu xdy$; pe de altă parte din ecuația dreptei ce trece prin punctele B și A : $\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1$, se obține $x = \frac{b}{h}(h - y)$ și deci $dm = \frac{\mu b}{h}(h - y)dy$.

Momentul de inerție față de axa Ox se scrie:

$$J_x = \int_{(A)} y^2 dm = \frac{\mu b^2}{h} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \frac{\mu b^2 h^3}{12} = \frac{M h^2}{6}$$

deoarece masa plăcii este: $M = \mu \frac{bh}{2}$.

În mod analog avem:

$$J_y = \int_{(A)} x^2 dm = \frac{M b^2}{6}.$$

Acestea se mai pot calcula și altfel:

se consideră un punct oarecare $M(x, y)$

aparținând plăcii (triunghiului) și avem:

- momentul de inerție axial:

$$J_x = \mu \iint_{(A)} y^2 dx dy = \mu \int_0^b \left(\int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} y^2 dy \right) dx = \frac{\mu}{3} \int_0^b \frac{h^3}{b^3} (b-x)^3 dx = \frac{\mu h^3 b}{12} = \frac{M h^2}{6}$$

- momentul de inerție centrifugal:

$$J_{xy} = \mu \iint_{(A)} xy dx dy = \mu \int_0^b x \left(\int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} y dy \right) dx = \frac{\mu h^2}{2b^2} \int_0^b x(b-x)^2 dx = \frac{Mhb}{12}$$

- momentul de inerție polar (față de O):

$$J_o = \mu \iint_{(A)} (x^2 + y^2) dx dy = J_x + J_y = \frac{M}{6} (b^2 + h^2)$$

Pentru calculul lui J_{x_1} , axa O_1x_1 fiind paralelă cu axa Ox și care trece prin centrul de greutate al triunghiului, se aplică formula lui Steiner:

$$J_{x_1} = J_x - M \left(\frac{h}{3} \right)^2 = \frac{M h^2}{18}$$

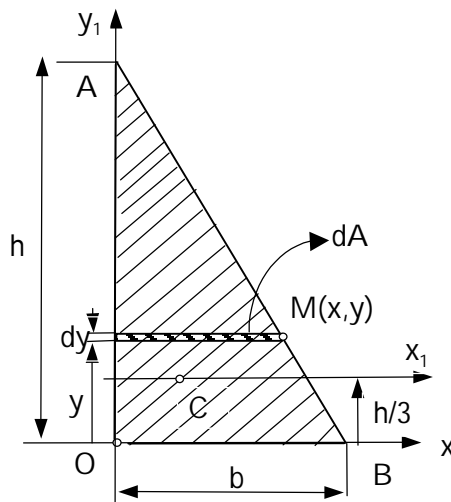


Fig. 11.14

Pentru calculul momentelor de inerție al unui triunghi oarecare se poate calcula acestea, mai întâi, pentru două triunghiuri dreptunghice.

11.8.4. Momentul de inerție al unui corp omogen de revoluție

Se consideră un con omogen având raza bazei R , înălțimea h și un sistem de axe $Oxyz$ ales ca în figura 11.15.

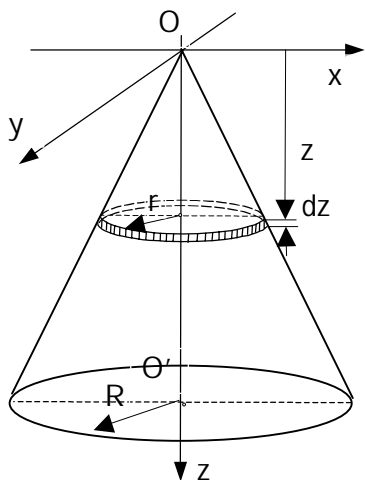


Fig. 11.15

Se știe că:

$$J_x = \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm.$$

Folosind coordonatele cilindrice:

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta; \quad z = z,$$

$$\text{unde: } 0 \leq \rho \leq r; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad 0 \leq z \leq h$$

$$dm = \mu dV = \mu dz dy dz = \mu \rho d\rho d\theta dz,$$

prin urmare avem:

$$\begin{aligned} J_x &= \iiint (\rho^2 \sin^2 \theta + z^2) \mu \rho d\rho d\theta dz = \\ &= \mu \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^h dz \int_0^r \rho^3 d\rho + \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z^2 dz \int_0^r \rho d\rho \\ J_x &= \left(\mu \frac{\pi R^2 h}{3} \right) \left(\frac{3R^2}{20} + \frac{3h^2}{5} \right) = \frac{3M}{20} (R^2 + 4h^2). \end{aligned}$$

Din motive de simetrie:

$$J_y = J_x = \frac{3M}{20} (R^2 + 4h^2).$$

Pentru a calcula J_z folosim formula:

$$\begin{aligned} J_z &= \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm = \iiint \rho^2 \mu \rho d\rho d\theta dz = \\ &= \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^r \rho^3 d\rho = \left(\mu \frac{\pi R^2 h}{3} \right) \frac{3R^2}{10} = \frac{3MR^2}{10} \end{aligned}$$

Din motive de simetrie momentele centrifugale sunt nule:

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$$

CAPITOLUL 12

TEOREMELE GENERALE ALE DINAMICII SISTEMELOR DE PUNCTE ȘI A RIGIDULUI

12.1. Generalități

După cum s-a arătat în capitolele precedente, *prin sistem de puncte materiale se înțelege o mulțime de puncte care interacționează mecanic*. În consecință, un punct A_i de masă m_i din sistem, este acționat de *forța exterioară* \vec{F}_i , (care reprezintă rezultanta forțelor exterioare, a forțelor exercitate de agenții exteriori sistemului studiat), precum și de *forțele interioare* \vec{F}_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n$), $j \neq i$, care reprezintă acțiunea celorlalte puncte ale sistemului studiat, asupra punctului A_i (fig.12.1).

Fie două puncte A_i și A_j ale sistemului.
Conform principiului acțiunii și reacțiunii forțele interioare sunt în echilibru:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

sau: $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$ (12.1)

Calculând momentele față de punctul O ale forțelor interioare rezultate din interacțiunea punctelor A_i și A_j se obține:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \overline{A_j A_i} \times \vec{F}_{ij} = 0 \quad (12.2)$$

adică: $\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = 0$ (12.3)

Ținând seama de relațiile (12.1) și (12.3) se obține următorul rezultat: *“pentru un rigid tursorul forțelor interioare (rezultanta și momentul resultant) este nul”*, adică:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = 0, \quad (12.4)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = 0. \quad (12.5)$$

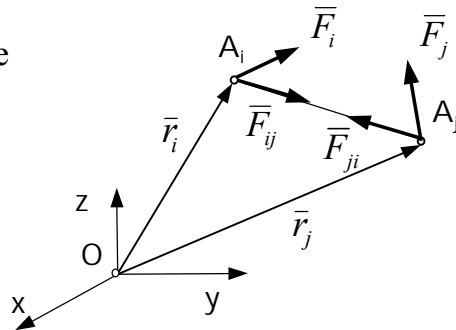


Fig.12.1

Prin corp *solid rigid* se înțelege în mecanica clasică un *continuu material nedeformabil*, sau cu alte cuvinte este limita la infinit a unui sistem nedeformabil de puncte materiale închis care ocupă același domeniu.

Trebuie subliniat în cele ce urmează, că unele noțiuni fundamentale și teoreme generale stabilite pentru *un sistem discret de puncte materiale*, se pot extinde la *solidul rigid (ca un sistem continuu de puncte materiale)* pe baza unui proces de trecere la limită (sumele infinite devin integrale).

Problema fundamentală a dinamicii sistemelor discrete de puncte materiale este determinarea mișcării lor în funcție de masele și forțele cunoscute: $m_i, \bar{F}_i, \bar{F}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) precum și în funcție de *condițiile inițiale date* (poziții și viteze la momentul $t=t_0$). Spunem că am determinat mișcarea sistemului de puncte materiale, dacă se cunoaște mișcarea fiecărui punct A_i din sistem.

Pentru fiecare punct A_i se scrie *ecuația fundamentală a dinamicii*:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} \quad (12.6)$$

unde $\ddot{\bar{r}}_i = \bar{a}_i$ este accelerația punctului A_i ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Pentru întregul sistem de puncte materiale, vom scrie un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul doi, cu necunoscutele $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ privite ca *funcții vectoriale de timp*:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\bar{r}}_1 &= \bar{F}_1 + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{1j} \\ m_2 \ddot{\bar{r}}_2 &= \bar{F}_2 + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{2j} \\ &\text{-----} \\ m_n \ddot{\bar{r}}_n &= \bar{F}_n + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{nj} \end{aligned} \quad (12.7)$$

unde, în general, forțele depind în mod explicit de pozițiile punctelor, de vitezele lor și de timp: $\bar{F}_i = \bar{F}_i(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$, $\bar{F}_{ij} = \bar{F}_{ij}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$.

La sistemul de ecuații (12.7) se adaugă *condițiile inițiale*:

$$\bar{r}_i(t_0) = \bar{r}_{i0}, \quad \dot{\bar{r}}_i(t_0) = \bar{v}_{i0} \quad (12.8)$$

Dacă asupra componentelor scalare ale forțelor \bar{F}_i și \bar{F}_{ij} se fac ipotezele de continuitate și uniformitate, matematic se poate demonstra *existența și unicitatea soluțiilor* sistemului (12.7) care verifică condițiile inițiale (12.8).

În Mecanică se determină de cele mai multe ori, așa *numitele integrale generale ale sistemului*, sau *integrale prime* adică soluții ale sistemului (12.7) de forma:

$$\bar{r}_i = \bar{f}_i(t, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_{2n}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.9)$$

unde $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_{2n}$ sunt $2n$ constante vectoriale de integrare independente.

Odată cunoscute funcțiile \bar{f}_i se poate determina mișcarea sistemului folosind condițiile inițiale ale problemei. Vom obține astfel $2n$ ecuații vectoriale pentru determinarea celor $2n$ constante vectoriale de integrare:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{i0} &= \bar{f}_i(0, \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_{2n}) \\ \bar{v}_{i0} &= \dot{\bar{f}}_i(0, \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_{2n}) \end{aligned} \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (12.10)$$

unde am notat cu $t_0 = 0$ momentul inițial și cu $\dot{\bar{f}}$ derivata funcției \bar{f} în raport cu timpul t .

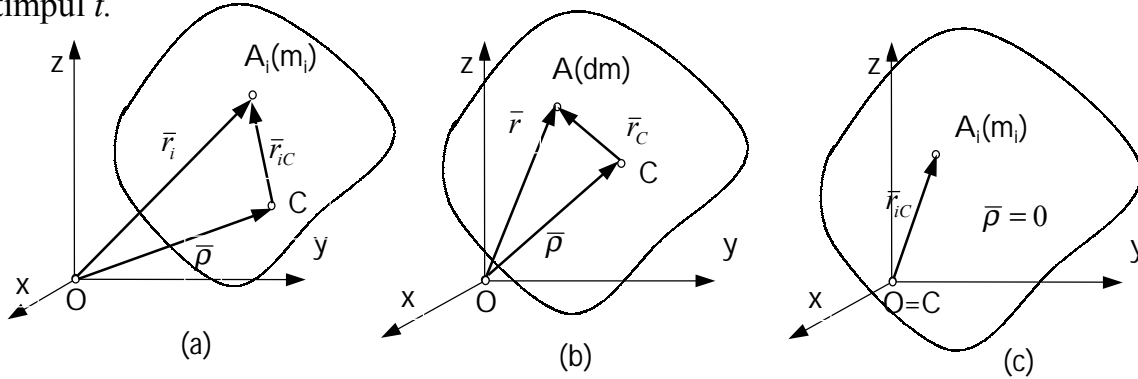


Fig. 12.2

În paragrafele care urmează vom folosi un rezultat care decurge din expresia vectorului de poziție $\bar{\rho}$ al centrului maselor C al unui sistem de puncte materiale față de un sistem de referință $Oxyz$.

Pentru a pune în evidență proprietatea ce ne interesează, să considerăm un sistem de puncte $A_i (i=1, 2, \dots, n)$, de mase m_i și vectori de poziție \bar{r}_i . Dacă $M = \sum_{i=1}^n m_i$ este masa sistemului, iar $\bar{\rho} = \overline{OC}$ este vectorul de poziție al centrului de masă al sistemului de puncte materiale față de un sistem de referință $Oxyz$, (fig. 12.2.a), expresia lui este dată de formula:

$$\bar{\rho} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i} \quad \text{sau} \quad \sum m_i \bar{r}_i = M \bar{\rho} \quad (12.11)$$

sau pentru un continuum material (fig.12.2.b), formula:

$$\int_{(D)} \bar{r} dm = M \bar{\rho}. \quad (12.12)$$

Dacă originea sistemului de axe $Oxyz$ coincide cu centrul maselor sistemului de puncte materiale ($O \equiv C$) atunci $\bar{\rho} = 0$ (fig.12.2,c) și relația (12.12) devine:

$$\sum m_i \bar{r}_{ic} = M \bar{\rho} = 0 \quad \text{sau} \quad \int_{(D)} \bar{r}_c dm = M \bar{\rho} = 0. \quad (12.13)$$

Formulele (12.11), (12.12) și (12.13) se transformă corespunzător în câte trei relații scalare, dacă sunt proiectate pe axele de coordonate .

12.2. Impulsul total. Teorema impulsului.

12.2.1. Impulsul total al unui sistem de puncte.

Se numește *impuls total la un moment dat* (sau *cantitate de mișcare totală*), pentru un sistem de puncte materiale A_i de mase m_i , având vitezele \vec{v}_i ($i = 1, 2, \dots, n$), față de un triedru oarecare T ($Oxyz$), suma impulsurilor tuturor punctelor A_i față de acest reper; impulsul unui punct A_i față de triedrul T este:

$$\vec{H}_i = m_i \vec{v}_i \quad (12.14)$$

deci impulsul total se scrie:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^n \vec{H}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (12.15)$$

unde: $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$.

Se observă că:

$$\vec{H} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum m_i \vec{r}_i) = \frac{d}{dt} (M\vec{\rho})$$

adică: $\vec{H} = M \dot{\vec{\rho}}$ (12.16)

unde: $\sum m_i = M$ este masa întregului sistem, $\vec{\rho}$ este vectorul de poziție al centrului maselor față de reperul T iar $\dot{\vec{\rho}}$ este viteza centrului maselor sistemului față de reperul T .

Prin urmare, *impulsul total al unui sistem de puncte materiale nu depinde de felul mișcării, el fiind identic cu impulsul centrului de masă al sistemului în care se consideră concentrată toată masa sistemului.*

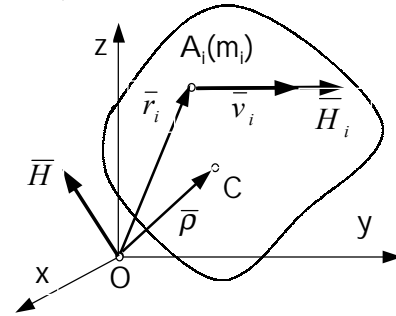


Fig. 12.3

Observații

1. Dacă originea reperului T se alege astfel încât să coincidă cu centrul maselor sistemului ($O \equiv C$, $\vec{\rho} = 0$), atunci impulsul total față de acest reper este nul:

$$\vec{H}_C = \sum \vec{H}_{iC} = \sum m_i \vec{v}_{iC} = \frac{d}{dt} (\sum m_i \vec{r}_{iC}) = \frac{d}{dt} (M\vec{\rho}) = 0 \quad (12.17)$$

2. Dacă se consideră un reper fix T_1 ($O_1x_1y_1z_1$) și un reper mobil $T(Oxyz)$ solidar cu sistemul de puncte și în mișcare de translație față de reperul T_1 , astfel ales încât originea reperului T să coincidă cu centrul maselor sistemului ($O \equiv C$); atunci, conform figurii 12.4, avem relația vectorială evidentă: $\vec{r}_{i1} = \vec{\rho}_1 + \vec{r}_{iC}$, în care $\vec{\rho}_1$ este vectorul de poziție al centrului maselor față de reperul T_1 ; \vec{r}_{iC} este vectorul de poziție al punctului A_i , față de reperul mobil T .

Potrivit definiției date avem:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= \sum \vec{H}_{i1} = \sum m_i \vec{v}_{i1} = \frac{d}{dt} (\sum m_i \vec{r}_{i1}) = \frac{d}{dt} [\sum m_i (\vec{\rho}_1 + \vec{r}_{iC})] = \\ &= \frac{d}{dt} (M\vec{\rho}_1 + \sum m_i \vec{r}_{iC}) = \frac{d}{dt} (M\vec{\rho}_1 + M\vec{\rho}) = \frac{d}{dt} (M\vec{\rho}_1) = M\dot{\vec{\rho}}_1. \end{aligned}$$

Se obține astfel pentru impulsul total aceeași expresie, cu deosebirea că atât \bar{H}_1 cât și $\dot{\bar{\rho}}_1$ sunt raportate la reperul fix T_1 .

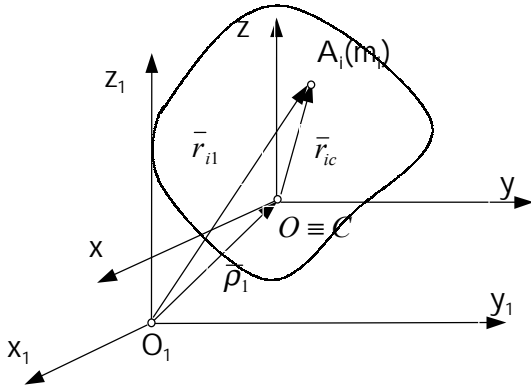


Fig. 12.4

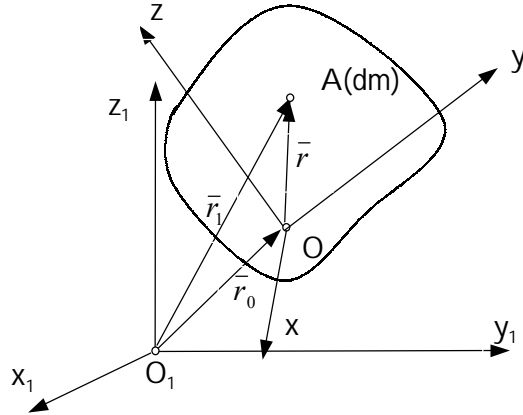


Fig. 12.5

12.2.2. Expresia impulsului total pentru un rigid

Fie un rigid (continuu material), triedrul fix $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ și triedrul mobil $T(Oxyz)$, solidar cu rigidul și în mișcare oarecare față de T_1 (fig.12.5). Dacă în jurul unui punct oarecare A din corp se consideră un volum de masă elementară dm , relația între vectorii de poziție este: $\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}$ iar distribuția de viteze față de T_1 se scrie:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (12.18)$$

Se definește impulsul total al rigidului față de reperul T_1 prin expresia:

$$\bar{H}_1 = \int_{(D)} \bar{v}_1 dm \quad (12.19)$$

și ținând seama de (12.18) obținem:

$$\bar{H}_1 = \int_{(D)} (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}) dm = \bar{v}_0 \int_{(D)} dm + \bar{\omega} \times \int_{(D)} \bar{r} dm$$

Ținând seama de faptul că $M = \int_{(D)} dm$ și de relația (12.12): $\int_{(D)} \bar{r} dm = M\bar{\rho}$ rezultă:

$$\bar{H}_1 = M\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times M\bar{\rho}_c = M(\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\rho}) \quad (12.20)$$

Observații

1. Dacă originea O a reperului T coincide cu centrul de masă al corpului ($O \equiv C$, $\bar{\rho}_1 = \bar{r}_0$; $\bar{\rho} = 0$) atunci: $\bar{v}_0 = \dot{\bar{\rho}}_1$ și relația (12.20) capătă forma:

$$\bar{H}_1 = M\dot{\bar{\rho}}_1 \quad (12.21)$$

2. În mișcarea de rotație cu punct fix ($O_1 \equiv O$, $\bar{v}_0 = 0$), relația (12.20) devine:

$$\bar{H}_1 = M(\bar{\omega} \times \bar{\rho}) \quad (12.22)$$

Dacă punctul fix coincide cu centrul de masă al corpului ($O \equiv C$), atunci avem evident: $\bar{H}_1 = 0$.

12.2.3. Teorema impulsului

Să presupunem că mișcarea sistemului de puncte materiale se studiază în raport cu reperul fix $T_1(O_1x_1y_1z_1)$. Derivând în raport cu timpul expresia impulsului (12.15) față de acest reper, obținem:

$$\dot{\bar{H}}_1 = \frac{d\bar{H}_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_{i_1} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\bar{v}_{i_1}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_{i_1}. \quad (12.23)$$

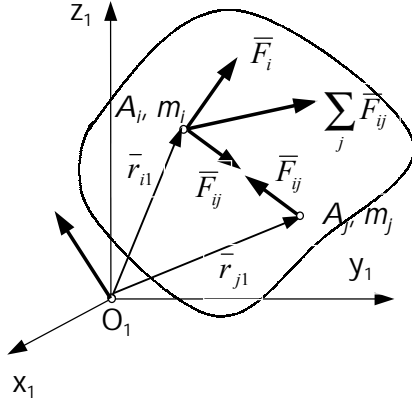


Fig. 12.6

Principiul fundamental al dinamicii pentru un punct A_i (fig. 12.6) se scrie:

$$m_i \bar{a}_{i_1} = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

și însumând aceste relații, pentru întregul sistem, se obține:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_{i_1} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} \quad (12.24)$$

și deoarece din (12.4) rezultanta forțelor interioare este nulă: $\bar{R}^{int} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} = 0$

relația (12.24) devine:
$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_{i_1} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (12.25)$$

sau, ținând seama de relația (12.23) și că $\sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ este rezultanta forțelor exterioare (date și de legătură) \bar{R} , care acționează asupra sistemului, avem:

$$\dot{\bar{H}}_1 = \bar{R}, \quad \text{unde:} \quad \bar{R} = \bar{R}^a + \bar{R}^{(leg)} \quad (12.26)$$

Relația (12.26) reprezintă **teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale** și se enunță astfel: “derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de puncte materiale este egală cu rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra sistemului”.

Dacă se derivează expresia (12.21) a impulsului exprimat în funcție de vectorul de poziție al centrului maselor ($\bar{H}_1 = M\dot{\bar{\rho}}_1$) se obține:

$$\dot{\bar{H}}_1 = \frac{d\bar{H}_1}{dt} = \frac{d}{dt} (M\dot{\bar{\rho}}_1) = M\ddot{\bar{\rho}}_1 = M\bar{a}_c, \quad (12.27)$$

unde $\ddot{\bar{\rho}}_1 = \bar{a}_c$ este accelerația centrului maselor sistemului, rezultă:

$$M\ddot{\bar{\rho}}_1 = \bar{R}, \quad (12.28)$$

adică **teorema impulsului sub forma echivalentă a teoremei mișcării centrului maselor**: “centrul maselor unui sistem de puncte materiale are aceeași mișcare ca și un punct material care ar avea o masă egală cu masa sistemului și asupra căruia ar acționa o forță egală cu rezultanta forțelor exterioare”.

În cazul unui sistem izolat (asupra căruia nu acționează nici o forță):
 $\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0$, atunci conform (12.28) $\dot{\bar{H}}_1 = 0$ și rezultă:

$$\bar{H}_1 = \bar{C} \text{ (constant) } \text{ sau } M\dot{\bar{p}}_1 = \bar{C} \quad (12.29)$$

adică **teorema conservării impulsului** cu următorul enunț:

“în cazul unui sistem izolat de puncte materiale, impulsul total se conservă în timp, sau tot timpul mișcării impulsul rămâne constant”.

Sunt situații când se conservă numai o componentă (după o axă) a impulsului, așa cum am văzut și în cazul unui punct material.

12.3. Teorema momentului cinetic.

12.3.1. Momentul cinetic total al unui sistem de puncte.

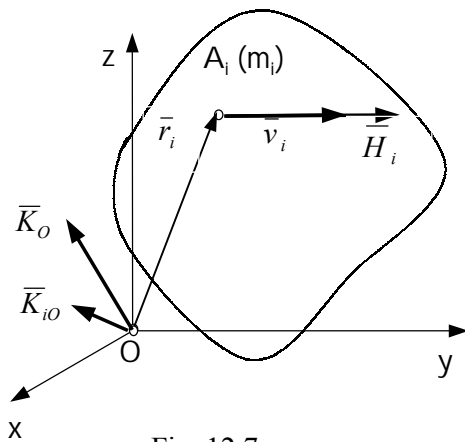


Fig. 12.7

Momentul cinetic total al unui sistem de puncte materiale A_i de mase m_i , vectori de poziție \bar{r}_i și viteze $\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \dot{\bar{r}}_i$, $i=1,2,\dots,n$ în raport cu un punct O (fig.12.7), este suma momentelor impulsurilor tuturor punctelor în raport cu punctul O.

Pentru un punct A_i , momentul cinetic față de O se scrie (fig.12.7):

$$\bar{K}_{iO} = \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \bar{r}_i \times \bar{H}_i \quad (12.30)$$

Momentul cinetic total (pentru întregul sistem de puncte) în raport cu punctul O este:

$$\bar{K}_O = \sum_{i=1}^n \bar{K}_{iO} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i. \quad (12.31)$$

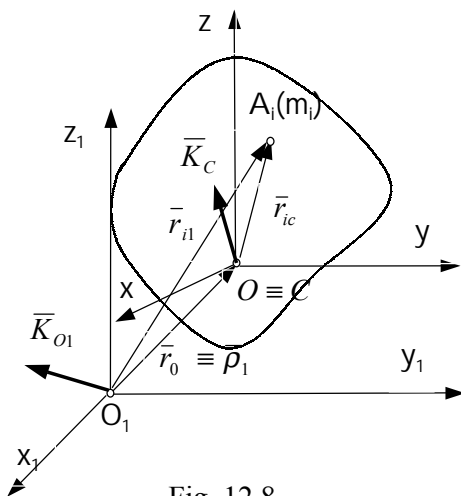


Fig. 12.8

Se poate arăta că momentul cinetic total este o mărime vectorială care depinde de reperul în raport cu care se calculează, deci este un vector legat. Într-adevăr, să considerăm un triedru fix $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ și unul mobil $T(Oxyz)$ cu originea în centrul de masă al sistemului ($O \equiv C$) în mișcare de translație față de T_1 (fig. 12.8).

Conform definiției, momentul cinetic total al sistemului de puncte în raport cu centrul de masă C (originea reperului mobil) se scrie:

$$\bar{K}_C = \sum_{i=1}^n \bar{r}_{iC} \times m_i \bar{v}_{iC}, \quad (12.32)$$

unde: $\bar{v}_{iC} = \frac{d\bar{r}_{iC}}{dt} = \dot{\bar{r}}_{iC}$ este viteza relativă în raport cu reperul mobil T .

Momentul cinetic total al sistemului de puncte, față de punctul O_1 este:

$$\bar{K}_{O_1} = \sum \bar{r}_{i1} \times m_i \bar{v}_{i1} \quad (12.33)$$

unde dacă se înlocuiesc: $\bar{r}_{i1} = \bar{\rho}_1 + \bar{r}_{iC}$; $\bar{v}_{i1} = \dot{\bar{\rho}}_1 + \bar{v}_{iC}$ (12.34)

și ținând seama de formulele (12.32) obținem:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{O_1} &= \sum_{i=1}^n (\bar{\rho}_1 + \bar{r}_{iC}) \times m_i (\dot{\bar{\rho}}_1 + \bar{v}_{iC}) \\ \bar{K}_{O_1} &= \bar{\rho}_1 \times \dot{\bar{\rho}}_1 \sum m_i + \bar{\rho}_1 \times \sum m_i \bar{v}_{iC} + \sum \bar{r}_{iC} \times m_i \bar{v}_{iC} + (\sum m_i \bar{r}_{iC}) \times \dot{\bar{\rho}}_1. \end{aligned}$$

Conform notațiilor adoptate anterior și ținând seama de relațiile evidente:

$$\sum m_i \bar{r}_{iC} = 0, \quad \sum m_i \bar{v}_{iC} = \bar{H}_C = 0, \quad \sum m_i = M,$$

rezultă: $\bar{K}_{O_1} = \bar{K}_C + \bar{\rho}_1 \times M \dot{\bar{\rho}}_1$ (12.35)

adică **prima teoremă de tip Koenig**: “momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale în raport cu un punct fix O_1 este egal cu suma dintre momentul cinetic în mișcarea relativă a sistemului în raport cu centrul maselor C și momentul cinetic al centrului maselor considerat ca un punct material în care este concentrată masa întregului sistem”.

12.3.2. Momentul cinetic în cazul unor mișcări particulare

În cazul rigidului, momentul cinetic în raport cu originea reperului fix T_1 se definește prin relația:

$$\bar{K}_1 = \bar{K}_{O_1} = \int_{(D)} \bar{r}_1 \times \bar{v}_1 dm \quad (12.36)$$

integrala referindu-se la întregul domeniu (D) ocupat de corp.

Se observă că în acest caz că momentul cinetic \bar{K}_1 depinde de felul mișcării, în funcție de expresia vitezei \bar{v}_1 a rigidului care este diferită de la un tip de mișcare la altul, așa cum s-a arătat la cinematica rigidului.

a. Momentul cinetic în cazul mișcării de translație a rigidului

Specific acestei mișcări este faptul că în orice moment toate punctele rigidului au aceeași viteză, adică $\bar{v}_1 = \bar{v}_C = \dot{\bar{\rho}}_1$, și avem: $\bar{r}_1 = \bar{\rho}_1 + \bar{r}_C$,

unde: $\bar{\rho}_1$ este vectorul de poziție al centrului maselor față de reperul T_1
 \bar{r}_C vectorul de poziție al punctului A , față de reperul mobil T având originea în centrul de greutate al sistemului ($O \equiv C$).

Momentul cinetic al rigidului față de O_I va fi:

$$\bar{K}_{O_I} = \int_{(D)} (\bar{\rho}_1 + \bar{r}_C) \times \dot{\bar{\rho}}_1 dm = \bar{\rho}_1 \times \dot{\bar{\rho}}_1 \int_{(D)} dm + \left(\int_{(D)} \bar{r}_C dm \right) \times \dot{\bar{\rho}}_1$$

și întrucât: $\int_{(D)} dm = M$ și din $O \equiv C \Rightarrow \int_{(D)} \bar{r}_C dm = \bar{\rho} = 0$

rezultă: $\bar{K}_{O_I} = \bar{\rho}_1 \times M \dot{\bar{\rho}}_1 = \bar{\rho}_1 \times \bar{H}_1.$ (12.37)

b. Momentul cinetic în cazul mișcării de rotație cu axă fixă

Specific acestei mișcări este faptul că viteza unui punct oarecare A al rigidului față de reperul T_I este:

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad \text{iar} \quad \bar{r}_1 = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Dacă se consideră cazul în care axa de rotație Oz coincide cu axa Oz_I , adică se poate scrie: $\bar{\omega} = \omega \bar{k}$, se obține:

$$\bar{K}_{O_I} = \int_{(D)} \bar{r}_1 \times \bar{v}_1 dm = \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm$$

și deoarece: $\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = -(\omega x z)\bar{i} - (\omega y z)\bar{j} + \omega(x^2 + y^2)\bar{k}$

se obține: $\bar{K}_{O_I} = -\omega \left(\int_{(D)} xz dm \right) \bar{i} - \omega \left(\int_{(D)} yz dm \right) \bar{j} + \omega \left[\int_{(D)} (x^2 + y^2) dm \right] \bar{k}$

Se observă că integralele reprezintă tocmai momentele de inerție centrifugale și axiale și deci se poate scrie:

$$\bar{K}_{O_I} = -J_{xz} \omega \bar{i} - J_{yz} \omega \bar{j} + J_z \omega \bar{k}. \quad (12.38)$$

Dacă rigidul este un corp de revoluție, axa de revoluție fiind axă de simetrie și dacă se alege această axă să coincidă cu axa Oz , a reperului mobil T atunci avem: $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$ și rezultă:

$$\bar{K}_1 = J_z \omega \bar{k} \quad \text{sau} \quad K_{1z} = J_z \omega. \quad (12.39)$$

Exemplu:

Se consideră un disc omogen de rază R și masă M , care se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale de simetrie. Se cere să se afle momentul cinetic față de axa de simetrie $Oz \equiv Oz_I$.

Rezolvare:

Deoarece $J_z = J_0 = \frac{MR^2}{2}$ se obține: $K_{O_I} = K_O = K_z = \frac{MR^2}{2} \omega.$

c. Momentul cinetic în cazul mișcării rigidului cu punct fix

Specific acestei mișcări este faptul că vectorul de poziție al unui punct oarecare A al rigidului față de reperul T și T_I este același: $\vec{r}_1 = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ și $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$ deci:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}$$

Expresia momentului cinetic față de O_1 , în acest caz este:

$$\vec{K}_{O_1} = \vec{K}_1 = \int_{(D)} \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 dm$$

$$\vec{K}_1 = \int_{(D)} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times [(\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}] dm$$

$$\text{sau : } \vec{K}_1 = K_{1x}\vec{i} + K_{1y}\vec{j} + K_{1z}\vec{k} \quad \text{unde:} \quad (12.40)$$

$$K_{1x} = \int [(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z] dm = J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z$$

$$K_{1y} = \int [-yx\omega_x + (z^2 + x^2)\omega_y - zy\omega_z] dm = -J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{zy}\omega_z \quad (12.41)$$

$$K_{1z} = \int [-zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z] dm = -J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z$$

sau sub formă matricială:

$$\begin{Bmatrix} K_{1x} \\ K_{1y} \\ K_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (12.42)$$

Dacă axele Ox , Oy , Oz ale reperului mobil solidar cu rigidul, sunt alese astfel încât să fie axe principale de inerție în raport cu $O_I=O$, atunci momentele de inerție centrifugale sunt nule și se obține relația matricială:

$$\begin{Bmatrix} K_{1x} \\ K_{1y} \\ K_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (12.43)$$

$$\text{sau expresia analitică: } \vec{K}_1 = J_1\omega_x\vec{i} + J_2\omega_y\vec{j} + J_3\omega_z\vec{k} \quad (12.44)$$

d. Momentul cinetic în cazul mișcării plan-paralele

Se consideră această mișcare a rigidului ca o suprapunere de două mișcări: una de rotație în jurul unei axe ce trece prin centrul maselor și care este perpendiculară pe planul fix, și una de translație a centrului maselor C .

Se aplică în acest caz prima formulă de tip Koenig:

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_C + \vec{\rho}_1 \times M\dot{\vec{\rho}}_1 = J_{zc}\omega\vec{k} + \vec{\rho}_1 \times M\dot{\vec{\rho}}_1 \quad (12.45)$$

12.3.3. Teorema momentului cinetic

Se consideră reperul fix T_1 (fig. 12.9) la care se raportează mișcarea sistemului, față de care momentul cinetic se scrie:

$$\bar{K}_{O_1} = \sum \bar{r}_{i1} \times m_i \bar{v}_{i1}.$$

Derivând această expresie în raport cu timpul se obține:

$$\dot{\bar{K}}_{O_1} = \frac{d}{dt} (\sum \bar{r}_{i1} \times m_i \bar{v}_{i1}) = \sum \dot{\bar{r}}_{i1} \times m_i \bar{v}_{i1} + \sum \bar{r}_{i1} \times m_i \dot{\bar{v}}_{i1}$$

și deoarece $\dot{\bar{r}}_{i1} = \bar{v}_{i1}$ și primul termen este nul:

$$\sum \dot{\bar{r}}_{i1} \times m_i \bar{v}_{i1} = \sum \bar{v}_{i1} \times m_i \bar{v}_{i1} = 0$$

$$\text{avem: } \dot{\bar{K}}_{O_1} = \sum \bar{r}_{i1} \times m_i \bar{a}_{i1} \quad (12.46)$$

unde $\bar{a}_{i1} = \dot{\bar{v}}_{i1}$ este accelerația absolută a punctului A_i .

Legea fundamentală a dinamicii pentru punctul A_i care se scrie:

$$m_i \bar{a}_{i1} = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij}, \quad i=1,2,\dots,n$$

Dacă se înmulțește vectorial la stânga cu \bar{r}_{i1} și se însumează membru cu membru, se obține:

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_{i1} \times m_i \bar{a}_{i1} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_{i1} \times \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \left(\bar{r}_{i1} \times \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \bar{r}_{i1} \times \bar{F}_i \quad (12.47)$$

deoarece, în baza relației (12.5), momentul rezultat al forțelor interioare este nul:

$$\sum_{i=1}^n \left(\bar{r}_{i1} \times \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{r}_{i1} \times \bar{F}_{ij} = 0$$

Primul termen al sumei $\sum_{i=1}^n \bar{r}_{i1} \times \bar{F}_i$ este momentul rezultat al forțelor față de O_1 :

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_{i1} \times \bar{F}_i = \sum \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_i) = \bar{M}_{O_1}, \quad (12.48)$$

În aceste condiții relația (12.47) împreună cu relația (12.46) conduc la:

$$\dot{\bar{K}}_{O_1} = \bar{M}_{O_1}, \quad (12.49)$$

adică expresia **teoremei momentului cinetic** care se enunță astfel: “în cazul unui sistem de puncte materiale în mișcare, derivata în raport cu timpul a momentului cinetic, calculat față de un punct O_1 , este egală cu momentul rezultat al forțelor exterioare (active și de legătură) calculat în raport cu același punct O_1 ”.

Să arătăm că teorema momentului cinetic (12.49) păstrează aceeași formă dacă este aplicată mișcării relative a sistemului de puncte în raport cu centrul maselor, sau față de un reper T cu originea în centrul de masă al sistemului având axele paralele cu cele ale triedrului fix T_1 (fig.12.10).

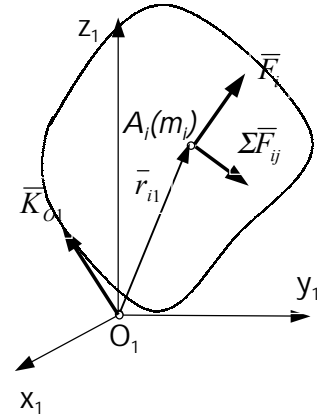


Fig. 12.9

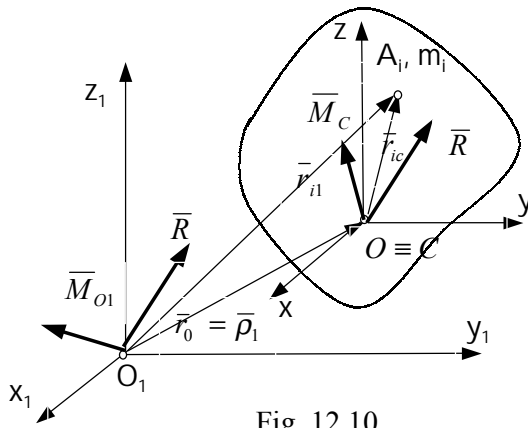


Fig. 12.10

Cu alte cuvinte, se afirmă că în cazul reperelor inerțiale relația (12.49) este riguros adevărată.

Într-adevăr, derivând în raport cu timpul relația (12.35):

$$\bar{K}_{o_1} = \bar{K}_C + \bar{\rho}_1 \times M\dot{\bar{\rho}}_1$$

obținem:

$$\dot{\bar{K}}_{o_1} = \dot{\bar{K}}_C + \dot{\bar{\rho}}_1 \times M\dot{\bar{\rho}}_1 + \bar{\rho}_1 \times M\ddot{\bar{\rho}}_1$$

și ținând seama că:

$$\dot{\bar{K}}_C = \frac{d\bar{K}_C}{dt} = \frac{\partial \bar{K}_C}{\partial t}, \text{ deoarece } \bar{\omega} = 0; \quad \dot{\bar{\rho}}_1 \times M\dot{\bar{\rho}}_1 = 0; \quad M\ddot{\bar{\rho}}_1 = \bar{R}$$

se obține: $\dot{\bar{K}}_1 = \dot{\bar{K}}_C + \dot{\bar{\rho}}_1 \times \bar{R}. \quad (12.50)$

Formula pentru schimbarea polului de reducere a unui sistem de forțe, este:

$$\bar{M}_{o_1} = \bar{M}_C + \overline{O_1C} \times \bar{R} = \bar{M}_C + \bar{\rho}_1 \times \bar{R}. \quad (12.51)$$

Înlocuind relațiile (12.50) și (12.51) în relația (12.49) se obține:

$$\dot{\bar{K}}_C = \bar{M}_C \quad (12.52)$$

adică **teorema momentului cinetic față de centrul maselor** cu următorul enunț: “în orice moment al mișcării unui sistem de puncte față de un reper fix T_1 , derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total al sistemului, calculat față de centrul maselor, este egală cu momentul rezultat al forțelor exterioare calculat față de același punct”

Observații:

1. Se remarcă din aspectul relațiilor (12.49) și (12.52), faptul că teorema momentului cinetic scrisă față de un reper fix T_1 și teorema momentului cinetic scrisă față de un reper mobil T , paralel cu cel fix, având originea în centrul maselor ($O=C$) au aceeași formă;
2. Momentul forțelor exterioare se poate scrie:

$$\bar{M}_C = \sum_{i=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_i^{ext}) = \sum \bar{M}_C(\bar{F}_i^a) + \sum \bar{M}_C(\bar{F}_i^{leg}) = \bar{M}_C^a + \bar{M}_C^{leg} \quad (12.53)$$

În cazul unui sistem izolat de puncte materiale $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_{o_1} = \bar{M}_C = 0$, rezultă:

$$\dot{\bar{K}}_{o_1} = 0 \text{ și deci (12.49) devine: } \bar{K}_{o_1} = \bar{C} \quad (12.54)$$

această relație exprimă **teorema conservării momentului cinetic** și are următorul enunț: “momentul cinetic total în cazul unui sistem izolat de puncte materiale se conservă”.

Pe de altă parte relația (12.54) reprezintă o *integrală primă* a sistemului de ecuații diferențiale (12.7). Se poate obține o integrală primă și în cazul când momentul resultant al forțelor exterioare în raport numai cu o axă este nul. Fie această axă este Oz, atunci vom avea integrala primă:

$$K_{Iz} = C. \quad (12.55)$$

S-a arătat în Capitolul 8 că în cazul punctului material o relație de forma (12.55) poate fi considerată ca o relație de conservare a vitezei areolare Ω în mișcarea proiecției punctului în planul xOy. Ținând seama că pentru un singur punct material avem: $K_z = m \Omega$, rezultă că în cazul când momentul resultant al forțelor exterioare în raport cu o axă este nul, avem:

$$\sum m_i \Omega_i = C, \quad (12.56)$$

adică, suma produselor dintre masele punctelor materiale și vitezelor areolare ale proiecțiilor acestor puncte într-un plan normal pe axă rămâne constantă.

Aplicație

Se cere să se determine legea de mișcare a unui disc (o roată omogenă) de rază R și masă M care se rotește în jurul axei sale de simetrie, sub acțiunea unui cuplu de moment constant M_0 (fig.12.11).

Rezolvare:

Aplicând teorema momentului cinetic, avem:

$$\dot{\bar{K}}_O = \bar{M}_O, \quad \text{unde} : K_O = K_\Delta = K_{Oz} = J_O \omega = \frac{MR^2}{2} \dot{\varphi}$$

$$\text{sau: } \dot{K}_{Oz} = \frac{MR^2}{2} \ddot{\varphi},$$

$$\text{iar: } M_O = M_{Oz} = N.$$

Prin urmare, teorema momentului cinetic conduce la ecuația diferențială:

$$\frac{MR^2}{2} \ddot{\varphi} = M_O, \quad \text{sau} \quad \ddot{\varphi} = \frac{2M_O}{MR^2}.$$

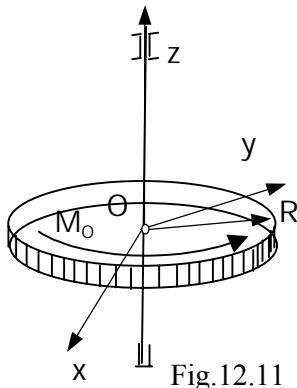


Fig.12.11

Integrând de două ori și punând condițiile inițiale:

$$\text{la } t = 0: \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$$

se obține legea de mișcare a discului:

$$\varphi = \frac{M_O}{MR^2} t^2.$$

12.4. Energia cinetică totală. Lucrul mecanic.

Teorema energiei cinetice

12.4.1. Energia cinetică totală a unui sistem de puncte

Energia cinetică totală a unui sistem de puncte materiale A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de mase m_i și viteze \bar{v}_i față de un reper oarecare, se definește ca suma energiilor cinetice E_i ale tuturor punctelor sistemului:

$$E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (12.57)$$

adică:
$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2. \quad (12.58)$$

Se observă că E este o mărime scalară și totdeauna pozitivă.

Energia cinetică totală a unui sistem de puncte *în raport cu un reper fix* T_1

este:
$$E_1 = \frac{1}{2} \sum m_i v_{i1}^2, \quad (12.59)$$

Energia cinetică totală a unui sistem de puncte *în raport cu un reper mobil* T cu originea în centrul maselor sistemului ($O \equiv C$) cu axele paralele cu cele ale reperului fix T_1 este dată de:

$$E_C = \frac{1}{2} \sum m_i v_{iC}^2. \quad (12.60)$$

unde \bar{v}_{iC} este viteza punctului A_i față de reperul T având originea în centrul maselor.

Deoarece din (12.34) $\bar{v}_{i1} = \dot{\bar{\rho}}_1 + \bar{v}_{iC}$, rezultă că energia cinetică totală a unui sistem de puncte se scrie:

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{\bar{\rho}}_1 + \bar{v}_{iC})^2 = \frac{1}{2} \dot{\bar{\rho}}_1^2 \sum m_i + \dot{\bar{\rho}}_1 \sum m_i \bar{v}_{iC} + \frac{1}{2} \sum m_i \bar{v}_{iC}^2,$$

unde ținând seama de (12.60) și de (12.17): $\sum m_i \bar{v}_{iC} = \bar{H}_C = 0$, $\sum m_i = M$, rezultă:

$$E_1 = E_C + \frac{1}{2} M \dot{\bar{\rho}}_1^2, \quad (12.61)$$

adică **a II-a teoremă de tip Koenig**, având enunțul: “*energia cinetică a unui sistem de puncte materiale în mișcarea absolută, este egală cu suma dintre energia cinetică în mișcarea relativă față de centrul maselor și energia cinetică a centrului maselor în care se consideră concentrată întreaga masă a sistemului*”.

Pentru un solid rigid, energia cinetică totală corespunzătoare unui sistem discret (12.59) se exprimă sub formă de integrală pe întreg domeniul (D) ocupat de corp:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_{(D)} v_1^2 dm. \quad (12.62)$$

Deoarece în cazul rigidului expresia vitezei depinde de tipul mișcării, vor rezulta și pentru energia cinetică totală, diferite expresii specifice fiecărui tip de mișcare.

12.4.2. Energia cinetică totală în cazul unor mișcări particulare ale rigidului

a. Energia cinetică în cazul mișcării de translație

În cazul acestei mișcări toate punctele rigidului au aceeași viteză, aceasta fiind egală cu viteza centrului de masă, adică: $\vec{v}_1 = \vec{v}_c = \dot{\vec{\rho}}_1$ și deci:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_{(D)} \dot{\vec{\rho}}_1^2 dm = \frac{1}{2} \dot{\vec{\rho}}_1^2 \int_{(D)} dm = \frac{1}{2} M \dot{\vec{\rho}}_1^2. \quad (12.63)$$

Rezultă că energia cinetică în cazul acestei mișcări se calculează ca energia unui punct (care este centrul de masă al rigidului) în care se presupune concentrată întreaga masă a rigidului și care se deplasează cu viteza centrului de masă.

b. Energia cinetică în cazul mișcării de rotație cu axă fixă

Se știe de la cinematica rigidului cu axă fixă, că viteza unui punct oarecare A față de reperul T_1 (pentru simplitatea calculelor se alege: $O \equiv O_1$, $Oz = O_1z_1 =$ axă de rotație) este: $|\vec{v}_1| = \omega \cdot d_z$, unde $d_z = \sqrt{x^2 + y^2}$ este distanța de la punctul A la axa de rotație Oz .

În acest caz, energia cinetică totală se scrie:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_{(D)} v_1^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{(D)} (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (12.64)$$

unde $J_z = J_\Delta = \int_{(D)} (x^2 + y^2) dm$ este momentul de inerție față de axa Oz .

c. Energia cinetică în cazul mișcării de rotație cu punct fix

Se consideră că punctul fix coincide cu originile celor două sisteme T_1 și T : $O_1=O$; expresia distribuției de viteze în acest caz este:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 = (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k} \quad (12.65)$$

Prin urmare energia cinetică totală a rigidului față de T_1 va fi:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_{(D)} v_1^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(D)} [(\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2] dm$$

sau

$$E_1 = \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_z \omega_z^2 - J_{xy} \omega_x \omega_y - J_{yz} \omega_y \omega_z - J_{zx} \omega_z \omega_x \quad (12.66)$$

Energia cinetică totală a rigidului față de T_1 atunci când axele sistemului mobil sunt axe principale de inerție va fi:

$$E_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_z^2 \quad (12.67)$$

În cazul particular, când corpul se rotește în jurul unei axe Oz ($\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega$), energia cinetică este cea dedusă la mișcarea de rotație:

$$E_1 = \frac{1}{2} J_z \omega_z^2 \quad (12.68)$$

Dacă se ține seama de a doua formulă de tip Koenig (12.61), energia cinetică pentru cazul general al mișcării unui rigid, alegând axele sistemului mobil ca axe principale și centrale de inerție se scrie sub forma:

$$E_1 = E_C + \frac{1}{2} M \dot{\rho}_1^2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_z^2 + \frac{1}{2} M \dot{\rho}_1^2 \quad (12.69)$$

c) Energia cinetică în cazul mișcării plan-paralele

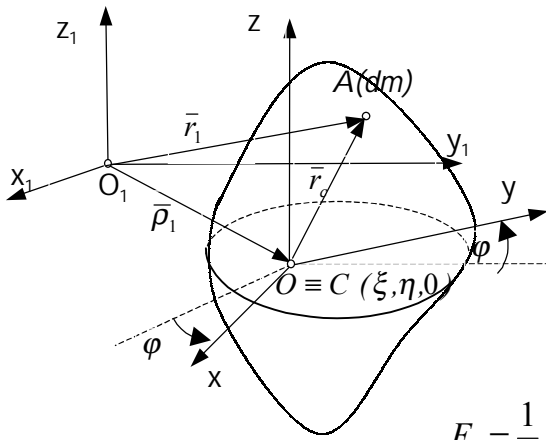


Fig. 12.12

Dacă se alege (pentru simplitatea relațiilor) originea reperului mobil T în centrul masei ($O \equiv C, \bar{r}_0 = \bar{\rho}_1$ și $\bar{r} = \bar{r}_C$) și planul fix să coincidă cu planul xOy (fig.12.12), în aceste condiții viteza are expresia:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_C$$

și deoarece $\bar{v}_0 = \bar{v}_C = \dot{\bar{\rho}}_1$, viteza față de T_1 se scrie: $\bar{v}_1 = \dot{\bar{\rho}}_1 + \bar{\omega} \times \bar{r}_C$

și prin urmare:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_{(D)} v_1^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(D)} (\dot{\bar{\rho}}_1 + \bar{\omega} \times \bar{r}_C)^2 dm$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \dot{\bar{\rho}}_1^2 \int_{(D)} dm + \dot{\bar{\rho}}_1 (\bar{\omega} \times \int_{(D)} \bar{r}_C dm) + \frac{1}{2} \int_{(D)} (\bar{\omega} \times \bar{r}_C)^2 dm$$

și deoarece: $\int_{(D)} \bar{r}_C dm = 0, \int_{(D)} dm = M$ avem energia cinetică pentru acest caz:

$$E_1 = \frac{1}{2} M \dot{\bar{\rho}}_1^2 + \frac{1}{2} \int_{(D)} (\bar{\omega} \times \bar{r}_C)^2 dm. \quad (12.70)$$

Întrucât: $\bar{\omega} = \omega \bar{k}, \quad \bar{r}_C = x_C \bar{i} + y_C \bar{j} + z_C \bar{k}$

$$\text{și:} \quad (\bar{\omega} \times \bar{r}_C)^2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}^2 = \omega^2 (x_C^2 + y_C^2),$$

$$\text{adică:} \quad \int_{(D)} (\bar{\omega} \times \bar{r}_C)^2 dm = \omega^2 \int_{(D)} (x_C^2 + y_C^2) dm = \omega^2 J_{Cz}$$

și prin urmare, energia cinetică totală față de T_1 are expresia:

$$E_1 = \frac{1}{2} M \dot{\bar{\rho}}_1^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2. \quad (12.71)$$

unde: $\frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2$ este energia cinetică în mișcarea relativă față de centrul maselor, J_{Cz} este momentul de inerție față de axa Oz care trece prin centrul maselor C.

Formula (12.71) reprezintă **formula lui Koenig în cazul particular al mișcării plan paralele**. În aplicațiile referitoare la mișcarea plan-paralelă se folosește centrul instantaneu de rotație I și atunci este necesar să se exprime E_1 în funcție de momentul de inerție al rigidului față de axa instantanee de rotație ce trece prin I .

Conform formulei lui Steiner: $J_{Iz} = J_{Cz} + M(IC)^2$ sau: $J_{Cz} = J_{Iz} - M(IC)^2$

Din cinematica mișcării plan-paralele avem:

$$|\bar{v}_C| = |\dot{\bar{\rho}}_1| = \omega(IC) \quad \text{sau} \quad (IC) = \frac{\dot{\rho}_1}{\omega}$$

și relația (12.71) devine: $E_1 = \frac{1}{2}J_{Iz}\omega^2$ (12.72)

Formula (12.72) conduce la concluzia că în mișcarea plan-paralelă se poate calcula energia cinetică ca și în cazul mișcării de rotație a rigidului în jurul unei axe care trece prin centrul instantaneu de rotație I , corespunzătoare aceluși moment.

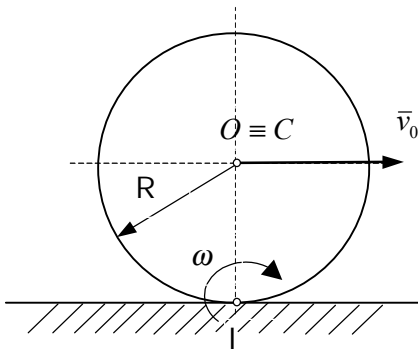


Fig. 12.13

Aplicație

Să se găsească energia cinetică a unui disc de rază R și masă M , care se rostogolește fără să alunece pe un plan orizontal cu viteza centrului său constantă: $\bar{v}_C = \dot{\bar{\rho}}_1 = \bar{v}_0$ (fig.12.13).

Rezolvare

Viteza unghiulară fiind aceeași în orice punct al discului: $\omega = \omega_C = \omega_I$; $\omega = v_0 / R$

$$J_{Cz} = \frac{MR^2}{2} \quad \text{și} \quad J_{Iz} = \frac{3}{2}MR^2,$$

astfel încât formula (12.71) conduce la:

$$E_1 = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv_0^2.$$

În mod analog, aplicând formula (12.72) se obține același rezultat:

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \cdot MR^2 \cdot \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv_0^2.$$

12.4.3. Lucrul mecanic elementar al forțelor aplicate unui sistem de puncte în mișcare. Proprietăți

Fiind dat un sistem de puncte materiale A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), asupra unui punct al sistemului acționează atât forțele exterioare \bar{F}_i cât și forțele interioare $\sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij}$

(fig. 12.14), având rezultanta: $\bar{R}_i = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} = \bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{int}$. (12.73)

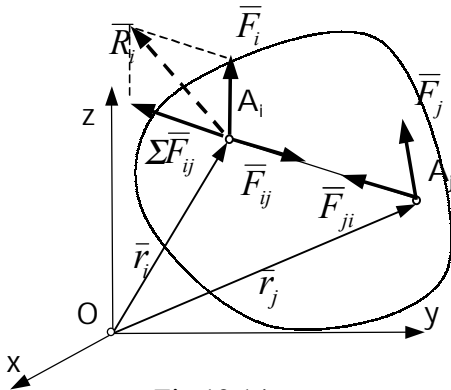


Fig.12.14

Conform definiției date în capitolul 8, lucrul mecanic elementar efectuat de forțele având rezultanta \bar{R}_i care acționează asupra punctului A_i , este dat de produsul scalar dintre forța \bar{R}_i și deplasarea elementară $d\bar{r}_i$ corespunzătoare punctului de aplicație al acestor forțe în intervalul de timp elementar dt , adică:

$$dL_i = \bar{R}_i \cdot d\bar{r}_i = \bar{R}_i \cdot \bar{v}_i dt \quad (12.74)$$

unde $d\bar{r}_i = \bar{v}_i dt$, \bar{v}_i fiind viteza punctului.

Lucrul mecanic elementar total al forțelor aplicate întregului sistem de puncte, calculat față de un reper oarecare T ($Oxyz$), este egal cu suma lucrurilor mecanice elementare, efectuate de forțele aplicate diferitelor puncte ale sistemului în raport cu reperul considerat, deci:

$$dL = \sum_{i=1}^n dL_i = \sum \bar{R}_i \cdot d\bar{r}_i = \sum \bar{R}_i \cdot \bar{v}_i dt. \quad (12.75)$$

Ținând seama de (12.73) avem:

$$dL = \sum \bar{R}_i \cdot d\bar{r}_i = \sum (\bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{int}) \cdot d\bar{r}_i = \sum \bar{F}_i^{ext} \cdot d\bar{r}_i + \sum \bar{F}_i^{int} \cdot d\bar{r}_i$$

$$\text{sau făcând notațiile: } dL^{ext} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{ext} \cdot d\bar{r}_i = \sum \bar{F}_i^{ext} \cdot \bar{v}_i dt \quad (12.76)$$

$$dL^{int} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{int} \cdot d\bar{r}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_i = \sum \sum \bar{F}_{ij} \cdot \bar{v}_i dt \quad (12.77)$$

$$\text{rezultă: } dL = dL^{ext} + dL^{int}, \quad (12.78)$$

adică “*lucrul mecanic elementar total este egal cu suma dintre lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și lucrul mecanic elementar al forțelor interioare aplicate sistemului*”.

Se observă că în expresia generală a lucrului mecanic elementar total apar forțele interioare. În continuare vor fi prezentate două proprietăți referitoare la lucrul mecanic elementar al forțelor interioare și al forțelor exterioare:

a) *lucrul mecanic elementar al forțelor interioare nu depinde de reperul de față de care se studiază mișcarea.*

Într-adevăr, fie reperul T ($Oxyz$) și reperul T' ($O'x'y'z'$) în mișcare față de T (fig.12.15). Avem evident: $\bar{r}_i = \bar{r}_0 + \bar{r}'_i$, deci

$$d\bar{r}_i = d\bar{r}_0 + d\bar{r}'_i = d\bar{r}_0 + \frac{d\bar{r}'_i}{dt} dt$$

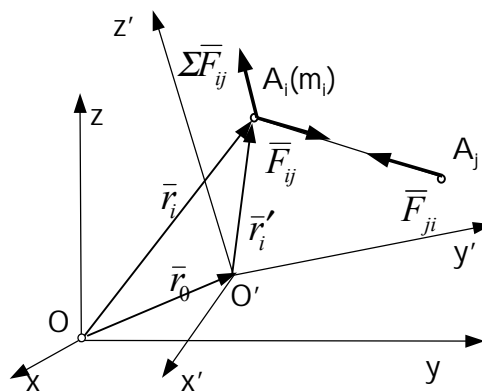
$$d\bar{r}_i = d\bar{r}_0 + \left(\frac{\partial \bar{r}'_i}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}'_i \right) dt$$

unde $\bar{\omega}$ este vectorul viteză unghiulară

al reperului T' față de reperul T , iar $\frac{\partial \bar{r}'_i}{\partial t} = \bar{v}'_i$

este viteza (relativă) a punctului A_i față de reperul T' .

Fig.12.15



Lucrul mecanic elementar al forțelor interioare, calculat față de T , va fi deci:

$$\begin{aligned} dL^{int} &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{int} \cdot d\bar{r}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{int} [d\bar{r}_0 + (\bar{v}'_i + \bar{\omega} \times \bar{r}'_i) dt] = \\ &= d\bar{r}_0 \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{int} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{int} \cdot \bar{v}'_i dt + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{int} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}'_i) dt. \end{aligned}$$

Se observă că $\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{int} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} = 0$, și prin efectuarea a două permutări circulare în produsul mixt $\bar{F}_i^{int} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}'_i)$, se obține:

$$\bar{F}_i^{int} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}'_i) = -\bar{\omega} \cdot (\bar{F}_i^{int} \times \bar{r}'_i) = \bar{\omega} \cdot (\bar{r}'_i \times \bar{F}_i^{int})$$

și obținem deci rezultatul:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{int} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}'_i) = \bar{\omega} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \bar{r}'_i \times \bar{F}_i^{int} \right) = \bar{\omega} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \bar{r}'_i \times \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} \right) = 0$$

deoarece: $\sum_{i=1}^n \left(\bar{r}'_i \times \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} \right) = 0$, rezultă: $dL^{int} = (dL')^{int}$.

Deci, lucrul mecanic elementar al forțelor interioare nu depinde de sistemul de axe față de care este calculat, ceea ce se mai poate scrie și astfel:

$$dL^{int} = dL_1^{int} = dL_C^{int}. \quad (12.79)$$

b) Să arătăm în continuare, *modul în care lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare depinde de reperul față de care se calculează*. Pentru aceasta să considerăm două repere: unul fix $T_1 (O_1, x_1, y_1, z_1)$ și altul mobil $T (O, x, y, z)$ în mișcare de translație față de primul reper, și cu originea în centrul maselor sistemului (fig.12.16).

Conform definiției avem:

$$dL_1^{ext} = \sum \bar{F}_i^{ext} \cdot d\bar{r}_{i1} = \sum \bar{F}_i^{ext} \cdot \bar{v}_{i1} dt$$

$$dL_C^{ext} = \sum \bar{F}_i^{ext} \cdot d\bar{r}_{ic} = \sum \bar{F}_i^{ext} \cdot \bar{v}_{ic} dt$$

unde: $\bar{r}_{i1} = \bar{\rho}_1 + \bar{r}_{ic}$; $d\bar{r}_{i1} = d\bar{\rho}_1 + d\bar{r}_{ic}$

și prin urmare:

$$dL_1^{ext} = \sum \bar{F}_i^{ext} (d\bar{\rho}_1 + d\bar{r}_{ic})$$

$$dL_1^{ext} = \left(\sum \bar{F}_i^{ext} \right) \cdot d\bar{\rho}_1 + \sum \bar{F}_i^{ext} \cdot d\bar{r}_{ic}$$

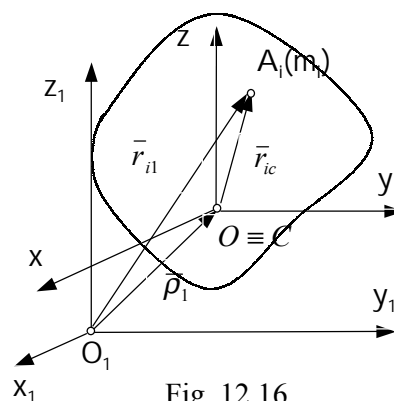


Fig. 12.16

$$\text{de unde rezultă: } dL_i^{\text{ext}} = dL_C^{\text{ext}} + \bar{R} \cdot d\bar{\rho}_1 \quad (12.80)$$

ceea ce arată următoarea proprietate: “lucrul mecanic elementar total al forțelor exterioare, calculat cu deplasările față de reperul fix T_1 este egal cu suma dintre lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare calculat cu deplasările relative față de centrul maselor și lucrul mecanic elementar al rezultantei forțelor exterioare $\bar{R} = \sum \bar{F}_i^{\text{ext}}$, presupusă aplicată în centrul maselor “.

Din cele arătate mai sus, adică ținând seama de formulele (12.78), (12.79) și (12.80):

$$dL_1 = dL_1^{\text{ext}} + dL_1^{\text{int}} = \bar{R} \cdot d\bar{\rho}_1 + dL_C^{\text{ext}} + dL_C^{\text{int}}$$

rezultă pentru lucrul mecanic elementar total al forțelor (exterioare și interioare) față de un reper fix T_1 , formula:

$$dL_1 = \bar{R} \cdot d\bar{\rho}_1 + dL_C. \quad (12.81)$$

12.4.4. Expresia lucrului mecanic elementar al forțelor interioare la modificarea distanțelor dinte puncte

Fie două puncte A_i și A_j ale sistemului care interacționează mecanic ($\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$, conform principiului acțiunii și reacțiunii) având vectorii de poziție \bar{r}_i respectiv \bar{r}_j (fig.12.17). Expresia lucrului mecanic elementar al forțelor \bar{F}_{ij} și \bar{F}_{ji} este:

$$dL_{ij} = \bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_i + \bar{F}_{ji} \cdot d\bar{r}_j = \bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_i - \bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_j = \bar{F}_{ij} \cdot (d\bar{r}_i - d\bar{r}_j)$$

unde dacă notăm $d\bar{r}_i - d\bar{r}_j = -d\bar{r}_{ij}$ (deoarece $\bar{r}_i - \bar{r}_j = -\overline{A_i A_j} = -\bar{r}_{ij}$)

lucrul mecanic elementar al forțelor F_{ij} și F_{ji} devine:

$$dL_{ij} = -\bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_{ij}. \quad (12.82)$$

Făcând notația

$$\bar{u}_{ij} = \text{vers } \overline{A_i A_j} = \text{vers } \bar{r}_{ij}$$

putem scrie relațiile:

$$\bar{r}_{ij} = r_{ij} \bar{u}_{ij}; \quad \bar{F}_{ij} = F_{ij} \bar{u}_{ij} \quad (12.83)$$

unde pentru versorul \bar{u}_{ij} sunt valabile relațiile:

$$\bar{u}_{ij} \cdot \bar{u}_{ij} = 1 \quad \text{și} \quad \bar{u}_{ij} \cdot d\bar{u}_{ij} = 0 \quad (12.84)$$

$$\text{iar: } d\bar{r}_{ij} = d(r_{ij} \cdot \bar{u}_{ij}) = dr_{ij} \cdot \bar{u}_{ij} + r_{ij} \cdot d\bar{u}_{ij}. \quad (12.85)$$

Înlocuind (12.83) și (12.85) în (12.82) și ținând seama de (12.84) se obține, pentru forțele interioare \bar{F}_{ij} și \bar{F}_{ji} , lucrul mecanic elementar:

$$dL_{ij} = -F_{ij} dr_{ij} \quad (12.86)$$

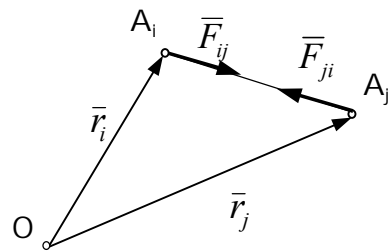


Fig.12.17

relație care exprimă faptul că: *lucrul mecanic elementar al forțelor interioare care se exercită între două puncte A_i și A_j este egal cu produsul dintre valoarea numerică a forței interioare (luată pozitiv sau negativ după cum forțele sunt repulsive sau atractive) și creșterea distanței dintre puncte.*

Însumând după indicii i și j se obține *lucrul mecanic elementar total al forțelor interioare* al unui sistem de puncte:

$$dL^{int} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ij} dr_{ij}. \quad (12.87)$$

În cazul sistemelor rigide de puncte materiale (nedeformabile), toate deplasările dr_{ij} sunt nule, ceea ce conduce la concluzia că lucrul mecanic elementar total al forțelor interioare în acest caz este nul:

$$dL^{int} = 0. \quad (12.88)$$

12.4.5. Lucrul mecanic elementar al forțelor aplicate unui rigid

Întrucât în paragraful anterior s-a arătat că pentru sistemele rigide $dL^{int} = 0$, rezultă că la aplicarea teoremei energiei cinetice pentru astfel de sisteme, în expresia lucrului mecanic se va ține seama numai de forțele exterioare.

Avem:

$$\begin{aligned} dL_1 &= dL_1^{ext} = \sum \bar{F}_i \bar{v}_i dt = \sum \bar{F}_i (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_i) dt = \\ &= [\bar{v}_0 \cdot (\sum \bar{F}_i) + \sum \bar{F}_i \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_i)] dt \end{aligned}$$

unde:

$$\sum \bar{F}_i \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \bar{\omega} \cdot (\sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \bar{\omega} \cdot (\sum \bar{M}_0(\bar{F}_i)) = \bar{\omega} \cdot \bar{M}_0$$

Dacă se notează cu: τ_o : $\bar{R} = \sum \bar{F}_i$; $\bar{M}_0 = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_i)$, torsorul de reducere în punctul O al forțelor exterioare ale sistemului, expresia lucrului mecanic elementar al forțelor exterioare aplicate unui rigid în mișcare capătă forma:

$$dL_1 = (\bar{R} \cdot \bar{v}_0 + \bar{M}_0 \cdot \bar{\omega}) dt. \quad (12.89)$$

Astfel în funcție de tipul mișcării, (12.89) are formele:

1. în mișcarea de translație (unde: $\bar{\omega} = 0$ și $\bar{v}_0 = \dot{\bar{p}}_1$, deoarece $O \equiv C$) rezultă:

$$dL_1 = \bar{R} \cdot \dot{\bar{p}}_1 dt; \quad (12.90)$$

2. în mișcarea de rotație (unde: $\bar{v}_0 = 0$) rezultă:

$$dL_1 = \bar{M}_0 \cdot \bar{\omega} dt; \quad (12.91)$$

3. în mișcarea plan paralelă (unde $O \equiv C$; $\bar{v}_0 = \dot{\bar{p}}_1$, $\bar{M}_0 = \bar{M}_C$) rezultă:

$$dL_1 = (\bar{R} \cdot \dot{\bar{p}}_1 + \bar{M}_C \cdot \bar{\omega}) dt. \quad (12.92)$$

12.4.6. Teorema energiei cinetice pentru sisteme de puncte materiale

În cazul un sistem de puncte materiale A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) energia cinetică față de reperul fix T_I este dată de formula (12.59):

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum m_i v_{i1}^2$$

Diferențiind această relație și grupând termenii în mod convenabil avem:

$$dE_1 = \frac{1}{2} d\left(\sum m_i \bar{v}_{i1}^2\right) = \frac{1}{2} \sum m_i d\bar{v}_{i1}^2 = \sum m_i \bar{v}_{i1} d\bar{v}_{i1} = \sum m_i \bar{v}_{i1} \dot{\bar{v}}_{i1} dt = \sum m_i \bar{a}_{i1} \bar{v}_{i1} dt$$

și deci rezultă:
$$dE_1 = \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_{i1} \cdot d\bar{r}_{i1}. \quad (12.93)$$

Ținând seama de relația (12.73):
$$\bar{R}_i = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} = \bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{int}$$

și de legea fundamentală a dinamicii scrisă pentru punctul A_i : $m_i \bar{a}_{i1} = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij}$

relația (12.93) devine:
$$dE_1 = \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i^{ext} + \bar{F}_i^{int}) \cdot d\bar{r}_{i1} = \sum \bar{F}_i^{ext} \cdot d\bar{r}_{i1} + \sum \bar{F}_i^{int} \cdot d\bar{r}_{i1}$$

de unde rezultă:

$$dE_1 = dL_1^{ext} + dL_1^{int} \quad (12.94)$$

adică **teorema energiei cinetice în cazul sistemelor de puncte materiale** care afirmă că: “diferențiala față de timp a energiei cinetice (în raport cu triedrul T_I) este egală cu suma dintre lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și lucrul mecanic elementar al forțelor interioare (calculate în raport cu același triedru)

Spre deosebire de celelalte teoreme generale (teorema impulsului și teorema momentului cinetic), în expresia teoremei energiei cinetice (12.94), apar și forțele interioare, pentru care lucrul mecanic elementar, în general nu este nul.

S-a arătat anterior că lucrul mecanic elementar al forțelor interioare *este nul* numai în cazul unui sistem rigid (nedeformabil).

Considerând expresia energiei cinetice (12.61) dată de teorema lui Koenig:

$$E_1 = E_c + \frac{1}{2} M \dot{\bar{p}}_1^2 \text{ și diferențiind în raport cu } t \text{ avem:}$$

$$dE_1 = dE_c + M \dot{\bar{p}}_1 \ddot{\bar{p}}_1 dt = dE_c + R \cdot \dot{\bar{p}}_1 dt;$$

deoarece : $M \ddot{\bar{p}}_1 = \bar{R}$, rezultă:
$$dE_1 = dE_c + \bar{R} \cdot d\bar{p}_1. \quad (12.95)$$

Pe de altă parte din relația (12.81) : $dL_1 = dL_c + \bar{R} \cdot d\bar{p}_1$ și înlocuind în (12.95) rezultă:

$$dE_c = dL_c, \quad (12.96)$$

unde :
$$dL_c = dL_c^{ext} + dL_c^{int}, \quad (12.97)$$

adică *teorema energiei cinetice față de centrul maselor sub formă diferențială* care se enunță: “*diferențiala în raport cu timpul a energiei cinetice a unui sistem de punte materiale, calculată față de centrul maselor sistemului este egală cu suma lucrurilor mecanice elementare ale forțelor exterioare și interioare calculate cu deplasările față de centrul maselor*”.

Observații

- 1) Teorema energiei cinetice (12.94) sau (12.96) furnizează o singură relație scalară sub forma diferențială ;
- 2) Se poate demonstra că ecuația dată de teorema energiei cinetice nu este independentă de ecuațiile date de celelalte două teoreme (a impulsului și a momentului cinetic);
- 3) Teorema energiei cinetice poate fi folosită singură pentru studiul mișcării rigidului dacă mișcarea acestuia depinde de un singur parametru, sau ca ecuație de verificare, după aplicarea primelor două teoreme.

Din aspectul relațiilor (12.94) și (12.96) rezultă că teorema energiei ca și teorema momentului cinetic , scrise față de T_1 sau T_C au aceeași formă :

$$dE = dL,$$

$$\text{unde: } dL = dL^{ext} + dL^{int} \quad (12.98)$$

Integrând (12.98) în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ se obține *teorema energiei cinetice sub formă finită*:

$$E_2 - E_1 = L_{12} \quad (12.99)$$

unde E_1 și E_2 reprezintă energiile cinetice ale sistemului material la momentul t_1 și respectiv t_2 ; iar L_{12} este lucrul mecanic efectuat în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ de forțele aplicate sistemului.

$$\text{Dar cum: } L_{12} = L_{12}^{ext} + L_{12}^{int}$$

$$\text{unde: } L_{12}^{ext} = \int_{t_1}^{t_2} dL^{ext}, \quad L_{12}^{int} = \int_{t_1}^{t_2} dL^{int}. \quad (12.100)$$

Integralele din (12.100) se pot efectua de obicei dacă dL^{ext} și dL^{int} sunt diferențiale totale, adică dacă există două funcții U^{ext} și U^{int} astfel încât $dU^{ext} = dL^{ext}$, $dU^{int} = dL^{int}$ să fie diferențiale totale exacte.

În acest caz avem:

$$L_{12}^{ext} = \int_{t_1}^{t_2} d(U^{ext}) = U_2^{ext} - U_1^{ext}; \quad (12.101)$$

$$L_{12}^{int} = \int_{t_1}^{t_2} d(U^{int}) = U_2^{int} - U_1^{int}$$

12.4.7. Teorema conservării energiei mecanice

Un sistem de puncte materiale A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) se numește *sistem conservativ* dacă forțele sale interioare, derivă dintr-o funcție de forță:

$$U = U(x_1, y_1, z_1, \dots; x_n, y_n, z_n)$$

adică:
$$F_{ix}^{int} = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad F_{iy}^{int} = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad F_{iz}^{int} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

sau:
$$dL^{int} = \sum (F_{ix}^{int} dx_i + F_{iy}^{int} dy_i + F_{iz}^{int} dz_i)$$

sau:
$$dL^{int} = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} dz_i \right).$$

Rezultă deci că lucrul mecanic al forțelor interioare este o diferențială totală:

$$dL^{int} = dU \quad (12.102)$$

În acest caz $L^{int} = U_2 - U_1$, iar ecuația (12.98) se poate scrie:

$$d(E - U) = dL^{ext} \quad (12.103)$$

Se introduc noțiunile de:

- *energie potențială* V , definită ca și în cazul punctului material:

$$V = -U \quad (12.104)$$

- *energie totală a sistemului* (numită *energie mecanică*) definită de:

$$E_m = E + V \quad (12.105)$$

În acest caz relația (12.103) devine:

$$dE_m = dL^{ext}$$

care în cazul unui sistem închis de puncte ($dL^{ext} = 0$) conduce la:

$$dE_m = 0 \quad \text{sau} \quad E_m = \text{const.} \quad (12.106)$$

adică expresia **teoremei conservării energiei mecanice**, care afirmă că: “în cazul unui sistem închis de puncte materiale la care forțele interioare sunt conservative, energia mecanică E_m se conservă”.

În realitate, nu toate forțele interioare sunt conservative. În cele mai multe dintre cazuri energia mecanică nu se conservă (de exemplu, în cazul forțelor interioare de frecare, care depind atât de poziția punctelor cât și de viteza lor variația energiei mecanice este negativă: $d(E + V) < 0$).

Câteva exemple de aplicare a teoremelor generale sunt date în capitolul 13.

CAPITOLUL 13

DINAMICA UNOR MIȘCĂRI PARTICULARE ALE RIGIDULUI

13.1. Generalități

Mișcarea unui solid rigid liber este cunoscută când s-a determinat variația în timp a celor șase parametri scalari geometrici ai mișcării, ce corespund celor șase grade de libertate cinematică ale solidului.

Acestea sunt șase funcții scalare de timp, care au fost introduse la capitolul 9:

- coordonatele originii triedrului mobil $T (Oxyz)$ față de triedrul fix $T_1 (O_1x_1y_1z_1)$.

$$x_0 = x_0(t), \quad y_0 = y_0(t), \quad z_0 = z_0(t) \quad (13.1)$$

- unghiurile lui Euler

$$\varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \psi = \psi(t) \quad (13.2)$$

Pentru determinarea acestor parametri dispunem de ecuațiile scalare furnizate de cele trei teoreme generale:

1. Teorema impulsului sau teorema mișcării centrului maselor (trei ecuații scalare):

$$\dot{\vec{H}}_1 = \vec{R} \quad \text{sau} \quad M\ddot{\vec{p}}_1 = \vec{R}. \quad (13.3)$$

2. Teorema momentului cinetic considerată față de originia reperului fix O_1 sau față de centrul de masă al rigidului C (trei ecuații scalare):

$$\dot{\vec{K}} = \vec{M}_{0_1} \quad \text{sau} \quad \dot{\vec{K}}_C = \vec{M}_C \quad (13.4)$$

3. Teorema energiei cinetice (o ecuație scalară):

$$dE = dL^{ext} + dL^{int}. \quad (13.5)$$

Rezultă deci în total șapte ecuații scalare, care nu sunt toate independente. Dealtfel, pentru a determina mișcarea rigidului liber avem nevoie numai de șase ecuații scalare independente. Una din relații poate fi utilizată deci ca relație de verificare.

Dacă rigidul este supus la legături, acestea îi răpesc un număr m de grade de libertate cinematică. Din punct de vedere matematic, aceste legături se exprimă printr-un număr corespunzător de relații geometrice între parametrii mișcării.

Forțele de legătură care se introduc constituie și ele necunoscute ale problemei; dacă legăturile sunt cu frecare, atunci la cele șase relații independente furnizate de teoremele generale și la relațiile geometrice corespunzătoare legăturilor, se adaugă condițiile fizice corespunzătoare.

Vom studia dinamica solidului rigid pentru patru cazuri particulare ale mișcării: *de translație, de rotație, plan-paralelă și cu punct fix.*

13.2. Dinamica mișcării de translație a rigidului

Fie un triedru fix $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ și unul mobil $T(Oxyz)$ solidar legat de rigidul aflat în mișcare de translație față de T_1 (fig.13.1). Se consideră că originea triedrului T coincide cu centrul de masă al rigidului ($O \equiv C$). În cazul mișcării de translație a rigidului nici un punct al său nu rămâne fix, toate deplasându-se cu aceeași viteză

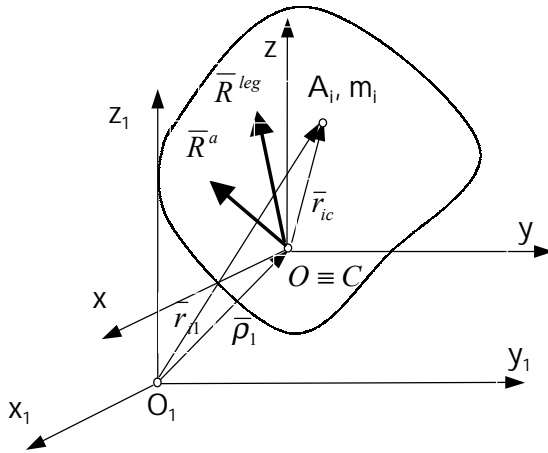


Fig. 13.1

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 = \bar{v}_C = \dot{\bar{\rho}}_C.$$

Prin urmare, pentru a studia mișcarea rigidului, este suficient studiul mișcării centrului de masă a rigidului $C(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, deci parametrii mișcării sunt funcțiile scalare:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi(t), \\ \eta_1 &= \eta_1(t), \\ \zeta_1 &= \zeta_1(t), \end{aligned} \quad (13.6)$$

Deoarece unghiurile lui Euler sunt nule: $\omega=0$.

Teorema impulsului (sub forma teoremei mișcării centrului de masă 13.3) :

$$M\ddot{\bar{\rho}}_1 = \bar{R}, \text{ unde: } \bar{R} = \bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(leg)} \quad (13.7)$$

conduce la următoarele trei relații scalare:

$$M\ddot{\xi}_1 = X^{(a)} + X^{(leg)}; \quad M\ddot{\eta}_1 = Y^{(a)} + Y^{(leg)}; \quad M\ddot{\zeta}_1 = Z^{(a)} + Z^{(leg)}. \quad (13.7')$$

Teorema momentului cinetic față de centrul de masă al rigidului (13.4)

$$\dot{\bar{K}}_C = \bar{M}_C \quad (13.7'')$$

conduce la alte trei relații scalare:

$$0 = L^{(a)} + L^{(leg)}; \quad 0 = M^{(a)} + N^{(leg)}; \quad 0 = N^{(a)} + N^{(leg)}, \quad (13.8)$$

deoarece $\bar{\omega} = 0$ avem :

$$\bar{K}_C = \int_{(D)} \bar{r}_C \times \bar{v}_C dm = \int_{(D)} \bar{r}_C \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_C) dm = 0, \text{ deci: } \dot{\bar{K}}_C = 0. \quad (13.9)$$

Să presupunem că mișcarea de translație se efectuează sub acțiunea forțelor efectiv aplicate și a forțelor de legătură, astfel încât:

- în ecuațiile (13.7) componentele $X^{(a)}$, $Y^{(a)}$, $Z^{(a)}$ și respectiv $X^{(leg)}$, $Y^{(leg)}$, $Z^{(leg)}$ reprezintă suma proiecțiilor pe axele de coordonate ale forțelor exterioare efectiv aplicate (a) și respectiv ale forțelor de legătură (leg);
- în ecuațiile (13.8) componentele $L_C^{(a)}$, $M_C^{(a)}$, $N_C^{(a)}$ și $L_C^{(leg)}$, $M_C^{(leg)}$, $N_C^{(leg)}$ reprezintă suma momentelor corespunzătoare forțelor efectiv aplicate (a) și de legătură (leg), în raport cu axele de coordonate care trec prin centrul de masă.

Din relațiile (13.7) și (13.8) rezultă că, pentru ca un corp să execute o mișcare de translație, este necesar ca sistemul de forțe exterioare să fie echivalent cu o forță unică $\bar{F} = \bar{R}$, care să treacă tot timpul mișcării prin centrul de masă .

În cazul rigidului supus la legături, care execută o mișcare de translație, între parametrii mișcării există relațiile geometrice ale legăturii:

$$f_1(\xi_1, \eta_1, \varsigma_1) = 0; \quad f_2(\xi_1, \eta_1, \varsigma_1) = 0 \quad (13.10)$$

dacă legătura este o curbă, respectiv:

$$f(\xi_1, \eta_1, \varsigma_1) = 0 \quad (13.10')$$

dacă legătura este o suprafață.

În acest caz, legile de mișcare ale centrului maselor și forțele de legătură se pot determina din ecuațiile (13.7), (13.10) și din relațiile fizice ale frecării, cu condiția ca frecarea să fie învinsă (deci să se producă mișcarea rigidului), precum și cu condiția ca problema să aibă sens din punct de vedere matematic.

Se poate arăta că în cazul acestei mișcări, teorema energiei cinetice scrisă față de reperul T_C : $dE_c = dL_c$ ne conduce la același rezultat ca și teorema impulsului.

13.3. Dinamica mișcării de rotație a rigidului

Să considerăm un solid rigid care este supus unei legături de tipul axă fixă. Pentru ușurința calculului se alege această axă să coincidă cu axa Oz a triedrului mobil T . Realizarea acestei legături se face prin imobilizarea a două puncte ale rigidului O_1 și O_2 situate pe axa fixă la distanța $O_1O_2 = h$ (fig.13.2). Reperul fix T_1 și cel mobil T , se aleg astfel încât cele două axe Oz și Oz_1 să coincidă (fig.13.2). Necunoscutele problemei sunt unghiul de rotație propriu, sau legea de mișcare $\varphi = \varphi(t)$ și forțele de legătură din articulațiile O_1 și O_2 .

Asupra rigidului acționează forțele efectiv aplicate $\bar{F}_i^{(a)} (i = 1, 2, \dots, n)$ având rezultanta $\bar{R}^{(a)} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(a)}$ (și componentele $X^{(a)}, Y^{(a)}, Z^{(a)}$), precum și forțele de legătură din punctele fixe O_1 și O_2 , având componentele: $\bar{R}_1^{(leg)}(X_1^{(leg)}, Y_1^{(leg)}, Z_1^{(leg)})$ respectiv, $\bar{R}_2^{(leg)}(X_2^{(leg)}, Y_2^{(leg)}, Z_2^{(leg)})$.

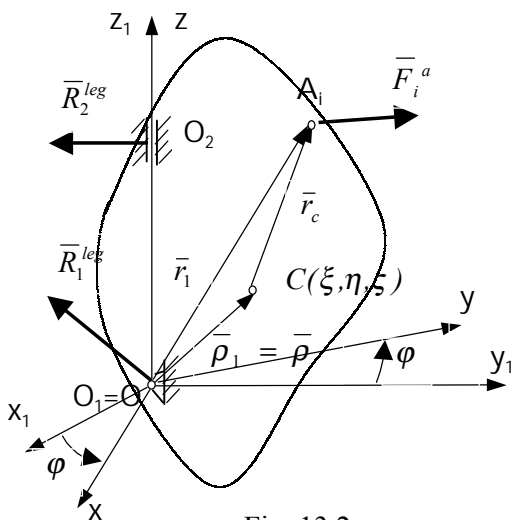


Fig. 13.2

Deci rezultanta forțelor ce acționează asupra rigidului (date și de legătură) este:

$$\bar{R} = \bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(leg)} \quad (13.11)$$

$$\text{sau: } \bar{R} = R^{(a)} + R_1^{(leg)} + R_2^{(leg)}$$

Deci componentele rezultantei generale a forțelor $\bar{R}(X, Y, Z)$ care acționează asupra rigidului, sunt:

$$\begin{aligned} X &= X^{(a)} + X_1^{(leg)} + X_2^{(leg)} \\ Y &= Y^{(a)} + Y_1^{(leg)} + Y_2^{(leg)} \\ Z &= Z^{(a)} + Z_1^{(leg)} + Z_2^{(leg)} \end{aligned} \quad (13.12)$$

Momentul rezultat al forțelor (date și de legătură) care acționează asupra rigidului M_O , în absența frecării în legături, este dat de suma momentelor forțelor aplicate față de punctul $O \equiv O_1$ $M_O^{(a)}(L^a, M^a, N^a)$ și a forțelor de legătură din O_2 : $M_O^{(leg)}(L^{(leg)}, M^{(leg)}, N^{(leg)})$ deoarece momentul forțelor de legătură din O_1 este nul, adică:

$$\bar{M}_O = \bar{M}_O^{(a)} + \bar{M}_O^{(leg)} = \bar{M}_O^{(a)} + \overline{O_1 O_2} \times \bar{R}_2^{(leg)}. \quad (13.13)$$

Componentele lui $\bar{M}_O(L, M, N)$ sunt date de :

$$L = L^a - hY_2^{leg}; \quad M = M^a + hX_2^{leg}; \quad N = N^a \quad (13.14)$$

Dacă se ia în considerație și frecarea în legăturile O_1 și O_2 , atunci se introduc suplimentar în relația (13.11) forțele de frecare și în relația (13.13) cuplurile de frecare \bar{C}_1 și \bar{C}_2 . În continuare se va studia mișcarea rigidului pentru cazul când se neglijează frecarea, aplicând teoremele generale ale dinamicii rigidului:

a. Teorema impulsului se scrie sub forma (13.3) : $\dot{\bar{H}}_1 = \bar{R}$

unde:

$$\bar{H}_1 = \int_{(D)} \bar{v}_1 dm, \quad \text{cu : } \bar{\rho}_1 = \bar{\rho}, \quad \bar{v}_1 = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad \text{si} \quad \bar{\omega} = \omega \bar{k},$$

deci:

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= \int_{(D)} (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm = \bar{\omega} \times \int_{(D)} \bar{r} dm = M(\bar{\omega} \times \bar{\rho}) \quad , \text{ adică:} \\ \bar{H}_1 &= M [(-\omega \eta) \bar{i} + (\omega \xi) \bar{j}] \end{aligned}$$

Deoarece impulsul este exprimat în funcție de *componentele sale pe axele reperului mobil*, pentru derivarea lui în raport cu timpul se aplică regula de derivare corespunzătoare:

$$\frac{d\bar{H}_1}{dt} = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{H}_1 = (-M\dot{\omega}\eta) \bar{i} + (M\dot{\omega}\xi) \bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -M\omega\eta_1 & M\omega\xi_1 & 0 \end{vmatrix}$$

sau:

$$\dot{\bar{H}}_1 = (-M\dot{\omega}\eta - M\omega^2\xi) \bar{i} + (M\dot{\omega}\xi - M\omega^2\eta) \bar{j} \quad (13.15)$$

Ținând seama de relația (13.12) și de faptul că în O_2 avem o articulație cilindrică ($Z_2^{leg} = 0$) (fig.13.2), teorema impulsului conduce la sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} -M(\dot{\omega}\eta + \omega^2\xi) &= X^a + X_1^{leg} + X_2^{leg} \\ M(\dot{\omega}\xi - \omega^2\eta) &= Y^a + Y_1^{leg} + Y_2^{leg} \\ 0 &= Z^a + Z_1^{leg} \end{aligned} \quad (13.16)$$

b. Teorema momentului cinetic se scrie sub forma (13.4): $\dot{\bar{K}}_1 = \bar{M}_{O_1}$

Întrucât în acest caz $\bar{r}_1 = \bar{r}$ momentul cinetic se scrie:

$$\bar{K}_1 = \int_{(D)} \bar{r}_1 \times \bar{v}_1 dm = \int_{(D)} \bar{r}_1 \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_1) dm = \int_{(D)} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm$$

Deoarece: $\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = (-\omega_{zx})\bar{i} + (\omega_{yz})\bar{j} + \omega(x^2 + y^2)\bar{k}$,

înlocuind avem:

$$\bar{K}_1 = -J_{xz}\omega\bar{i} - J_{yz}\omega\bar{j} + J_z\omega\bar{k} \quad (13.17)$$

Deoarece momentul cinetic este exprimat în funcție de *componentele sale pe axele reperului mobil T*, pentru derivarea lui în raport cu timpul se aplică regula de derivare corespunzătoare:

$$\dot{\bar{K}}_1 = \frac{d\bar{K}_1}{dt} = \frac{\partial \bar{K}_1}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_1$$

Derivând expresia (13.17) a momentului cinetic obținem:

$$\dot{\bar{K}}_1 = (-\dot{\omega}J_{zx} + \omega^2 J_{yz})\bar{i} + (-\dot{\omega}J_{yz} - \omega^2 J_{zx})\bar{j} + \dot{\omega}J_z\bar{k}. \quad (13.18)$$

Ținând seama de relațiile (13.14) și (13.18), teorema momentului cinetic în raport cu punctul O_1 , în proiecții pe axele sistemului mobil T , conduce la :

$$\begin{aligned} -\dot{\omega}J_{zx} + \omega^2 J_{yz} &= L^a - hY_2^{leg} \\ -\dot{\omega}J_{yz} - \omega^2 J_{zx} &= M^a + hX_2^{leg} \\ \dot{\omega}J_z &= N^a \end{aligned} \quad (13.19)$$

Ecuțiile (13.16) și (13.19) sunt *ecuațiile dinamicii rigidului cu axă fixă* și formează un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute: legea de variație a vitezei unghiulare $\omega = \omega(t)$ și forțele de legătură: $X_1^{leg}, Y_1^{leg}, Z_1^{leg}, X_2^{leg}, Y_2^{leg}$. Întrucât reperul mobil s-a ales solidar legat de rigidul aflat în mișcarea rotație, cu axa Oz ca axă de rotație, coeficienții J_{xz} , J_{yz} și J_z (momente de inerție față de axele reperului mobil) sunt constanți.

Observații:

- 1) Dacă axa fixă Oz este o axă de simetrie a corpului (adică centrul de masă C se găsește pe această axă) atunci $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$ și sistemul de ecuații (13.19) capătă o formă mult mai simplă.
- 2) Ultima ecuație din (13.19) furnizează singură legea de mișcare $\omega = \omega(t)$ a rigidului, independent de celelalte necunoscute ale problemei.
- 3) Pentru găsirea necunoscutelor sistemului de ecuații (13.16) și (13.19) se procedează astfel: se determină legea de mișcare a rigidului $\omega = \omega(t)$ din ultima ecuație (13.19) și apoi se introduce în celelalte ecuații (13.19) și (13.16) determinându-se reacțiunile $X_1^{leg}, X_2^{leg}, Y_1^{leg}, Y_2^{leg}$ și Z_1^{leg} .

c. Teorema energiei cinetice se consideră sub forma(13.5):

$$dE = dL^{ext} + dL^{int}, \text{ unde } dL^{int} = 0.$$

În mișcarea rigidului cu axă fixă avem următoarele expresii ale lucrului mecanic:

$$dL_1^{ext} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i dt = \sum \bar{F}_i^{ext} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) dt = \bar{\omega} \cdot (\sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{ext}) dt$$

$$dL_1^{ext} = \bar{\omega} \cdot \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i^{ext}) dt = \bar{\omega} \cdot \bar{M}_O dt = \omega(\bar{M}_O \cdot \bar{k}) dt = \omega N^a dt$$

deci: $dL_1^{ext} = M_z \omega dt = N^a \omega dt$.

Pe de altă parte înlocuind în energia cinetică totală:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_{(D)} v_1^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(D)} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm$$

expresia lui: $\bar{\omega} = \omega \bar{k}, \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, se obține: $E_1 = \frac{1}{2} J_z \omega^2$. (13.21)

Diferențiind în raport cu t se obține: $dE_1 = J_z \omega \dot{\omega} dt$ și deci teorema energiei cinetice conduce la ecuația: $J_z \dot{\omega} = N^a$, identică cu ultima ecuație (13.19).

Prin urmare cele trei teoreme ale dinamicii rigidului furnizează *numai șase ecuații independente* pentru studiul mișcării rigidului cu o axă fixă, iar pentru ca problema să fie determinată (să fie numai șase necunoscute) trebuie ca axa fixă să fie realizată cu o articulație sferică în O_1 și una cilindrică în O_2 (fig. 13.2).

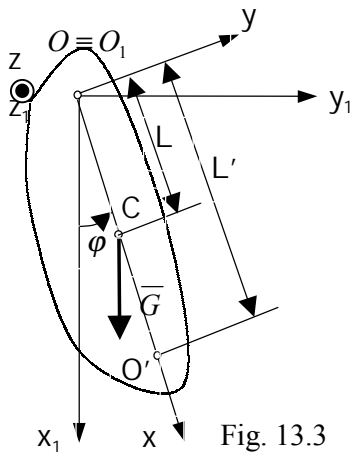


Fig. 13.3

13.4. Pendulul fizic (compus)

Pendulul fizic este un corp care se poate mișca în jurul unei axe fixe orizontale Oz (fig. 13.3) fiind acționat numai de greutatea proprie G ; acesta este un caz particular al rigidului cu o axă fixă.

Se studiază mișcarea pendulului fizic în ipoteza că unghiul rotației proprii $\varphi = \varphi(t)$ este crescător.

Se aleg axele de coordonate ca în fig.13.3, unde $Oz_1 \equiv Oz$ și se aleg în sensul lui $\bar{\omega}$ (sens trigonometric).

Centrul maselor fiind C și notând $OC = L$, și neglijând frecările cu aerul și din articulație, mișcarea se studiază cu ajutorul ecuației (13.21) care se scrie:

$$J_z \ddot{\varphi} = N, \quad (13.22)$$

unde avem evident: $N = -Mg L \sin \varphi$ și ecuația diferențială a pendulului fizic este:

$$\ddot{\varphi} + \frac{MgL}{J_z} \sin \varphi = 0 \quad (13.23)$$

unde J_z este momentul de inerție al pendulului în raport cu axa Oz. Se observă că ecuația (13.23), împreună cu condițiile inițiale ($\varphi(0) = \varphi_0; \dot{\varphi}(0) = \omega_0$), este asemănătoare cu ecuația pendulului matematic de lungime L' (8.80):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L'} \sin \theta = 0. \quad (13.24)$$

Identificând ecuațiile (13.23) și (13.24), rezultă lungimea pendulului matematic sincron cu pendulul fizic :

$$L' = J_z / ML \quad (13.25)$$

În cazul micilor oscilații în jurul poziției de echilibru $\varphi = 0$, perioada celor două pendule în aceste condiții, este aceeași:

$$T = 2\pi \sqrt{L' / g} = 2\pi \sqrt{J_z / MgL}.$$

Există două proprietăți mai importante ale pendulului fizic:

- a) Se poate arăta că $L' > L$. Într-adevăr, notând cu $J_{Cz} > 0$ momentul de inerție față de o axă paralelă cu axa Oz care trece prin centrul de greutate C , conform teoremei lui Steiner: $J_{Oz} = J_{Cz} + ML^2$.

ținând seama de această relație (13.25) devine:

$$L' = \frac{J_{Cz} + ML^2}{ML} = \frac{J_{Cz}}{ML} + L = L'' + L > L \quad (13.26)$$

unde s-a notat cu: $L'' = \frac{J_{Cz}}{ML} > 0. \quad (13.27)$

- b) Fie O' punctul solidului situat pe prelungirea segmentului OC , astfel încât $OO' = L'$. Axa paralelă cu axa Oz dusă prin O' se numește *axă de oscilație*. Punctele acestei axe oscilează ca în cazul pendulului matematic (simplu) legat de axa de suspensie printr-un fir inextensibil de lungime L' , fiind independente de oscilația corpului solid (a celorlalte puncte ale sale).

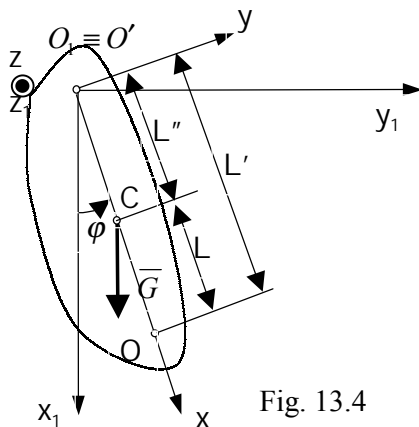


Fig. 13.4

Se demonstrează în continuare că axele de suspensie și de oscilație sunt reciproce: cu alte cuvinte, dacă am face să oscileze corpul solid în jurul axei orizontale ce trece prin O' , eliberând axa de suspensie, atunci lungimea pendulului simplu sincron ar fi tot $L' = O'O$. Într-adevăr, din figura 13.4 și din formula (13.27) rezultă că:

$$O'C = L'' = \frac{J_{Cz}}{ML} \text{ sau: } LL'' = \frac{J_{Cz}}{M} \quad (13.28)$$

ceea ce semnifică faptul că între L și L'' există reciprocitate, adică ceea ce trebuia arătat. Deoarece centrul de oscilație O' și de suspensie O se pot schimba reciproc, pendulul fizic astfel construit se numește *reversibil*.

La relația (13.28) se poate ajunge și astfel: se consideră figura 13.4, pentru care se poate scrie (analog cu relația scrisă din figura 13.3):

$$L' = \frac{J_{zC}}{ML''} + L'' \quad (13.29)$$

Egalând (13.27) cu (13.29) și ținând seama $L \neq L''$ se obține relația (13.28).

13.5. Dinamica mișcării plan-paralele a rigidului

Așa cum s-a arătat în cinematică, un rigid are o mișcare plan-paralelă dacă un plan al său rămâne tot timpul mișcării paralel cu un plan fix din spațiu. Fără a particulariza mișcarea, se consideră că planul fix $x_1O_1y_1$ și planul mobil xOy ($O \equiv C$) coincid (fig. 13.5).

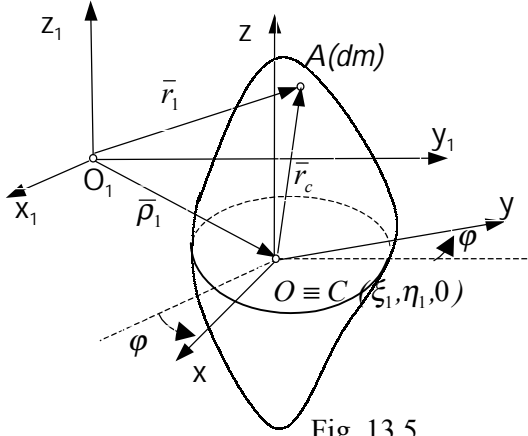


Fig. 13.5

Se aleg ca parametri care determină mișcarea, coordonatele (ξ_1, η_1) ale centrului de masă C în raport cu sistemul de axe fix T_1 și unghiul φ dintre axele Ox_1 și Ox (care este egal cu unghiul dintre Oy_1 și Oy).

Cunoașterea mișcării rigidului implică deci cunoașterea celor trei funcții scalare:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_1(t); \\ \eta_1 &= \eta_1(t); \\ \varphi &= \varphi(t)\end{aligned}\quad (13.30)$$

Torsorul forțelor exterioare (direct aplicate și de legătură) în centrul de masă al rigidului are expresia:

$$\tau_c : \begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(leg)} \\ \bar{M}_c = \sum_{i=1}^n \bar{M}_c(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_c(\bar{F}_i^{(a)}) + \sum_{i=1}^n \bar{M}_c(\bar{F}_i^{(leg)}) \end{cases} \quad (13.31)$$

Sub acțiunea forțelor exterioare corpul se deplasează în planul $O_1x_1y_1$ și se rotește în jurul axei Cz . Pentru rezolvarea problemei se aplică mai întâi teorema impulsului (13.3) sub forma mișcării centrului de masă, care proiectată pe axele triedrului fix T_1 conduce la trei ecuații scalare:

$$M\ddot{\xi}_1 = X; \quad M\ddot{\eta}_1 = Y; \quad 0 = Z \quad (13.32)$$

unde X, Y, Z reprezintă proiecțiile rezultantei forțelor exterioare (date și de legătură) pe axele sistemului de referință fix.

În continuare se aplică teorema momentului cinetic (13.4) față de centrul maselor $\bar{K}_c = \bar{M}_c$ care se proiectează pe axele sistemului mobil obținându-se trei relații scalare. Momentul cinetic este: $\bar{K}_c = \int_{(D)} \bar{r}_c \times \bar{v}_c dm = \int_{(D)} \bar{r}_c \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) dm$, deoarece:

$$\bar{r}_c = x_c \bar{i} + y_c \bar{j} + z_c \bar{k},$$

$$\bar{v}_c = \dot{\bar{r}}_c = \frac{\partial \bar{r}_c}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_c = \bar{\omega} \times \bar{r}_c,$$

$$\text{adică: } \bar{K}_c = (-\omega J_{xz}^c) \bar{i} + (-\omega J_{yz}^c) \bar{j} + (\omega J_z^c) \bar{k}, \quad (13.33)$$

care după derivare în raport cu timpul, folosind formula de derivare a unui vector exprimat prin proiecțiile sale pe axele unui sistem mobil:

$$\dot{\bar{K}}_C = \frac{\partial \bar{K}_C}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_C$$

$$\text{se obține: } \dot{\bar{K}}_C = (-\dot{\omega} J_{xz}^C + \omega^2 J_{yz}^C) \bar{i} + (-\dot{\omega} J_{yz}^C - \omega^2 J_{xz}^C) \bar{j} + \dot{\omega} J_z^C \bar{k} \quad (13.34)$$

și teorema momentului cinetic conduce la sistemul:

$$\left. \begin{aligned} -\dot{\omega} J_{xz}^C + \omega^2 J_{yz}^C &= L_C \\ -\dot{\omega} J_{yz}^C - \omega^2 J_{xz}^C &= M_C \\ \dot{\omega} J_z^C &= N_C \end{aligned} \right\} \quad (13.35)$$

unde L_C , M_C și respectiv N_C reprezintă momentele forțelor exterioare în raport cu cele trei axe de coordonate care au ca origine comună centrul de masă al rigidului C (fig.13.5).

De menționat că sistemul de ecuații (13.32) și (13.35) permite atât determinarea legii de mișcare cât și a forțelor de legătură (în cazul când acestea există). În cazul rigidului liber care are o mișcare în planul $O_1x_1y_1$, este necesar ca rezultanta forțelor efectiv aplicate să se găsească într-un plan paralel cu planul mișcării $O_1x_1y_1$. *Această condiție este necesară dar nu și suficientă.*

Avem deci în acest caz: $L_C = 0$, $M_C = 0$, adică:

$$\left. \begin{aligned} -\dot{\omega} J_{xz}^C + \omega^2 J_{yz}^C &= 0; \\ -\dot{\omega} J_{yz}^C - \omega^2 J_{xz}^C &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.35')$$

Acesta este un sistem omogen în necunoscutele $\dot{\omega}$ și ω^2 care are soluții diferite de zero dacă determinantul său este zero:

$$\begin{vmatrix} -J_{xz}^C & J_{yz}^C \\ -J_{yz}^C & -J_{xz}^C \end{vmatrix} = (J_{xz}^C)^2 + (J_{yz}^C)^2 = 0$$

dacă și numai dacă:

$$J_{xz}^C = 0, \quad J_{yz}^C = 0, \quad (13.36)$$

ceea ce este posibil numai când *planul mișcării este plan de simetrie al corpului*, sau când axa perpendiculară pe planul mișcării și care trece prin centrul de masă, este o *axă principală și centrală de inerție*.

Condițiile (13.36) împreună cu condiția ca viteza centrului de masă $\bar{v}_C = \dot{\bar{\rho}}_1$ să fie conținută în planul de simetrie al corpului sunt *condițiile necesare și suficiente* ca rigidul să aibă o mișcare liberă în planul $O_1x_1y_1$.

În cazul particular al plăcilor plane, care se deplasează în planul lor, se alege planul mișcării să coincidă cu planul $x_1O_1y_1$. Sistemul mobil de axe T se alege cu originea în centrul de masă ($O \equiv C$) și cu axele Cx și Cy să coincidă cu axele principale și centrale de inerție. În aceste condiții ecuațiile (13.32) și (13.35) capătă o formă simplificată devenind:

$$M\ddot{\xi}_1 = X; \quad M\ddot{\eta}_1 = Y; \quad J_z^C \ddot{\phi} = N_C \quad (13.37)$$

Condițiile inițiale pentru detreminarea constantelor de integrare sunt:

$$t = t_0 : \begin{cases} \xi_1(t_0) = \xi_0, & \eta_1(t_0) = \eta_0, & \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ \dot{\xi}_1(t_0) = \dot{\xi}_0, & \dot{\eta}_1(t_0) = \dot{\eta}_0, & \dot{\varphi}(t_0) = \omega_0 \end{cases} \quad (13.37')$$

În cazul rigidului supus la legături, forțele de legătură introduc necunoscute în plus. În cazul plăcii plane, care se studiază cu ecuațiile (13.37), apar mai multe necunoscute decât numărul de ecuații și problema pare a fi nedeterminată. Pentru a o rezolva este necesar să se scrie unele relații suplimentare de natură geometrică între parametrii mișcării, iar în cazul legăturilor cu frecare se mai atașează și relații corespunzătoare tipurilor de frecări ce apar.

Aplicație

Un disc de greutate G și rază R se mișcă pe un plan înclinat cu unghiul α , plecând din repaus (fig.13.6). Să se detremine mișcarea și forțele de legătură dacă se cunosc: μ coeficientul de frecare de alunecare și s coeficientul de frecare de rostogolire.

Rezolvare

Se alege sistemul de referință fix T_1 cu originea în O_1 în poziția inițială a centrului de masă a discului, iar axa Oz se alege în același sens cu $\bar{\omega}$ și cu momentul cinetic \bar{K}_C . Axa O_1x_1 se alege în sensul mișcării, iar O_1y_1 se ia astfel încât T_1 să fie un triedru drept. În această situație sistemul de ecuații de mișcare este dat de:

$$\frac{G}{g} \ddot{\xi} = G \cdot \sin \alpha - T, \quad (a)$$

$$\frac{G}{g} \ddot{\eta} = G \cdot \cos \alpha - N, \quad (b)$$

$$\frac{GR^2}{2g} \ddot{\varphi} = T \cdot R - M_r, \quad (c)$$

sistem de trei ecuații cu cinci necunoscute :

φ, ξ, η, N, T și M_r .

Ca ecuație suplimentară se scrie condiția geometrică a mișcării pe planul înclinat:

$$\eta = 0 \quad \text{sau} \quad \dot{\eta} = 0 \quad (d)$$

care introdusă în ecuația (b) determină reacțiunea $N = G \cos \alpha$.

În funcție de valorile coeficienților de frecare se deosebesc următoarele două cazuri:

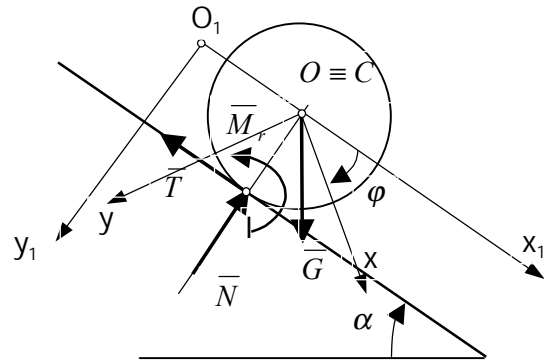


Fig. 13.6

1) Cazul rostogolirii fără alunecare

În acest caz există egalitatea geometrică între arcul desfășurat de disc și lungimea drumului parcurs pe planul înclinat : $R \varphi = \xi$, care derivată de două ori conduce la: $R\ddot{\varphi} = \ddot{\xi}$, (e)

care înlocuită în ecuația (a) devine:

$$\frac{G}{g} R \ddot{\varphi} = G \sin \alpha - T.$$

Ținând seama că $M_r = sN$ și eliminând pe $\ddot{\varphi}$ din ecuațiile (a') și (c) se obține forța de frecare:

$$T = \frac{2}{3} G \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha \right)$$

care introdusă în ecuația (a) conduce la:

$$\ddot{\xi} = \frac{2}{3} g \left(\sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha \right) = \text{const}$$

și apoi la: $\ddot{\varphi} = \frac{2g}{3R} \left(\sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha \right) = \text{const}$.

Integrând succesiv de două ori și determinând constantele de integrare din condițiile inițiale:

$$t = 0: \begin{cases} \xi(0) = 0, & \varphi(0) = 0, \\ \dot{\xi}(0) = 0, & \dot{\varphi}(0) = 0, \end{cases}$$

se obțin legile de mișcare ale celor doi parametri ai mișcării:

$$\xi(t) = \frac{t^2}{3} g \left(\sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha \right)$$

$$\varphi(t) = \frac{t^2}{3R} g \left(\sin \alpha - \frac{s}{R} \cos \alpha \right)$$

În acest caz se observă că forța de frecare de alunecare T nu ajunge la valoarea sa limită ($T = \mu N$), deci $T < \mu N$, adică :

$$T = \frac{2}{3} G \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{s}{R} \cos \alpha \right) < \mu G \cos \alpha,$$

ceea ce conduce la următoarea condiție asupra coeficientului de frecare:

$$\mu \geq \frac{1}{3} \left(\text{tg} \alpha + 2 \frac{s}{R} \right).$$

2) Cazul rostogolirii cu alunecare

În acest caz forța de frecare, de alunecare T ajunge la valoarea sa limită:

$$T = \mu N \quad (f)$$

și egalitatea geometrică între arcul desfășurat de disc și lungimea drumului parcurs pe planul înclinat nu mai este valabilă, întrucât $\xi > R \varphi$, iar sistemul de ecuații în acest caz este format din ecuațiile (a), (b), (c), (d) și (f). Introducând forța de frecare (ecuația $T = \mu N = \mu G \cos \alpha$) în ecuația (a) și (c) se obțin respectiv:

$$\ddot{\xi} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = \text{const};$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g}{R} \left(\mu - \frac{s}{R} \right) \cos \alpha = \text{const}$$

care integrate succesiv de două ori și folosind aceleași condiții inițiale ca în primul caz:

$$t=0: \begin{cases} \xi(0)=0, & \varphi(0)=0, \\ \dot{\xi}(0)=0, & \dot{\varphi}(0)=0, \end{cases}$$

se determină constantele de integrare și se obțin legile de mișcare independente :

$$\xi = \frac{gt^2}{2} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha);$$

$$\varphi = \frac{gt^2}{R} \left(\mu - \frac{s}{R} \right) \cos \alpha.$$

Înlocuind $\xi > R \varphi$ se obține condiția care trebuie să o satisfacă coeficienții de frecare în acest caz:

$$\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{2} > \left(\mu - \frac{s}{R} \right) \sin \alpha, \quad \text{adică: } \mu < \frac{1}{3} \left(\text{tg} \alpha + 2 \frac{s}{R} \right).$$

13.6. Dinamica rigidului cu un punct fix

13.6.1. Generalități

Se consideră un rigid cu un punct fix O (fig.13.7) care este supus acțiunii unui sistem de forțe exterioare $\{\bar{F}_i\}_{i=1,n}$, care se reduc în O la tursorul lor $\tau_0: (\bar{R}_0, \bar{M}_0)$. Rigidul are în O o articulație sferică și conform axiomei legăturilor în O apare o reacțiune \bar{R}^{leg} de mărime și direcție necunoscute.

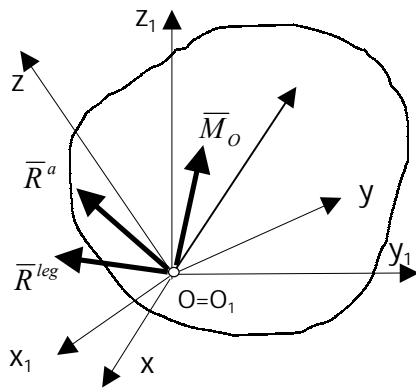


Fig.13.7

Studiul mișcării se face alegându-se două triedre de referință, unul fix $T_1 (O_1x_1y_1z_1)$ și unul mobil $T (Oxyz)$ solidar cu rigidul, având originile comune: $O_1 \equiv O$. Axele triedrului mobil coincid cu axele principale de inerție ale rigidului, în raport cu punctul fix O . Așa cum s-a văzut în capitolul 9, poziția rigidului la un moment dat poate fi determinată prin cele trei unghiuri ale lui Euler (ψ, φ, θ) .

Deci mișcarea rigidului este cunoscută dacă se cunosc funcțiile:

$$\psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t) \quad (13.38)$$

Determinarea ecuațiilor de mișcare (13.38) precum și a componentelor reacțiunii în O : \bar{R}^{leg} (X^{leg} , Y^{leg} , Z^{leg}) formează obiectul dinamicii rigidului cu punct fix. Se observă că problema are șase necunoscute: ψ , φ , θ , X^{leg} , Y^{leg} , Z^{leg} .

13.6.2. Ecuațiile de mișcare

Ecuațiile lui Euler.

Pentru determinarea ecuațiilor de mișcare se aplică teorema momentului cinetic în raport cu punctul fix: $O_I \equiv O$ ($\dot{\bar{K}}_O = \bar{M}_O$), unde atât momentul cinetic \bar{K}_O cât și momentul rezultat al forțelor \bar{M}_O sunt calculate în raport cu punctul fix O .

Ținând seama că axele triedrului mobil coincid cu axele principale de inerție, expresia momentului cinetic \bar{K}_O este:

$$\bar{K}_O = J_1 \omega_x \bar{i} + J_2 \omega_y \bar{j} + J_3 \omega_z \bar{k} \quad (13.39)$$

unde J_1 , J_2 , J_3 sunt momente de inerție principale în raport cu reperul T .

Deoarece \bar{K}_O este un vector raportat la triedrul mobil, derivata lui în raport cu timpul se calculează conform formulei de derivare (10.9):

$$\dot{\bar{K}}_O = \frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{\partial \bar{K}_O}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O$$

$$\dot{\bar{K}}_O = J_1 \dot{\omega}_x \bar{i} + J_2 \dot{\omega}_y \bar{j} + J_3 \dot{\omega}_z \bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_1 \omega_x & J_2 \omega_y & J_3 \omega_z \end{vmatrix}, \text{ sau:}$$

$$\dot{\bar{K}}_O = [J_1 \varepsilon_x + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z] \bar{i} + [J_2 \varepsilon_y + (J_1 - J_3) \omega_z \omega_x] \bar{j} + [J_3 \varepsilon_z + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y] \bar{k} \quad (13.40)$$

Expresia analitică a vectorului \bar{M}_O în raport cu triedrul mobil este:

$$\bar{M}_O = L \bar{i} + M \bar{j} + N \bar{k} \quad (13.41)$$

Proiecția relației vectoriale $\dot{\bar{K}}_O = \bar{M}_O$ pe axele sistemului mobil conduce la următorul sistem de ecuații diferențiale, numite *ecuațiile lui Euler pentru rigidul cu un punct fix*:

$$\begin{aligned} J_1 \varepsilon_x + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= L \\ J_2 \varepsilon_y + (J_1 - J_3) \omega_z \omega_x &= M \\ J_3 \varepsilon_z + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= N \end{aligned} \quad (13.42)$$

Întrucât forța de legătură \bar{R}^{leg} este aplicată în O , momentul ei față de O este nul, deci \bar{M}_O este doar momentul rezultat al forțelor efectiv aplicate.

13.6.3. Relațiile dintre vectorul viteză unghiulară și unghiurile lui Euler

Pentru integrarea sistemului (13.42) trebuie găsite relațiile dintre componentele vitezei unghiulare ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) și unghiurile lui Euler (ψ, φ, θ) reprezentate în fig.13.8.

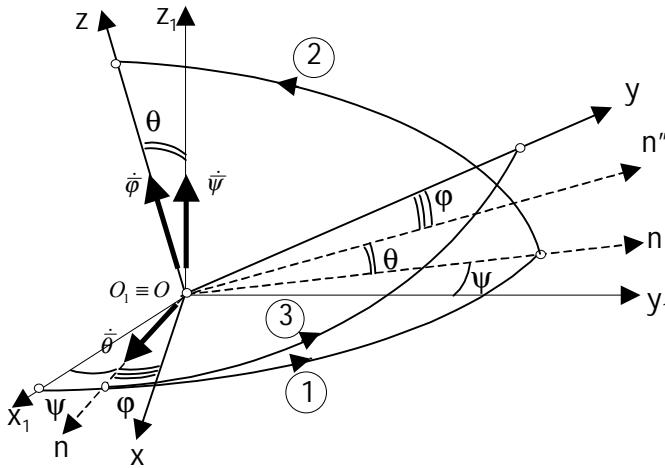


Fig.13.8

Unghiurile lui Euler au următoarele denumiri:

ψ - unghi de precizie

θ - unghi de nutație

φ - unghi de rotație proprie

și se obțin rotind convenabil sistemul de axe mobil ($Oxyz$) peste cel fix (O_1, x_1, y_1, z_1) până se obține o suprapunere completă a lor.

Se procedează de fapt, invers și anume (fig.13.8):

1. Se rotește reperul $T_1 (O_1, x_1, y_1, z_1)$ în jurul axei Oz_1 cu unghiul ψ până ce axa O_1x_1 ajunge peste axa On ($O \equiv O_1$), iar axa O_1y_1 în On' ; direcția axei Oz_1 coincide cu direcția vitezei al cărei scalar l-am notat cu $\dot{\psi}$; axa On se mai numește și *axa nodurilor*.
2. Sistemul de axe $Onn'z_1$ se rotește în jurul axei nodurilor On cu unghiul θ , până ce axa O_1z_1 se suprapune peste Oz , iar On' ajunge în On'' , rotirea făcându-se cu viteza al cărei scalar este $\dot{\theta}$ și este orientată după On ;
3. Sistemul de axe abținut anterior se rotește în jurul axei proprii Oz cu unghiul φ , până ce axele On și On'' se suprapun peste axele proprii Ox și respectiv Oy ; unghiul de rotație fiind φ , iar scalarul vitezei de rotație s-a notat cu $\dot{\varphi}$ și este orientată după axa Oz .

Rotațiile se fac în sens pozitiv, iar unghiurile ψ, φ, θ sunt determinate abstractie făcând de un multiplu de 2π radiani. Cunoscând vectorii vitezei unghiulare corespunzătoare celor trei rotații în jurul axelor: O_1z_1, On și Oz (fig.13.8) se ajunge la vectorul viteză unghiulară instantanee $\bar{\omega}$ în funcție de unghiurile ψ, φ, θ și de derivatele lor.

Se mai poate scrie o primă relație evidentă:

$$\bar{\omega} = \dot{\psi} \text{vers}(O_1z_1) + \dot{\varphi} \text{vers}(Oz) + \dot{\theta} \text{vers}(On) \quad (13.43)$$

În continuare, se determină relațiile dintre componentele $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ale vectorului $\bar{\omega}$ și unghiurile ψ, φ, θ .

Pentru aceasta se proiectează relația (13.43) pe axele mobile Ox , Oy , Oz .

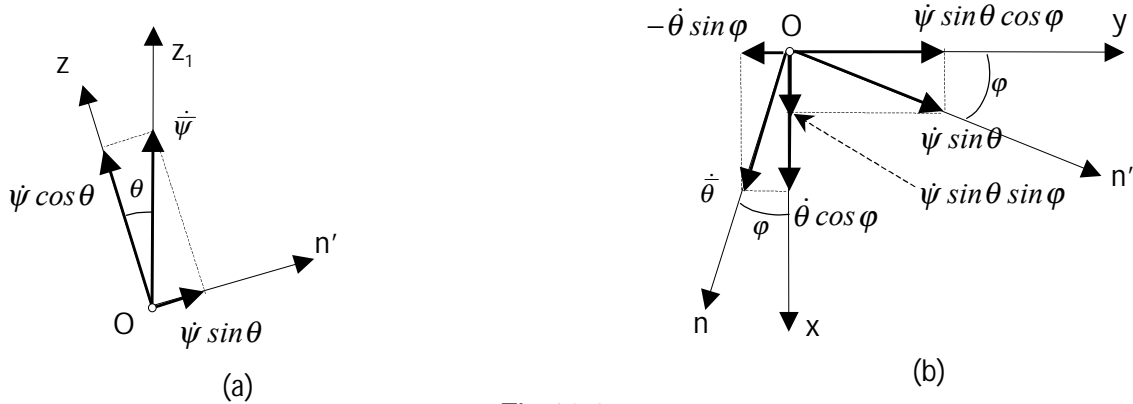


Fig.13.9

Notând cu On' perpendiculara dusă în planul xOy pe linia nodurilor On , se observă că axele O_1x_1 , Oz și On' sunt situate în același plan, deoarece toate sunt normale pe On , iar vectorul viteză unghiulară de precesie $\dot{\psi}$ (de scalar $\dot{\psi}$) aplicându-se pe axa O_1z_1 (fig.13.9.a) poate fi proiectat pe axele Oz și On' obținându-se respectiv proiecțiile $\dot{\psi} \cos \theta$ și $\dot{\psi} \sin \theta$. Componenta $\dot{\psi} \sin \theta$, orientată în lungul axei On' din planul xOy , se descompune la rândul ei în componentele $\dot{\psi} \sin \theta \cdot \sin \varphi$ (în lungul axei Ox) și $\dot{\psi} \sin \theta \cdot \cos \varphi$ (în lungul axei Oy , fig.13.9.b).

În ceea ce privește vectorul viteză unghiulară de nutație $\dot{\theta}$, situat pe axa On , din planul xOy , el poate fi proiectat pe axele Ox , Oy , obținându-se respectiv proiecțiile $\dot{\theta} \sin \varphi$ și $\dot{\theta} \cos \varphi$. În sfârșit, vectorul viteză unghiulară de rotație proprie $\dot{\phi}$, de scalar $\dot{\phi}$, fiind situat pe axa Oz se proiectează numai pe această axă. Pe baza acestor raționamente, rezultă următoarele expresii ale proiecțiilor ω_x , ω_y , ω_z pe axele sistemului mobil:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta\end{aligned}\tag{13.44}$$

Pentru rezolvarea problemei mișcării, vor trebui considerate împreună relațiile (13.42) și (13.44), reprezentând în total șase ecuații, având șase necunoscute ω_x , ω_y , ω_z , ψ , φ , θ .

13.6.4. Cazurile de integrabilitate ale ecuațiilor lui Euler

Sistemul de ecuații diferențiale (13.42) nu a putut fi integrat, pentru orice condiții inițiale, decât în trei cazuri:

- a) *Cazul Euler - Poincot* în care se consideră că $\overline{M}_0 = \overline{O}$ ($L = M = N = 0$), , adică torsorul sistemului de forțe exterioare se reduce în O numai la o rezultantă \overline{R}^a (de exemplu, un rigid, supus numai acțiunii greutateii sale, fiind suspendat chiar în centrul său de greutate).
- b) *Cazul Lagrange - Poisson* în care se presupun realizate condițiile: centrul de greutate situat pe axa mobilă Oz ($\xi = 0, \eta = 0$) și $J_1 = J_2$, adică elipsoidul de inerție să fie un elipsoid de rotație în raport cu axa Oz.
- c) *Cazul Sofia- Kovalevskaia*, în care se presupun realizate condițiile: centrul maselor C al rigidului se află în planul xOy ($\zeta = 0$) și $J_1 = J_2 = 2 J_3$.

Problema mișcării rigidului cu un punct fix a fost rezolvată și în alte situații, dar numai pentru anumite condiții inițiale. În continuare se prezintă doar primul caz de integrabilitate a ecuațiilor lui Euler:

Cazul Euler - Poincot

Punând condiția $L = M = N = 0$ în ecuațiile lui Euler (12.42) rezultă:

$$\begin{aligned} J_1 \varepsilon_x + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= 0 \\ J_2 \varepsilon_y + (J_1 - J_3) \omega_z \omega_x &= 0 \\ J_3 \varepsilon_z + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= 0 \end{aligned} \quad (13.45)$$

Se vor căuta două integrale prime, una din integralele prime se obține multiplicând prima ecuație (13.45) cu ω_x , a doua cu ω_y , iar a treia ecuație cu ω_z , apoi adunând membru cu membru relațiile obținute și reducând termenii asemenea, rezultă:

$$J_1 \omega_x \dot{\omega}_x + J_2 \omega_y \dot{\omega}_y + J_3 \omega_z \dot{\omega}_z = 0 \quad (13.46)$$

care se mai scrie și sub forma:

$$d \left[\frac{1}{2} (J_1 \omega_x^2 + J_2 \omega_y^2 + J_3 \omega_z^2) \right] = 0 \quad (13.47)$$

de unde rezultă integrala primă:

$$\left[\frac{1}{2} (J_1 \omega_x^2 + J_2 \omega_y^2 + J_3 \omega_z^2) \right] = E = \text{const.} \quad (13.48)$$

care arată faptul că energia cinetică a sistemului se conservă.

A doua integrală primă se obține dacă sistemul (13.45) se multiplică astfel: prima ecuație cu $J_1 \omega_x$, a doua cu $J_2 \omega_y$, iar a treia cu $J_3 \omega_z$ și însumând membru cu membru ecuațiile obținute, rezultă:

$$J_1^2 \omega_x \dot{\omega}_x + J_2^2 \omega_y \dot{\omega}_y + J_3^2 \omega_z \dot{\omega}_z = 0 \quad (13.49)$$

care se mai scrie și astfel:

$$\frac{1}{2} d[J_1^2 \omega_x^2 + J_2^2 \omega_y^2 + J_3^2 \omega_z^2] = 0 \quad (13.50)$$

de unde integrând rezultă a doua integrală primă:

$$J_1^2 \omega_x^2 + J_2^2 \omega_y^2 + J_3^2 \omega_z^2 = \text{const} = K_1^2 \quad (13.51)$$

adică momentul cinetic este constant.

$$K_1 = \sqrt{(J_1 \omega_x)^2 + (J_2 \omega_y)^2 + (J_3 \omega_z)^2} \quad (13.52)$$

Așadar cele două integrale prime sunt:

$$J_1 \omega_x^2 + J_2 \omega_y^2 + J_3 \omega_z^2 = 2E \quad (13.53)$$

$$J_1^2 \omega_x^2 + J_2^2 \omega_y^2 + J_3^2 \omega_z^2 = K_1^2$$

În continuare, vom schița, numai soluția matematică a sistemului (13.53).

Dacă se consideră ω_z^2 cunoscut, se obține un sistem de două ecuații cu două nenunoscute ω_x^2 și ω_y^2 care au expresiile:

$$\omega_x^2 = a_1 + b_1 \omega_z^2 \quad (13.54)$$

$$\omega_y^2 = a_2 + b_2 \omega_z^2$$

unde cu a_1 , b_1 , a_2 , b_2 s-au notat niște factori constanți care depind de E , K_1 și de momentele de inerție (J_1 , J_2 , J_3).

Introducând relațiile (13.54) în ultima din ecuațiile lui Euler (13.45) se obține:

$$J_3 \frac{d\omega_z}{dt} \pm (J_2 - J_1) \sqrt{(a_1 + b_1 \omega_z^2)(a_2 + b_2 \omega_z^2)} = 0 \quad (13.55)$$

Se observă că sub radical apare un polinom de gradul patru în ω_z , care îl notăm cu $P_4(\omega_z)$, iar ecuația (13.55) devine:

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \pm \frac{J_1 - J_2}{J_3} \sqrt{P_4(\omega_z)} \quad (13.56)$$

Separând variabilele și integrând ecuația diferențială (13.56), rezultă:

$$t = \pm \frac{J_3}{J_1 - J_2} \int \frac{d\omega_z}{\sqrt{P_4(\omega_z)}} \quad (13.57)$$

Fără a intra în detalii privind rezolvarea completă dată de Euler acestei ecuații și nici interpretarea geometrică dată de Poinsot, menționăm că integrala din (13.57) este o integrală eliptică.

13.6.5 Calculul reacțiilor

Pentru calculul reacțiilor se aplică teorema impulsului, adică relația vectorială: $\dot{\bar{H}}_1 = \bar{R}^a + \bar{R}^{leg}$ (13.58)

unde: $\bar{H}_1 = M \dot{\bar{\rho}} = M(\bar{\omega} \times \bar{\rho})$, (13.59)

\bar{H}_1 fiind un vector raportat la sistemul de axe mobil, conform formulei (10.9) avem:

$$\dot{\bar{H}}_1 = \frac{d\bar{H}_1}{dt} = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{H}_1 \quad (13.60)$$

adică: $\dot{\bar{H}}_1 = M \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + M \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})$ (13.61)

de unde, ținând seama de relația (13.58), rezultă:

$$\bar{R}^{leg} = -\bar{R}^a + M \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + M \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) \quad (13.62)$$

unde $\bar{\rho}$ este vectorul de poziție al centrului maselor rigidului în mișcarea cu un punct fix, raportat la triedrul mobil T. ($\bar{\rho} = \bar{\rho}_1$)

13.6.6. Giroscopul

Giroscopul este un corp de revoluție care se rotește cu o viteză unghiulară foarte mare în jurul axei sale de simetrie.

De asemenea el este un rigid cu un punct fix O ce aparține axei de simetrie, având momentul de inerție în raport cu axa de simetrie, momentul de inerție principal (notat cu J_3) mult mai mare decât celelalte două momente de inerție principale (J_1 și J_2) care sunt egale între ele ($J_1 = J_2 = J$) corpul fiind un corp de revoluție, ($J_3 \gg J$).

a) Stabilitatea giroscopului

În continuare se va studia *giroscopul centrat* al cărui punct de suspensie coincide cu centrul său de greutate ($O \equiv C$). Acest giroscop constituie o particularizare a cazului Euler - Poinot. Suspendarea giroscopului se realizează printr-un sistem cardanic ce permite rotirea simultană a giroscopului în jurul a trei axe perpendiculare între ele și concurente în același punct O care coincide cu centrul de greutate C (fig.13.10). Axa de simetrie se consideră ca fiind axa Oz a triedrului mobil, solidar cu giroscopul.

Există evident relațiile $L = M = N = 0$ (singura forță care acționează fiind greutatea, al cărei moment în raport cu $O \equiv C$ este nul). Față de cazul Euler - Poinot ($\bar{M}_0 = 0$) se adaugă condițiile $J_1 = J_2 = J$, deci ecuațiile lui Euler devin:

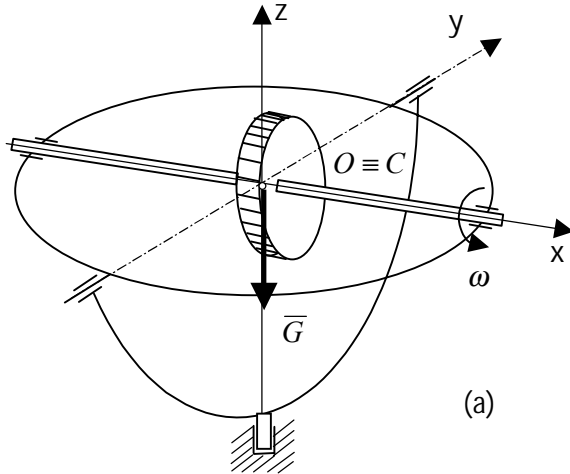
$$J \varepsilon_x + (J_3 - J) \omega_y \omega_z = 0$$

$$J\varepsilon_y + (J - J_3)\omega_z\omega_x = 0 \quad (13.63)$$

$$J_3\varepsilon_z = 0$$

Din ultima ecuație (13.63) rezultă: $\varepsilon_z = 0$ deci $\omega_z = \text{const.} = \omega_0$.

Cu această observație primele două ecuații din (13.63) devin:



$$J \frac{d\omega_x}{dt} + (J_3 - J)\omega_0\omega_y = 0 \quad (13.64)$$

$$J \frac{d\omega_y}{dt} + (J - J_3)\omega_0\omega_x = 0 \quad (13.65)$$

Eliminând ω_y din acest sistem, se obține:

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2} + \left(\frac{J_3 - J}{J} \omega_0 \right)^2 \omega_x = 0 \quad (13.66)$$

și notând :

$$\left(\frac{J_3 - J}{J} \omega_0 \right)^2 = p^2 \quad (13.67)$$

ecuația de mai sus devine

$$\frac{d^2\omega_x}{dt^2} + p^2\omega_x = 0 \quad (13.68)$$

a cărei soluție generală este:

$$\omega_x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt \quad (13.69)$$

Înlocuind valoarea lui ω_x în relația (13.64) rezultă:

$$\omega_y = -\frac{J}{(J_3 - J)\omega_0} \frac{d\omega_x}{dt} \quad \text{sau} \quad \omega_y = -\frac{J}{(J_3 - J)\omega_0} (-C_1 p \sin pt + C_2 p \cos pt) \quad (13.70)$$

$$\text{sau:} \quad \omega_y = \pm (C_1 \sin pt - C_2 \cos pt) \quad (13.71)$$

Semnele \pm corespund cazurilor $J_3 > J$ și respectiv $J_3 < J$.

Constantele C_1 și C_2 din relațiile (13.69) și (13.71) se determină din condițiile inițiale.

Dacă giroscopul nu este perturbat, atunci la $t = 0$: $\omega_{x0} = \omega_{y0} = 0$ și deci $C_1 = C_2 = 0$. Dacă giroscopul este puțin perturbat atunci la $t = 0$, ω_{x0} și ω_{y0} sunt mici și deci C_1 și C_2 sunt mici. Cum ω_x și ω_y sunt funcții de timp, mărginite (datorită funcțiilor trigonometrice $\sin pt$ și $\cos pt$) rezultă că aceste componente ale vitezei unghiulare rămân în timpul mișcării mici în raport cu componenta $\omega_z = \omega_0$ (care se presupune foarte mare).

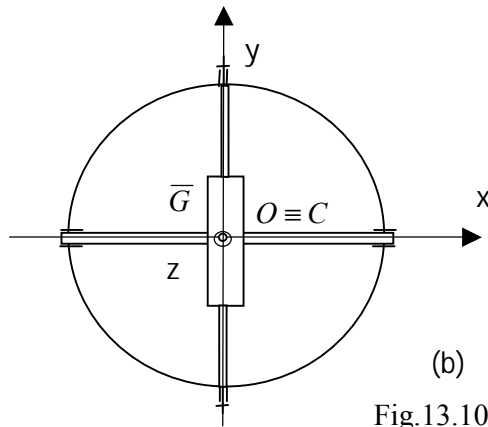


Fig.13.10

În concluzie, vectorul viteză unghiulară $\bar{\omega}$ nu deviază mult de la poziția neperturbată, ceea ce înseamnă că mișcarea giroscopului este stabilă. Proprietatea de stabilitate a giroscopului face ca el să fie utilizat ca busolă sau ca stabilizator al mișcării diferitelor vehicule (vapoare, avioane, trenuri, tancuri, etc.)

b) Efectul giroscopic

Se consideră un giroscop centrat în condițiile mai sus (fig.13.11). Dacă se notează cu J momentul de inerție în raport cu axa de rotație Oz a triedrului mobil și cu ω viteza unghiulară (care se presupune foarte mare) a giroscopului, momentul cinetic în raport cu O este vectorul:

$$\bar{K}_0 = J\omega\bar{k} \quad (13.72)$$

având mărimea (scalarul):

$$K_0 = K_{0z} = J\omega \quad (13.73)$$

Se acționează asupra giroscopului cu o forță \bar{F} paralelă cu axa Ox (fig.13.11). Această forță produce un moment \bar{M}_0 în raport cu punctul O , care este orientat de-a lungul axei Oy , moment care produce o variație a momentului cinetic al giroscopului și care se presupune a fi mică astfel încât acesta capătă valoare:

$$\bar{K}'_0 = \bar{K}_0 + d\bar{K}_0 \quad (13.74)$$

suficient de apropiată de cea inițială.

Suportul lui \bar{K}'_0 reprezintă noua axă de rotație a giroscopului; această axă este înclinată față de cea inițială Oz cu un unghi suficient de mic $d\psi$, deoarece axa inițială era o axă stabilă de rotație. Din teorema momentului cinetic:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0 \quad (13.75)$$

rezultă: $d\bar{K}_0 = \bar{M}_0 dt$. (13.76)

Această relație arată că momentul \bar{M}_0 este coliniar și are același sens cu variația $d\bar{K}_0$ a momentului cinetic, care exprimă deplasarea axei de rotație a giroscopului ca urmare a acțiunii forței \bar{F} .

Prin urmare, efectul giroscopic constă în aceea că acționând asupra unui giroscop cu o forță \bar{F} , care produce în raport cu punctul fix momentul \bar{M}_0 , giroscopul în loc să execute o deplasare în sensul forței, el își deplasează axa de rotație pe o direcție perpendiculară pe o forță și anume în sensul momentului \bar{M}_0 . Conform principiului acțiunii și reacțiunii, giroscopul acționează asupra agentului extern perturbator cu un moment egal și de sens opus, numit cuplu giroscopic:

$$\bar{M}_g = -\bar{M}_0. \quad (13.77)$$

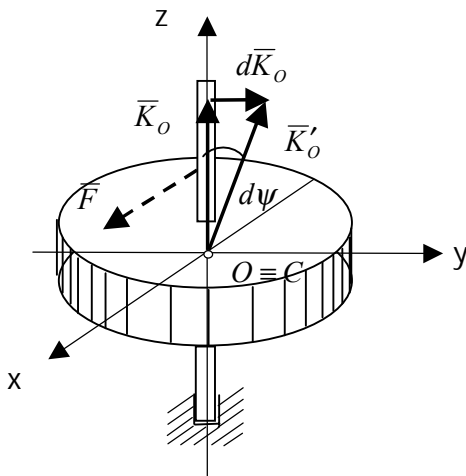


Fig.13.11

13.7. Dinamica sistemelor de corpuri cu un grad de libertate

Cu ajutorul teoremelor generale ale dinamicii se poate studia și mișcarea sistemelor de corpuri rigide.

Mișcarea unui sistem de corpuri rigide se studiază pentru toate corpurile luate împreună (deoarece mișcărilor lor nu sunt toate independente). Forțele care reprezintă acțiunile reciproce dintre corpurile sistemului sunt considerate ca forțe interioare de interacțiune și li se aplică *principiul egalității acțiunilor reciproce*.

Legăturile dintre două sau mai multe corpuri se pot realiza în diferite moduri: reazeme simple, articulații, culise, prinderea prin fire sau diferite combinații ale acestora.

Studiul sistemelor de corpuri se face separând toate corpurile și studiind mișcarea fiecărui corp cu ajutorul teoremelor generale ale dinamicii (teorema impulsului și a momentului cinetic) care se aplică fiecărui corp în parte.

Teorema energiei se aplică în general întregului ansamblu de corpuri (ca și pentru un sistem de puncte materiale) și servește în general, pentru verificarea rezultatelor obținute prin aplicarea teoremelor generale, deoarece așa cum s-a arătat, această teoremă nu conduce la o relație independentă de celelalte relații date de teoremele generale.

În cazul în care mișcarea sistemului de corpuri *depinde de un singur parametru* (sistem cu un singur grad de libertate) pentru determinarea mișcării se recomandă să se aplice *teorema energiei cinetice pentru întregul sistem*, deoarece în general lucrul mecanic al *forțelor interioare* sistemului este nul (cu excepția *forțelor și cuplurilor de frecare*, în cazul în care punctele lor de aplicație se deplasează și care pot fi considerate ca forțe exterioare, direct aplicate).

Astfel:

- a) în cazul forțelor de frecare de alunecare (care ating valoarea lor maximă atunci când punctele de contact ale corpurilor se deplasează) și în cazul cuplurilor de frecare de rostogolire, *lucrul mecanic este negativ*.
- b) în cazul legăturilor cu fire inextensibile, *lucrul mecanic al tensiunilor din fire este nul*; firele au rolul de a transmite vitezele de la unele puncte ale unui corp la punctele altui corp, fapt de care trebuie să de țină seama în aplicații.

La ecuațiile furnizate de teoremele generale se adaugă

- *condițiile geometrice de legătură*
- *ecuațiile fizice corespunzătoare ale legăturilor cu frecare.*

A p l i c a ț i e

Se consideră sistemul format din trei corpuri de greutate G_1 , G_2 și respectiv G_3 . Corpurile sunt legate între ele prin fire inextensibile ca în figura 13.12. Sistemul este pus în mișcare de greutatea primului corp care are la un anumit moment deplasarea h_1 , viteza v_1 și accelerația a_1 . Ca o consecință a legăturilor ,

corpul al doilea va avea o mișcare de rotație, iar corpul al treilea o mișcare plan-paralelă pe planul înclinat fără alunecare (se neglijează frecările în lagărul O_2).

Se cere:

- să se studieze mișcarea sistemului (legea de mișcare a fiecărui corp)
- să se determine forțele de legătură (reacțiunile și tensiunile din fire);
- să se determine coeficientul de alunecare minim pentru ca corpul (3) să nu alunece pe planul înclinat în timpul mișcării.

Rezolvare

Deoarece mișcarea sistemului este determinată de un singur parametru: deplasarea h_1 a corpului (1), pentru studiul acesteia se poate folosi teorema energiei cinetice care se aplică întregului sistem de corpuri.

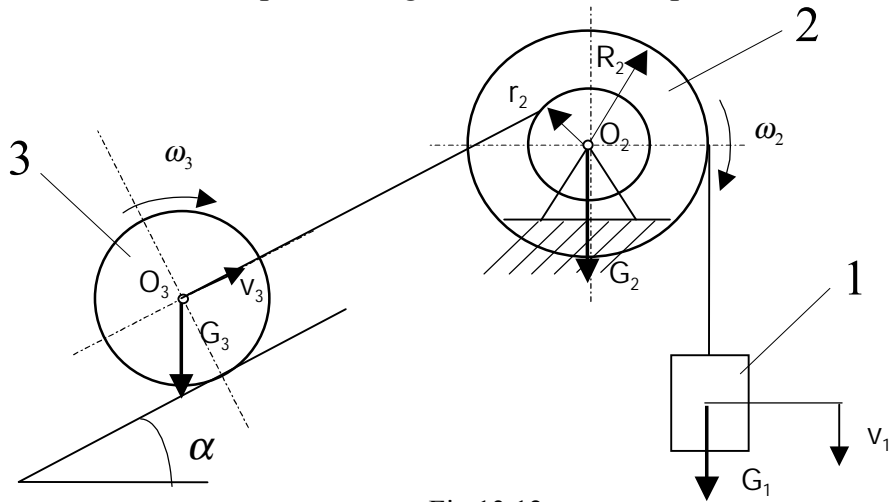


Fig.13.12

Energia cinetică a sistemului este egală cu suma energiilor cinetice ale celor trei corpuri, având respectiv mișcarea de: translație , rotație și plan-paralelă:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$$

Înlocuind momentul de inerție J_2 al corpului 2 și J_3 al corpului 3 considerate omogene: $J_2 = \frac{M_2 R_2^2}{2}$, $J_3 = \frac{M_3 R_3^2}{2}$

și ținând seama de analiza cinematică din tabelul de mai jos se obține următoarea expresie a energiei cinetice:

$$E = \frac{1}{2} A v_1^2$$

unde s-a notat cu A expresia constantă: $A = \frac{1}{2g} \left(2G_1 + G_2 + 3G_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right)$.

Corp	Felul mișcării	Deplasare	Viteză	Accelerație
1	Translație	h_1	$v_1 = \dot{h}_1$	$a_1 = \dot{v}_1 = \ddot{h}_1$
2	rotație	$\varphi_2 = \frac{h_1}{R_2}$	$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}$	$\dot{\omega}_2 = \varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2}$
3	Plan - paralelă	$h_3 = \varphi_2 r_2 = \frac{h_1 r_2}{R_2}$ $\varphi_3 = \frac{h_3}{R_3} = \frac{h_1 r_2}{R_3 R_2}$	$v_3 = \omega_2 r_2 = \frac{v_1}{R_2} r_2$ $\omega_3 = \frac{v_1 r_2}{R_3 R_2}$	$a_3 = \frac{a_1}{R_2} r_2$ $\dot{\omega}_3 = \varepsilon_3 = \frac{a_1 r_2}{R_3 R_2}$

Lucrul mecanic total este dat de forțele exterioare (greutățile G_1 și G_3 al căror punct de aplicație se deplasează) și de cuplul de frecare $M_r = sN$ (fig.13.8).

Se observă că forța de frecare T dă lucru mecanic nul deoarece punctul de contact dintre roata 3 și plan nu se deplasează:

$$L_{0-1} = G_1 h_1 - G_3 h_3 \sin \alpha - M_r \varphi_3 = G_1 h_1 - \frac{h_1 r_2}{R_2} \left(G_3 \sin \alpha + \frac{1}{R_3} s G_3 \cos \alpha \right) = B h_1$$

unde s-a notat cu B expresia constantă: $B = G_1 - \frac{r_2}{R_2} \left(G_3 \sin \alpha + \frac{s}{R_3} G_3 \cos \alpha \right)$

Derivând expresiile lui E și L și ținând seama de teorema energiei:

$dE = dL$ se obține accelerația:

$$a_1 = \frac{B}{A} = \frac{G_1 - \frac{r_2}{R_2} \left(G_3 \sin \alpha + \frac{s}{R_3} G_3 \cos \alpha \right)}{\frac{1}{2} \left(2G_1 + G_2 + 3G_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right)} g$$

b) Se izolează cele trei corpuri (fig13.8) și se scrie, pentru fiecare teorema impulsului și a momentului cinetic, sub forma proiecțiilor pe axe:

Pentru corpul 1:

- teorema impulsului:

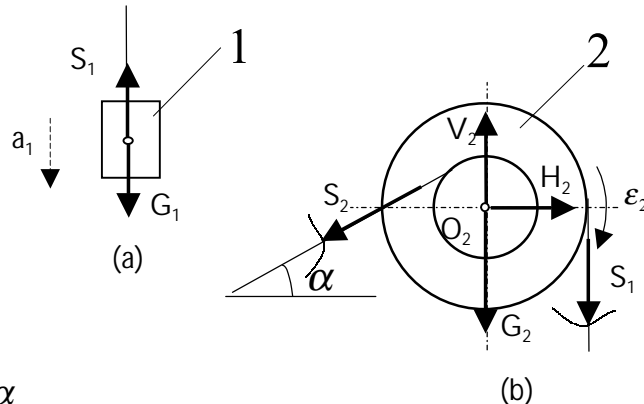
$$\frac{G_1}{g} a_1 = G_1 - S_1$$

Pentru corpul 2:

- teorema impulsului:

$$0 = H - S_2 \cos \alpha$$

$$0 = V - G_2 - S_1 - S_2 \sin \alpha$$



- teorema momentului cinetic:

$$\frac{G_2}{g} \cdot \frac{R_2^2}{2} \cdot \frac{a_1}{R_2} = S_1 R_2 - S_2 r_2$$

Pentru corpul 3:

- teorema impulsului:

$$\frac{G_3}{g} \frac{r_2}{R_2} a_1 = -T - G_3 \sin \alpha + S_2$$

$$O = N - G_3 \cos \alpha$$

- teorema momentului cinetic:

$$\frac{G_3}{g} \cdot \frac{R_3^2}{2} \frac{r_2}{R_2 R_3} a_1 = T R_3 - s N$$

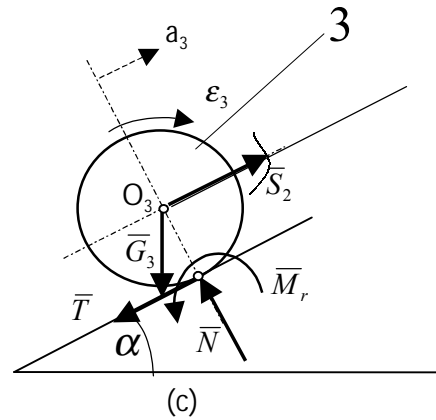


Fig.13.13

S-a obținut astfel un sistem de șapte ecuații cu șapte necunoscute a_1 , S_1 , S_2 , H , V , N și T , care se rezolvă prin metoda substituției.

Se obține:

$$a_1 = \frac{B}{A} = \frac{G_1 - \frac{r_2}{R_2} \left(G_3 \sin \alpha + \frac{s}{R_3} G_3 \cos \alpha \right)}{\frac{1}{2} \left(2G_1 + G_2 + 3G_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right)} g$$

$$S_1 = G_1 \left(1 - \frac{a_1}{g} \right); \quad S_2 = G_1 \frac{R_2}{r_2} \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) - \frac{G_2 R_2}{g r_2} a_1$$

$$H = S_2 \cos \alpha = \left[G_1 \frac{R_2}{r_2} \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) - \frac{G_2 R_2}{g r_2} a_1 \right] \cos \alpha$$

$$V = G_2 + S_1 + S_2 \sin \alpha = G_1 \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) \left(1 + \frac{R_2}{r_2} \sin \alpha \right) + G_2 \left(1 - \frac{R_2}{r_2} \frac{a_1}{g} \sin \alpha \right)$$

$$N = G_3 \cos \alpha; \quad T = G_1 \frac{R_2}{r_2} \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) - G_2 \frac{R_2}{r_2} \frac{a_1}{g} - G_3 \left(\sin \alpha + \frac{r_2}{R_2} \frac{a_1}{g} \right)$$

c) Pentru a determina coeficientul de alunecare minim pentru ca corpul (3) să nu alunece pe planul înclinat se scrie condiția:

$$T \leq T_{max}; \quad T \leq \mu N$$

de unde rezultă:

$$\mu \geq \frac{1}{\cos \alpha} \left[\frac{G_1 R_2}{G_3 r_2} \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) - \frac{G_2 R_2}{G_3 r_2} \frac{a_1}{g} - \left(\sin \alpha + \frac{r_2}{R_2} \frac{a_1}{g} \right) \right].$$

CAPITOLUL 14

MIȘCĂRI IMPULSIVE (PERCUTANTE)

14.1. Noțiuni introductive și ipoteze

În mișcările diferitelor puncte materiale, studiate în capitolele precedente, s-a considerat că vitezele acestora sunt funcții continue de timp. În practică însă se constată că există și mișcări pentru care vitezele (și deci impulsurile) variază brusc, schimbându-și atât valoarea cât și direcția într-un timp foarte scurt.

Se poate afirma că *ciocnirile sau mișcările impulsive* sunt mișcări mecanice care se produc cu *variații foarte mari ale impulsurilor* într-un interval de timp foarte scurt. Exemple de acest fel sunt: baterea unui cui, tamponarea a două autovehicule, lovirea unei piese cu ciocan de forjă, frânarea bruscă a unui corp care efectuează o mișcare (suprimarea unei legături, în general nu produce o variație bruscă a impulsului, ci una continuă și nu poate fi considerată o mișcare impulsivă).

În timpul foarte scurt cât durează ciocnirea, între corpurile aflate în contact se dezvoltă forțe a căror intensitate, crește la început foarte repede (atingând valori foarte mari) după care descrește la fel de repede (fig.14.1); aceste forțe sunt numite *forțe percutante*.

Percuția este o mărime vectorială, care *exprimă acțiunea forțelor în timpul ciocnirii percutante* și care se definește prin relația:

$$\bar{P} = \int_{t'}^{t''} \bar{F} dt \quad (14.1)$$

unde \bar{F} este rezultanta tuturor forțelor percutante care acționează în intervalul de timp cât durează fenomenul de ciocnire (t', t'').

Pentru a determina relația dintre percuție și variația impulsului în timpul ciocnirii se pornește de la relația fundamentală a dinamicii, scrisă pentru un punct A de masă m :

$$d\bar{H} = m\bar{a} = \bar{F} \quad \text{sau} \quad m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}. \quad (14.2)$$

de unde rezultă variația elementară a impulsului (considerând masa constantă):

$$m d\bar{v} = \bar{F} dt \quad (14.3)$$

Integrând pe intervalul (t'', t') cât durează ciocnirea și ținând seama de relația (14.1), se obține expresia percuției :

$$\bar{P} = m\bar{v}'' - m\bar{v}' \quad (14.4)$$

unde \bar{v}' este viteza la începutul ciocnirii, iar \bar{v}'' cea corespunzătoare de la sfârșitul ciocnirii

Notând cu H' și H'' impulsurile la momentele t' și respectiv t'' , relația (14.4) se poate scrie:

$$\bar{P} = \bar{H}'' - \bar{H}' \quad (14.5)$$

Relația (14.5) arată că *percuția măsoară de fapt variația impulsului în timpul ciocnirii*.

Se definește *forța percutantă medie* ca fiind o forță de mărime constantă \bar{F}_m , care dacă ar acționa pe durata ciocnirii ar produce același efect ca și percuția \bar{P} , adică:

$$\bar{P} = \int_{t'}^{t''} \bar{F} dt = \bar{F}_m (t'' - t') \quad \text{sau} \quad \bar{F}_m = \frac{1}{t'' - t'} \int_{t'}^{t''} \bar{F} dt \quad (14.6)$$

În figura 14.1 este prezentată schematic variația *forței percutante* și *forța percutantă medie*. Aria cuprinsă sub curba *forței percutante* poate fi interpretată ca fiind egală cu mărimea percuției. Cele două suprafețe hașurate în sensuri opuse, din figura 14.1 au aceeași arie. În figura 14.2 este prezentată grafic relația (14.5) și forța percutantă medie \bar{F}_m conform (14.6).

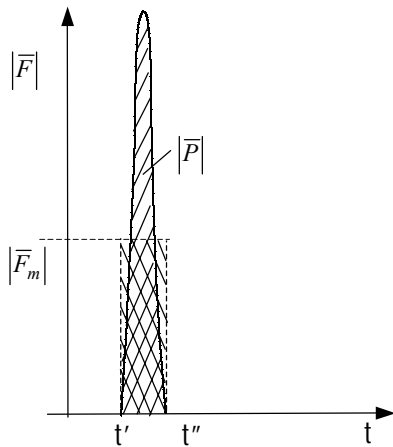


Fig.14.1

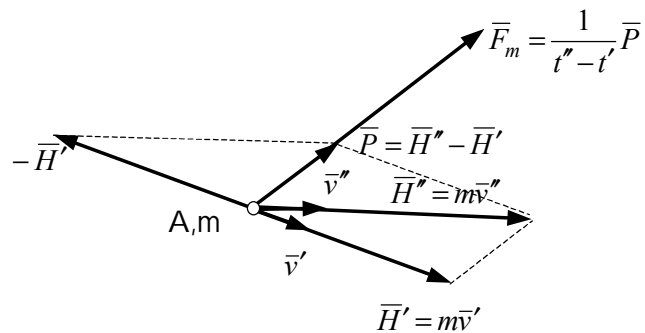


Fig.14.2

În studiul fenomenului de ciocnire se fac următoarele *ipoteze simplificatoare*:

1. timpul cât durează ciocnirea este foarte scurt (de ordinul fracțiunilor de secundă), astfel încât se poate considera că în acest interval, vitezele celor două corpuri sunt egale;
2. în timpul ciocnirii se produc forțe percutante foarte mari, care suferă variații rapide, de aceea se neglijează celelalte forțe (greutatea corpurilor, forțele exterioare, etc.);

3. în timpul ciocnirii (datorită duratei foarte scurte a fenomenului), se poate considera că toate corpurile rămân pe loc;
4. pentru forțele de legătură percutante se aplică principiul acțiunii și reacțiunii;
5. în timpul ciocnirii se consideră corpurile deformabile local (deci se renunță la ipoteza de rigiditate).

14.2. Teoremele generale în timpul ciocnirii

14.2.1. Teorema impulsului

Conform relației (14.4), pentru un punct material A_i de masă m_i , se poate scrie:

$$m_i \bar{v}_i'' - m_i \bar{v}_i' = \bar{P}_i. \quad (14.7)$$

Însumând pentru toate punctele din sistem rezultă:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i'' - \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i' = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \quad (14.8)$$

sau, ținând seama de definiția impulsului unui sistem, se obține **teorema impulsului pentru ciocniri în cazul unui sistem de puncte materiale**:

$$\bar{H}'' - \bar{H}' = \sum \bar{P}_i, \quad (14.9)$$

care se enunță astfel: “în timpul ciocnirii variația impulsului sistemului de puncte materiale este egală cu suma percuțiilor exterioare (date și de legătură)”.

Se observă faptul că suma percuțiilor interioare este nulă, percuțiile interioare fiind egale și de sens opus două câte două.

Deoarece:

$$\begin{aligned} \sum m_i \bar{r}_i &= M\bar{p} \\ \bar{H} &= \sum m_i \bar{v}_i = \sum m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum m_i \bar{r}_i) = \frac{d}{dt} (M\bar{p}) = M\dot{\bar{p}} \end{aligned}$$

relația (14.8) devine:

$$M\dot{\bar{p}}'' - M\dot{\bar{p}}' = \sum \bar{P}_i, \quad (14.10)$$

adică **teorema impulsului pentru ciocniri sub forma mișcării centrului de masă pentru un sistem de puncte materiale** care se enunță astfel: “centrul de masă al unui sistem de puncte materiale, care participă la un fenomen percutant, se comportă ca și un punct material de masă egală cu masa totală a sistemului, care ar fi acționat rezultanta forțelor percutante exterioare”.

Dacă asupra sistemului de puncte nu acționează nici o forță percutantă exterioară, centrul de masă al sistemului nu este afectat în mișcarea sa de fenomenul percutant la care participă punctele sistemului (de exemplu centrul de masă a două corpuri libere ce se ciocnesc).

14.2.2. Teorema momentului cinetic

Dacă se înmulțește vectorial relația (14.7), la stânga, cu vectorul de poziție \bar{r}_i al punctului A_i și se însumează pentru toate punctele din sistem, rezultă:

$$\sum (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i'') - \sum (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i') = \sum (\bar{r}_i \times \bar{P}_i), \quad (14.11)$$

sau, ținând seama de definiția momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale, se obține **teorema momentului cinetic față de un punct O, în cazul ciocnirilor:**

$$\bar{K}_O'' - \bar{K}_O' = \sum (\bar{r}_i \times \bar{P}_i) \quad (14.12)$$

care se enunță astfel: “în timpul ciocnirii, variația momentului cinetic în raport cu un punct O pentru un sistem de puncte materiale, este egală cu suma momentelor percuțiilor exterioare calculate în raport cu același punct O”.

Relația (14.12) poate fi pusă și sub forma **teoremei momentului cinetic în mișcarea sistemului față de centrul de masă:**

$$\bar{K}_C'' - \bar{K}_C' = \sum (\bar{r}_{ic} \times \bar{P}_i) \quad (14.13)$$

care se enunță în mod corespunzător: “în timpul ciocnirii, variația momentului cinetic în cazul unui sistem de puncte materiale, în raport cu centrul de masă C, este egală cu suma momentelor percuțiilor exterioare calculate în raport cu același punct C.”

Observații:

- În timpul ciocnirii nu se poate aplica teorema energiei cinetice $dE = dL$, deoarece datorită fenomenelor de deformare plastică care se produc în timpul ciocnirii, o parte a energiei cinetice a sistemului se transformă în alte forme de energie (cum ar fi de exemplu: energia calorică, de deformare, luminoasă, etc).
- Pentru studiul mișcării în cazul ciocnirii a două puncte materiale sau a două corpuri (bile) aflate în mișcare de translație, se recomandă aplicarea teoremei impulsului, iar pentru studiul mișcării unui rigid cu o axă fixă, aplicarea teoremei momentului cinetic în raport cu axa respectivă.

14.2.3. Considerații energetice

Scriind teorema impulsului (14.7) pentru un punct A_i :

$$m_i \bar{v}_i'' - m_i \bar{v}_i' = \bar{P}_i.$$

care dacă se înmulțește scalar cu vectorul viteză \bar{v}_i'' și se însumează pentru toate punctele din sistem, rezultă:

$$\sum_i m_i (\bar{v}_i'' - \bar{v}_i') \cdot \bar{v}_i'' = \sum_i \bar{P}_i \cdot \bar{v}_i'' \quad (14.14)$$

și deoarece are loc egalitatea evidentă:

$$(\bar{v}_i'' - \bar{v}_i') \cdot \bar{v}_i'' = \frac{1}{2}(\bar{v}_i'' - \bar{v}_i')^2 + \frac{1}{2} \cdot \bar{v}_i''^2 - \frac{1}{2} \cdot \bar{v}_i'^2$$

se obține:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{v}_i''^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{v}_i'^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{v}_i' - \bar{v}_i'')^2 = \sum_i \bar{P}_i \cdot \bar{v}_i'' \quad (14.15)$$

sau:
$$E'' - E' + E_p = \sum_i \bar{P}_i \bar{v}_i'', \quad (14.16)$$

unde s-a notat cu:

- $\frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{v}_i'^2 = E'$ energia cinetică a sistemului la momentul inițial t' ;
- $\frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{v}_i''^2 = E''$ energia cinetică a sistemului la momentul final t'' ;
- $\frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{v}_i'' - \bar{v}_i')^2 = E_p$ energia cinetică a sistemului corespunzătoare vitezelor pierdute datorită ciocnirii, adică energia cinetică a sistemului dacă fiecare punct al său ar avea viteza pierdută: $(\bar{v}_i'' - \bar{v}_i')$.

În acest caz teorema energiei cinetice, adică relația (14.16), se scrie:

$$E_p - (E' - E'') = \sum_i \bar{P}_i \cdot \bar{v}_i'' \quad (14.17)$$

În cazul unui sistem rigid fără frecare, percuțiile exterioare (reacțiunile normale de percuție) sunt perpendiculare pe vitezele după ciocnire: $\bar{P}_i \perp \bar{v}_i''$ și $\bar{v}_i'' \cdot \bar{P}_i = 0$, deci:

$$E' - E'' = E_p \quad (14.18)$$

care reprezintă **teorema lui Carnot** :” în cazul sistemelor rigide fără frecare, variația energiei cinetice în timpul unei ciocniri, adică pierderea de energie cinetică în cazul ciocnirii, este egală cu energia cinetică corespunzătoare vitezelor pierdute”.

14.3. Ciocnirea centrică a două sfere.

Studiul mișcării. Coeficientul de restituire.

Se consideră două sfere (bile) având centrele O_1 și O_2 și masele m_1 și m_2 care, înainte de ciocnire, se deplasează după linia centrelor, cu vitezele v_1' și respectiv v_2' , unde $v_1' > v_2'$ (fig.14.3). Dorim să calculăm vitezele v_1'' și v_2'' ale celor două sfere după ciocnire.

Aplicând teorema impulsului proiectată pe linia centrelor și observând că nu intervin decât percuțiile de legătură, care sunt egale ca mărime și de sens contrar ($\bar{P}_{12} = -\bar{P}_{21}$), rezultă:

$$H'' - H' = 0$$

Sau: $H' = H''$, (14.19)

adică impulsul sistemului se conservă:

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1'' + m_2 v_2''. \quad (14.20)$$

Pentru a obține o relație în plus se ține seama de deformabilitatea celor două corpuri.

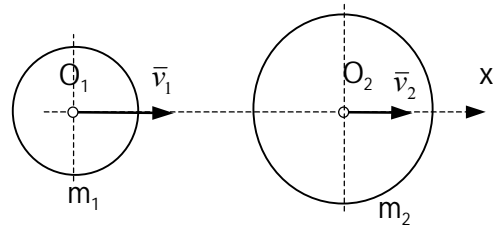


Fig.14.3

Este necesară o analiză atentă a fenomenului de ciocnire în timpul căruia se deosebesc (fig.14.4) două faze:

a) faza de comprimare

b) faza de destindere

Se acceptă faptul că după ciocnire, mișcarea bilelor este tot de translație.

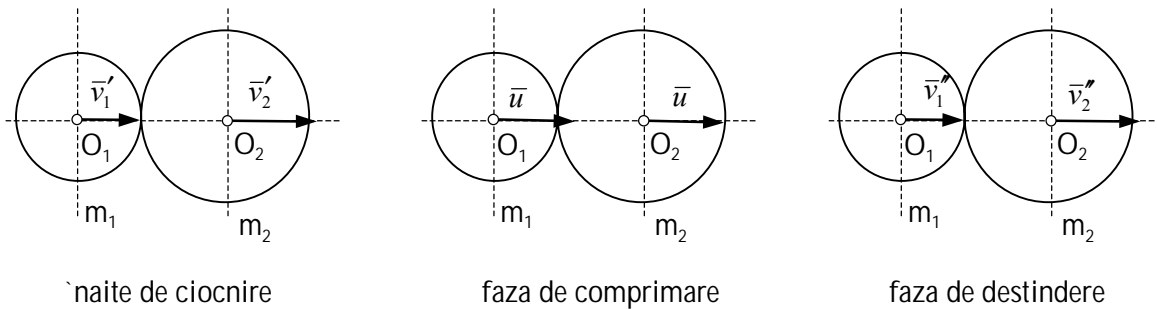


Fig.14.4

a) Faza de comprimare se caracterizează prin aceea că sferile se comprimă local și ajung la sfârșitul fazei să aibă aceeași viteză u și deformația maximă. În timpul acestei faze (care este foarte scurtă) asupra fiecărei sfere acționează o percuție de legătură notată cu P_C pe care poate o putem considera constantă, numită *percuția de comprimare* (fig.14.5).

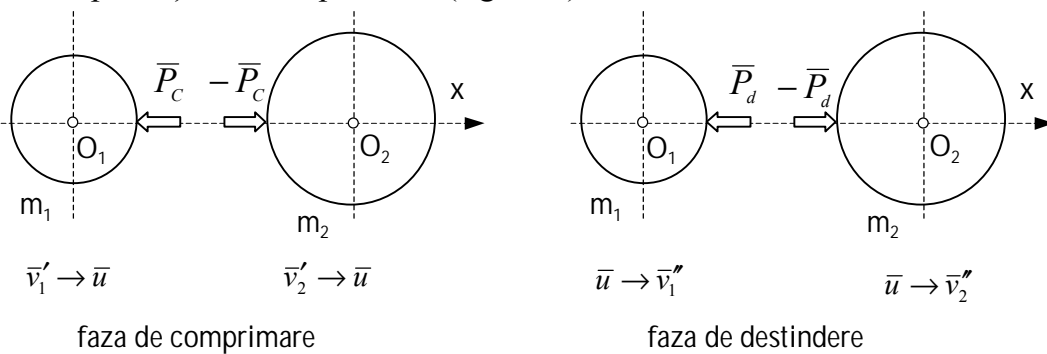


Fig.14.5

Fig.14.6

Aplicând teorema impulsului proiectată pe linia centrelor pentru această fază (de la începutul până la sfârșitul fazei de comprimare), rezultă pentru cele două sfere ecuațiile:

$$\begin{aligned} m_1 u - m_1 v_1' &= -P_C, \\ m_2 u - m_2 v_2' &= P_C, \end{aligned} \quad (14.21)$$

care rezolvate, furnizează expresiile necunoscutelor:

$$u = -\frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2} \quad (14.22)$$

$$P_C = \frac{m_1 m_2 (v_1' - v_2')}{m_1 + m_2} \quad (14.23)$$

c) *Faza de destindere* se caracterizează prin aceea că sferile se decompimă local și își modifică vitezele de la viteza comună u la vitezele v_1'' și respectiv v_2'' . În această fază (care este la fel foarte scurtă) se poate considera că percuția de legătură este constantă (și este numită *percuție de destindere* P_d , acționând asupra fiecărei sfere) (fig.14.6).

Aplicând teorema impulsului în proiecții pe linia centrelor, între începutul și sfârșitul fazei de destindere, pentru cele două sfere, rezultă ecuațiile:

$$m_1 v_1'' - m_1 u = -P_d, \quad m_2 v_2'' - m_2 u = P_d, \quad (14.24)$$

ale căror soluții sunt:

$$u = \frac{m_1 v_1'' + m_2 v_2''}{m_1 + m_2} \quad (14.25)$$

$$P_d = \frac{m_1 m_2 (v_2'' - v_1'')}{m_1 + m_2}. \quad (14.26)$$

Se definește *coeficientul de restituire* (sau coeficientul de elasticitate la ciocnire) raportul dintre percuția de destindere P_d și de comprimare P_C :

$$k = P_d / P_C \quad (14.27)$$

Introducând valorile obținute pentru cele două percuții (14.23) și (14.26) în formula (14.27) se obține expresia coeficientului de restituire:

$$k = (v_2'' - v_1'') / (v_1' - v_2') \quad (14.28)$$

Prin urmare, se poate defini *coeficientul de restituire ca fiind raportul dintre viteza relativă după ciocnire* $(v_2'' - v_1'')$ și *viteza relativă înainte de ciocnire* $(v_1' - v_2')$. În ceea ce privește valorile coeficientului de restituire k sunt posibile următoarele situații:

- 1) $k = 1$ - ciocnirea se numește *elastică*; în acest caz $P_d = P_C$ și cele două sfere nu suferă deformații permanente în urma ciocnirii;
- 2) $k = 0$ - ciocnirea se numește *plastică*. În aceste caz sferele rămân lipite una de cealaltă și se mișcă împreună cu viteza $v_1'' = v_2''$. (de exemplu, când una din sfere este din plumb);
- 3) $0 < k < 1$ - ciocnirea se numește *naturală* și sferele suferă parțial deformații permanente în urma ciocnirii. Este cazul cel mai răspândit în practică.

Sunt date în continuare câteva valori ale acestui coeficient, care caracterizează din punctul de vedere elastic fenomenul de ciocnire pentru diferite materiale: *sticlă-sticlă*: $k = 15/16$, *oțel-oțel*: $k = 5/9$, *lemn-lemn*: $k = 1/2$, *argilă-argilă*: $k = 0$.

Din cele prezentate mai sus rezultă că pentru studiul fenomenului de ciocnire centrică a două sfere se folosesc relațiile (14.20) și (14.28), precizându-se de obicei, valoarea coeficientului de restituire k . Din cele două ecuații rezultă vitezele sferelor după ciocnire.

$$v_1'' = v_1' - \frac{(v_1' - v_2')(1+k)}{1 + \frac{m_1}{m_2}}; \quad v_2'' = v_2' + \frac{(v_1' - v_2')(1+k)}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (14.29)$$

Pentru calculul mărimii percuției totale P care acționează asupra fiecărei sfere, se observă că aceasta reprezintă suma percuțiilor din fazele de comprimare și de destindere. Utilizând relațiile (14.23), (14.26) și (14.27) rezultă:

$$P = P_c + P_d = P_c + kP_c = (1+k)(v_1' - v_2') \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (14.30)$$

14.4. Determinarea coeficientului de restituire

Pentru determinarea coeficientului de restituire k se poate recurge la o experiență simplă cu două pendule A și B , având aceeași lungime L , și masele m_1 și m_2 (fig. 14.7). Pendulul A este lăsat să cadă liber din poziția A_0 , care face unghiul α cu verticala și se ciocnește cu pendulul B care inițial se afla în poziția B_1 , în repaus pe verticală. În urma ciocnirii pendulul se depărtează cu unghiul β față de verticală (poziția OB_2).

Studiul problemei implică trei faze:

- mișcarea sferelor înainte de ciocnire*
- ciocnirea propriu-zisă*
- mișcarea sferelor după ciocnire.*

a. Mișcarea înainte de ciocnire.

Sfera B fiind în repaus rezultă $v_B' = v_2' = 0$.

Pentru a găsi viteza sferei A înainte de ciocnire $v_A' = v_1'$ se aplică teorema energiei cinetice în mișcarea acestei sfere din poziția A_0 în poziția A_1 :

$$E_{A_1} - E_{A_0} = L_{A_0 A_1},$$

$$\text{unde:} \quad E_{A_0} = 0, \quad E_{A_1} = \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2; \quad L_{A_0 A_1} = m_1 g L (1 - \cos \alpha) \quad (14.31)$$

$$\text{și rezultă:} \quad v_1' = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}. \quad (14.32)$$

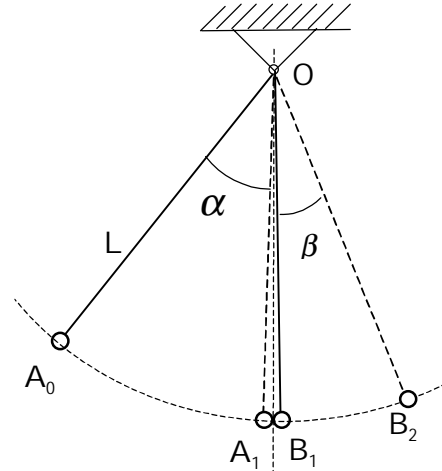


Fig.14.7

b. Ciocnirea propriu-zisă.

Aplicând teorema impulsului proiectată pe linia centrelor pendulelor și observând că intervin numai percuțiile de legătură, se ajunge la concluzia că impulsul sistemului (de două sfere) se conservă, adică: $H'_x = H''_x$ sau:

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v''_1 + m_2 v''_2.$$

Expresia coeficientului de restituire este: $k = \frac{v''_2 - v''_1}{v'_1 - v'_2}$. (14.33)

c. Mișcarea după ciocnire.

Aplicând teorema energiei cinetice pentru sfera B:

$$E_{B_2} - E_{B_1} = L_{B_1 B_2},$$

unde: $E_{B_1} = \frac{1}{2} m_2 (v''_2)^2$, $E_{B_2} = 0$; $L_{B_1 B_2} = -m_2 g L (1 - \cos \beta)$

rezultă: $v''_2 = \sqrt{2gL(1 - \cos \beta)}$. (14.34)

Din relația de conservare a impulsurilor avem:

$$v''_1 = v'_1 - \frac{m_2}{m_1} v'_2 = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)} - \frac{m_2}{m_1} \sqrt{2gL(1 - \cos \beta)}. \quad (14.35)$$

Introducând expresiile vitezelor obținute în expresia coeficientului de restituire se obține:

$$k = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha}} - 1 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - 1. \quad (14.36)$$

14.5. Ciocnirea a două corpuri solide.

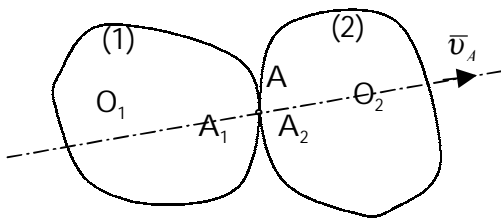


Fig.14.8

Se consideră două corpuri oarecare notate cu (1) și (2), (fig.14.8) și aflate în mișcare generală, care se ciocnesc în punctul A (A_1 și respectiv A_2). Corpurile sunt raportate la sistemele de axe cu originea în punctele O_1 și respectiv O_2 .

Se deosebesc două cazuri:

a) Corpurile nu au legături cu mediul fix (sunt libere).

Datele problemei sunt:

- distribuțiile de viteze ale celor două corpuri (1) și (2), înainte de ciocnire (în momentul t'), adică: \bar{v}'_1 , $\bar{\omega}'_1$ și \bar{v}'_2 , $\bar{\omega}'_2$
- coeficientul de restituire k și direcția \bar{v}_A a normalei în punctul de ciocnire, prin cosinuzii directori (l_A , m_A , n_A), față de un sistem de axe oarecare.

Necunoscutele problemei sunt:

- distribuțiile vitezelor corpurilor după ciocnire (în momentul t''), adică \bar{v}_1'' , $\bar{\omega}_1''$ și \bar{v}_2'' , $\bar{\omega}_2''$ (echivalente cu 12 necunoscute scalare),
- percuția totală din punctul A de ciocnire: \bar{P}_A (echivalentă cu trei necunoscute scalare).

Rezultă deci în total 15 necunoscute scalare și 13 ecuații și anume:

- 12 ecuații, rezultând din aplicarea teoremelor generale (a impulsului și a momentului cinetic), pentru fiecare corp în parte, prin proiecțiile pe axele sistemului ales;
- o ecuație dată de relația coeficientului de restituire sub forma (14.28), între componentele normale ale vitezelor punctelor de contact la ciocnire.

Celelalte două ecuații, necesare pentru determinarea necunoscutelor problemei, se obțin diferit pentru următoarele două cazuri:

- dacă corpurile sunt perfect netede în punctul de contact A , percuția \bar{P}_A are direcția normalei comune din acest punct, deci $\bar{P}_A \times \bar{v}_A = 0$, sau:

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ l_A & m_A & n_A \end{vmatrix} = 0, \text{ sau } \frac{P_x}{l_A} = \frac{P_y}{m_A} = \frac{P_z}{n_A},$$

obținându-se astfel două ecuații scalare.

- dacă corpurile sunt aspre și nu are loc alunecarea între ele, componentele vitezelor punctelor de contact ale celor două corpuri A_1 și A_2 din planul tangent comun, după ciocnire (din momentul t''), sunt egale: $(\bar{v}_{A_1}'')^T = (\bar{v}_{A_2}'')^T$.

b) Corpurile au legături cu reperul fix

În acest caz, datorită legăturilor lor exterioare, se micșorează numărul gradelor de libertate cinematică corespunzătoare ale corpurilor. Rezultă astfel o serie de relații geometrice (cinematice), privind distribuțiile de viteze ale corpurilor. Vor apărea în plus, un număr corespunzător de necunoscute legate de percuțiile forțelor din legături.

A p l i c a ț i e

O bară omogenă (1), de greutate G și de lungime $2L$, articulată la unul din capete, în punctul O , este lăsată să cadă liber (sub acțiunea gravitației) din poziția orizontală. Când ajunge în poziția verticală, se lovește de un corp (2) fixat la distanța $OA = h < 2L$. Dacă coeficientul de restituire este k și se neglijează frecarea din articulație, se cere să se determine valoarea maximă a unghiului α de revenire a barei (figura 14.9).

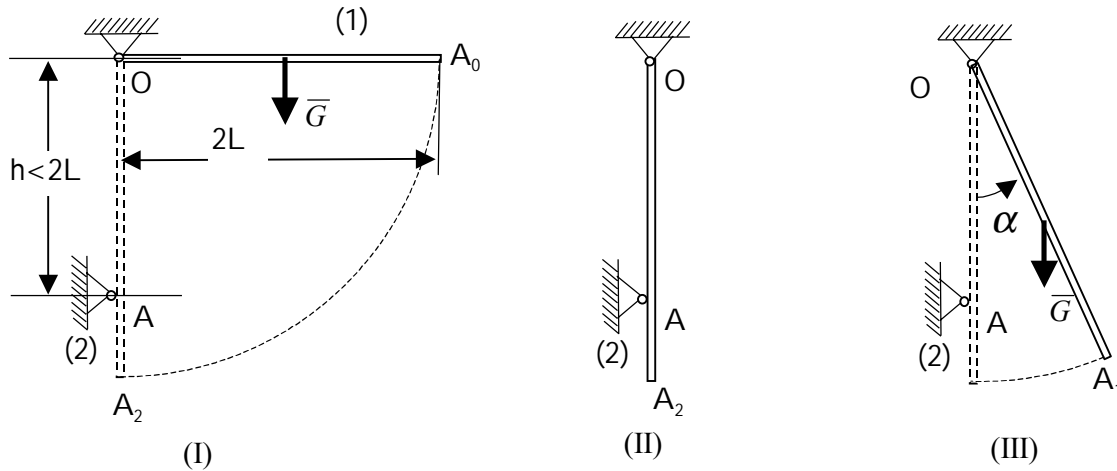


Fig.14.9

Rezolvare

Se studiază mișcarea corpului (1) în cele trei etape (figura 14.9): înainte de ciocnire, în timpul ciocnirii și după ciocnire.

- 1) În prima etapă (înainte de ciocnire) se determină distribuția de viteze a celor două corpuri la momentul t' , când începe ciocnirea; avem astfel: $v'_2 = 0$, iar ω'_1 se determină din teorema energiei cinetice aplicată corpului (1), adică:

$$E_A - E_{A_0} = L_{A_0 A},$$

unde: $E_{A_0} = 0$ ($v_{A_0} = 0$), $E_{A_1} = \frac{1}{2} J_{Oz} (\omega'_1)^2$, $L_{A_0 A} = G \cdot L$;

deci: $\frac{1}{2} J_{Oz} (\omega'_1)^2 = G \cdot L$, $\left(J_{Oz} = \frac{Gl^2}{3g} \right)$, prin urmare: $\omega'_1 = \sqrt{\frac{2GL}{J_{Oz}}}$.

- 2) În etapa a doua (în timpul ciocnirii) se folosește relația coeficientului de restituire: $k = \frac{v''_2 - v''_1}{v'_1 - v'_2}$, în care dacă înlocuim expresiile vitezelor:

$$v'_1 = \omega'_1 h; \quad v'_2 = 0; \quad v''_1 = -\omega''_1 h; \quad v''_2 = 0,$$

se obține: $k = \frac{\omega''_1}{\omega'_1}$, adică: $\omega''_1 = k \omega'_1 = k \sqrt{\frac{2GL}{J_{Oz}}}$.

- 3) În etapa a treia (după ciocnire) unghiul α se determină aplicând teorema energiei (sub forma finită) între pozițiile de la momentul t'' și poziția finală A_1 pentru corpul (1):

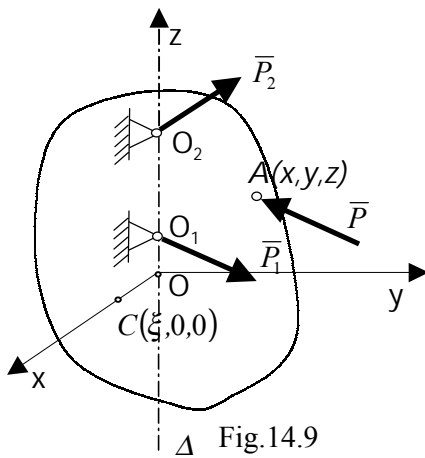
$$E_{A_1} - E_A = L_{A A_1}, \text{ unde: } E_{A_1} = 0, \quad E_A = \frac{1}{2} J_{Oz} (\omega''_1)^2, \quad L_{A A_1} = -GL(1 - \cos \alpha)$$

și deci: $\frac{1}{2} J_{Oz} (\omega''_1)^2 = GL(1 - \cos \alpha)$

unde înlocuind pe ω''_1 se obține: $\cos \alpha = 1 - k^2$, $\alpha = \arccos(1 - k^2)$.

14.6. Ciocnirea unui corp solid aflat într-o mișcare de rotație. Centrul de percție

Se consideră un rigid de masă M (fig. 14.9) având două puncte fixe O_1 și O_2 ($O_1O_2=h$) și care în mișcarea sa de rotație, suferă o ciocnire, echivalentă cu aplicarea unei percții \bar{P} (P_x, P_y, P_z) într-un punct al său $A(x, y, z)$. Se consideră de asemenea un sistem de axe, $Oxyz$, ales solidar cu rigidul, a cărui axă Oz trece prin punctele O_1 și O_2 (axa de rotație), iar axa Ox trece prin centrul de masă al rigidului ($OC = \xi$). Să notăm cu ω' viteza unghiulară a rigidului înainte de ciocnire. Ne propunem să determinăm viteza unghiulară ω'' a rigidului imediat după ciocnire și percțiile \bar{P}_1 (P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) și \bar{P}_2 (P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) care se dezvoltă în punctele O_1 și O_2 precum și poziția centrului de percție.



Pentru rezolvarea problemei se aplică teoremele generale: teorema impulsului și teorema momentului cinetic, prezentate anterior, care pentru acest caz se scriu:

$$\bar{H}'' - \bar{H}' = \bar{P} + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \quad (14.37)$$

$$\bar{K}_O'' - \bar{K}_O' = \bar{r} \times \bar{P} + \bar{r}_1 \times \bar{P}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{P}_2$$

unde:

$$\bar{r} = \overline{OA} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}; \quad \bar{r}_1 = \overline{OO_1} = h_1\bar{k};$$

$$\bar{r}_2 = \overline{OO_2} = h_2\bar{k}; \quad \bar{\omega} = \omega\bar{k}$$

iar expresiile analitice ale percțiilor sunt:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P_x\bar{i} + P_y\bar{j} + P_z\bar{k}; & \bar{P}_1 &= P_{1x}\bar{i} + P_{1y}\bar{j} + P_{1z}\bar{k} \\ \bar{P}_2 &= P_{2x}\bar{i} + P_{2y}\bar{j} + P_{2z}\bar{k} \end{aligned} \quad (14.38)$$

În mișcarea de rotație impulsul și momentul cinetic se scriu:

$$\bar{H}_1 = \int_{(D)} (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm = M(\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = M \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi & 0 & 0 \end{vmatrix} = M\omega\xi\bar{j} \quad (14.39)$$

$$\bar{K}_O = K_x\bar{i} + K_y\bar{j} + K_z\bar{k} = -J_{xz}\omega\bar{i} - J_{yz}\omega\bar{j} + J_z\omega\bar{k} \quad (14.40)$$

Expresiile (14.38) se mai scriu:

$$\bar{r} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = (yP_z - zP_y)\bar{i} + (zP_x - xP_z)\bar{j} + (xP_y - yP_x)\bar{k} \quad (14.38')$$

$$\bar{r}_1 \times \bar{P}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & h_1 \\ P_{1x} & P_{1y} & P_{1z} \end{vmatrix} = -h_1 P_{1y} \bar{i} + h_1 P_{1x} \bar{j};$$

$$\bar{r}_2 \times \bar{P}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & h_2 \\ P_{2x} & P_{2y} & P_{2z} \end{vmatrix} = -h_2 P_{2y} \bar{i} + h_2 P_{2x} \bar{j};$$

Ecuțiile generale (14.37) devin:

$$\begin{aligned} 0 &= P_x + P_{1x} + P_{2x} \\ M\xi(\omega'' - \omega') &= P_y + P_{1y} + P_{2y} \\ 0 &= P_z + P_{1z} + P_{2z} \end{aligned} \quad (14.41)$$

respectiv:

$$\begin{aligned} -J_{xz}(\omega'' - \omega') &= yP_z - zP_y - h_1 P_{1y} - h_2 P_{2y} \\ -J_{yz}(\omega'' - \omega') &= zP_x - xP_z + h_1 P_{1x} + h_2 P_{2x} \\ J_z(\omega'' - \omega') &= xP_y - yP_x \end{aligned} \quad (14.41')$$

Rezultă un sistem de șase ecuații cu șapte necunoscute:

$\omega'', P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}, P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}$, deci un sistem nedeterminat.

Pentru ridicarea nedeterminării se poate considera $P_{2z}=0$, ceea ce practic corespunde unei articulații cilindrice în punctul O_2 . Rezolvând acest sistem rezultă percuțiile de legătură $P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}, P_{2x}, P_{2y}$ și viteza unghiulară după ciocnire:

$$\omega'' = \omega' + \frac{xP_y - yP_x}{J_z} \quad (14.42)$$

Un interes deosebit din punct de vedere practic îl reprezintă găsirea condițiilor pentru care, aplicând rigidului cu axă fixă o percuție \bar{P} , percuțiile de legătură $\bar{P}_1 (P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$ și $\bar{P}_2 (P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$ să fie nule, ceea ce ar reprezenta o măsură de protecție a articulațiilor O_1 și O_2 . Introducând în sistemul (14.41, 14.41') aceste condiții rezultă:

$$\begin{aligned} 0 &= P_x; & M\xi(\omega'' - \omega') &= P_y; & 0 &= P_z \\ -J_{xz}(\omega'' - \omega') &= yP_z - zP_y \\ -J_{yz}(\omega'' - \omega') &= zP_x - xP_z \\ J_z(\omega'' - \omega') &= xP_y - yP_x \end{aligned} \quad (14.43)$$

Prima și a treia ecuație arată că percuția aplicată în A trebuie să aibă direcția axei Oy , adică să fie normală la planul determinat de axa de rotație O_1O_2 și centrul de masă C .

Ținând seama de aceste condiții celelalte condiții se scriu:

$$\begin{aligned}
 M\xi(\omega'' - \omega') &= P_y; \\
 -J_{xz}(\omega'' - \omega') &= -zP_y; \\
 -J_{yz}(\omega'' - \omega') &= 0 \\
 J_z(\omega'' - \omega') &= xP_y
 \end{aligned}
 \tag{14.44}$$

deoarece P_y este diferit de zero și $\omega'' - \omega' \neq 0$, din aceste condiții rezultă:

$$\begin{aligned}
 J_{yz} &= 0; \\
 x &= \frac{J_z}{M\xi}; \quad z = \frac{J_{xz}}{M\xi}
 \end{aligned}
 \tag{14.45}$$

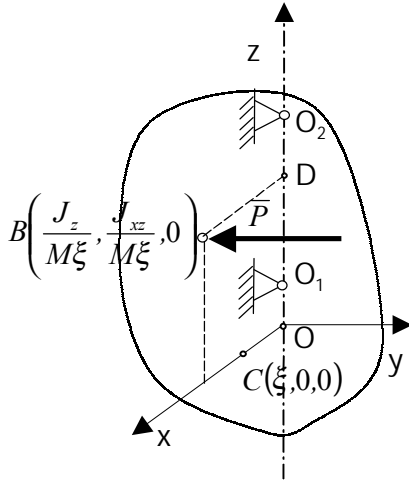


Fig.14.10

Aceste rezultate conduc la următoarele concluzii:

1. suportul percuziei \bar{P} , trebuie să treacă prin punctul $B\left(\frac{J_z}{M\xi}, 0, \frac{J_{xz}}{M\xi}\right)$ numit centrul de percuzie (fig.14.10).
2. Axa de rotație trebuie să fie axă principală de inerție pentru punctul $D\left(0, 0, \frac{J_{xz}}{M\xi}\right)$, care este piciorul perpendicularei dusă din punctul B pe axa de rotație (fig.4.10).

Această proprietate rezultă din condiția $J_{yz} = 0$ și observația că momentele centrifugale în raport cu axele DB și Dz sunt nule; conform formulei lui Steiner avem: $J_{DB, Dz} = J_{xz} + M \cdot \xi \cdot (-OD) = J_{xz} + M \cdot \xi \cdot \left(-\frac{J_{xz}}{M\xi}\right) = 0$.

Aplicație

Se dă o bară omogenă de masă M și de lungime L , articulată la unul din capete, în punctul O , asupra căreia acționează percuzia exterioară \bar{P} . Să se determine centrul de percuzie B (fig.14.11).

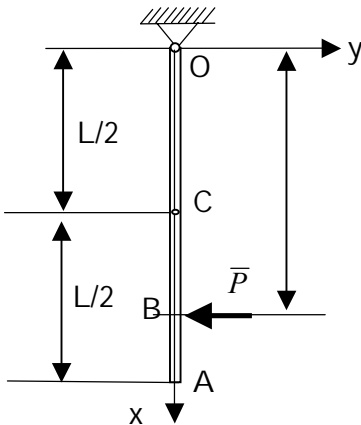


Fig.14.11

Rezolvare

Alegând sistemul de axe $Oxyz$ ca în fig.14.11, avem:

$$J_{xz} = J_{yz} = 0 \quad \text{și} \quad J_z = \frac{ML^2}{3}, \quad \xi = \frac{L}{2}$$

În aceste condiții centrul de percuzie se determină cu ajutorul relațiilor (14.45):

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{J_z}{M\xi} = \frac{\frac{ML^2}{3}}{M \frac{L}{2}} = \frac{2L}{3}; & z &= \frac{J_{xz}}{M\xi} = 0.
 \end{aligned}$$

CAPITOLUL 15

ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

15.1. Obiectul mecanicii analitice.

Coordonate generalizate. Deplasări.

În capitolele precedente s-a studiat mișcarea mecanică a corpurilor folosind principiile enunțate de Newton (din care cauză mecanica teoretică se mai nunește și *mecanica newtoniană sau clasică*): **principiul inerției, al acțiunii forței, al acțiunii și reacțiunii și principiul paralelogramului.**

În afara acestor principii s-a mai folosit și *axioma legăturilor*.

Pornind de la aceste adevăruri, verificate experimental, pentru studiul mișcării a fost construită în mod deductiv *mecanica newtoniană*, un rol deosebit avându-l teoremele generale ale dinamicii: **teorema impulsului, a momentului cinetic și a energiei cinetice.** Caracteristic studiului echilibrului și mișcării sistemelor mecanice este faptul că se introduc *forțele de legătură*, care complică destul de mult studiul, în multe situații aceste forțe nu interesează, motiv pentru care s-a încercat eliminarea lor.

Mecanica analitică își propune să găsească metode directe de determinare a ecuațiilor de mișcare, în care nu mai apar forțele de legătură, iar sistemul de ecuații diferențiale obținute astfel, să fie scris sub o formă generală (aceeași oricare ar fi problema studiată) denumită *forma canonică*. *Mecanica analitică* permite un studiu sistematic al oricărei probleme de mișcare mecanică a sistemelor. Pentru aceasta a fost nevoie să se enunțe principii noi. În cele ce urmează se vor studia numai o parte din aceste principii, urmărindu-se aplicarea rezultatelor mecanicii analitice la câteva probleme ridicate de tehnică.

Mecanica analitică studiază îndeosebi *cazul legăturilor ideale (fără frecare)*, ceea ce restrânge într-o oarecare măsură domeniul de aplicabilitate al acestui studiu. În cazul în care se ține seama și de forțele de frecare, acestea se vor considera drept *forțe direct aplicate*. De remarcat faptul că modul de tratare a problemei legăturilor în mecanica analitică se deosebește esențial de cel folosit în mecanica newtoniană.

În mecanica analitică se aduce o generalizare noțiunii de coordonată, care nu mai este legată strict de un anumit sistem de axe de coordonate (cartezian, cilindric, sferic, polar, etc.), definindu-se *coordonatele generalizate sau lagrangiene* care se notează cu: q_1, q_2, \dots, q_h .

De exemplu, dacă un sistem de n puncte materiale este caracterizat în spațiul euclidian prin $3n$ coordonate carteziane $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$,

în mecanica analitică aceste coordonate sunt înlocuite prin $3n$ coordonatele generalizate: q_1, q_2, \dots, q_{3n} .

Astfel, mișcarea sistemului de n puncte materiale în spațiul cu trei dimensiuni poate fi studiată în același mod ca mișcarea unui singur punct în spațiul $3n$ -dimensional al coordonatelor generalizate.

Coordonatele generalizate sunt mărimi geometrice independente, cu ajutorul cărora se determină configurația sistemului la un moment dat. Ele pot fi lungimi sau unghiuri, fără a vreo restricție sau precizare asupra naturii lor. Coordonatele generalizate permit studiul mișcării într-un spațiu n -dimensional și oferă posibilitatea unor raționamente cu grad mai mare de generalitate, deci permit *studiul problemelor cu mai multe grade de libertate*.

Corespunzător coordonatelor generalizate q_1, q_2, \dots, q_h , se definesc *vitezele generalizate* $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_h$ care pot fi viteze liniare sau unghiulare, după cum coordonatele generalizate reprezintă lungimi, respectiv unghiuri, precum și *accelerațiile generalizate* $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_h$ corespunzătoare.

S-a definit *legătura* în mecanica newtoniană, ca fiind o restricție geometrică impusă unui punct, rigid sau sistem mecanic de puncte sau rigide, de a rămâne pe o suprafață sau o curbă în spațiu; legăturile pot fi ideale (fără frecare) sau reale (cu frecare). În cadrul acestui capitol se consideră numai *cazul legăturilor ideale*, care se exprimă cu ajutorul unor relații matematice.

Legăturile ideale în mecanica analitică se clasifică astfel:

1. în funcție de timp:

a) *legături scleronome*, când timpul nu apare explicit (cazul suprafețelor sau curbelor fixe), adică sub forma ecuațiilor:

$$f(x, y, z) = 0 \text{ sau } f(q_1, q_2, \dots, q_h) = 0; \quad (15.1)$$

b) *legături reonome*, când timpul apare explicit (cazul legăturilor – suprafețelor sau curbelor – care variază în timp după o anumită lege independentă de forțele care acționează), deci de forma ecuațiilor:

$$f(x, y, z, t) = 0 \text{ sau } f(q_1, q_2, \dots, q_h, t) = 0. \quad (15.2)$$

2. din punct de vedere analitic:

a) *legături olonome*, când nu apar explicit derivatele în raport cu timpul, adică nu apar explicit componentele vitezelor sau /și accelerațiilor, adică de forma:

$$f(x, y, z, t) = 0 \text{ sau } f(q_1, q_2, \dots, q_h, t) = 0; \quad (15.3)$$

b) *legături neolonome*, când apar explicit componentele vitezelor sau (și) accelerațiilor, deci forma:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, t) = 0 \text{ sau} \quad (15.4)$$

$$f(q_1, \dots, q_h, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_h, \ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_h, t) = 0.$$

Deplasări

În mecanica analitică se folosesc *două categorii de deplasări: reale și virtuale*:

- a. prin *deplasarea reală* se înțelege o *deplasare elementară* a unui punct material (sau corp) pe suprafața sau curba care reprezintă legătura, ce se realizează sub acțiunea forțelor exterioare direct aplicate. Deplasările reale sunt compatibile cu legăturile și se notează cu $d\bar{r}$; într-un sistem cartezian au componentele (dx, dy, dz) au următoarea expresie analitică

$$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}. \quad (15.5)$$

Fiind o deplasare elementară (infinitesimală), $d\bar{r}$ poate fi considerată ca situată în planul tangent la suprafața, sau pe tangenta la curba ce reprezintă legătura.

- b. prin *deplasare virtuală* se înțelege orice *deplasare elementară* posibilă a punctului material (sau corpului) pe suprafața sau curba care reprezintă legătura, independent de forțele exterioare. Prin urmare, deplasarea virtuală este o deplasare *fictivă* (poate fi imaginată și nu are loc efectiv sub acțiunea forțelor direct aplicate) fiind *posibilă*, sau compatibilă cu legăturile și având *un caracter geometric* (deoarece timpul în acest caz este un parametru arbitrar și constant, sau este “înghețat”); ca și deplasarea reală, aceasta este o deplasare elementară (infinitesimală) și prin urmare poate fi considerată ca fiind situată în planul tangent la suprafața sau pe tangenta la curba ce reprezintă legătura; într-un sistem cartezian componentele *deplasării virtuale sunt* $(\delta x, \delta y, \delta z)$ adică:

$$\delta\bar{r} = \delta x\bar{i} + \delta y\bar{j} + \delta z\bar{k}. \quad (15.6)$$

Din punct de vedere matematic $\delta()$ este tot un operator diferențial, ca și $d()$.

În cazul unui sistem de puncte materiale vectorul de poziție \bar{r} al unui punct oarecare A , depinde de parametrii q_1, q_2, \dots, q_h și explicit de timpul t (cazul legăturilor *olonome și reonome*) și se scrie:

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, \dots, q_h, t), \quad (15.7)$$

Pentru cele două tipuri de deplasări definite anterior, avem evident:

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} dt \quad (15.8)$$

$$\delta\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} \delta q_h. \quad (15.9)$$

Forțe de inerție.

Fie un corp de masă m , care se află într-o stare inerțială (repaus sau mișcare rectilinie și uniformă). Pentru a-i imprima o accelerație \bar{a} este necesar ca un alt corp (numit și agent extern) să acționeze cu o forță \bar{F} asupra corpului studiat, conform *principiului acțiunii forței*: $\bar{F} = m\bar{a}$ (15.10)

Conform *principiului acțiunii și reacțiunii*, *corpul studiat acționează asupra agentului extern cu o forță egală și direct opusă*, numită *forță de inerție*, adică:

$$\bar{F}^I = -m\bar{a} \quad (15.11)$$

Deci, *forța de inerție reprezintă reacțiunea exercitată de corpul studiat asupra corpului cu care vine în contact în timpul mișcării* (care îi imprimă accelerația \bar{a}).

Se poate afirma că *forța de inerție este o forță reală pentru agentul motor* dar nu și pentru corpul studiat (deși uneori ea se presupune aplicată *corpului studiat*, aceasta nu este decât o forță fictivă).

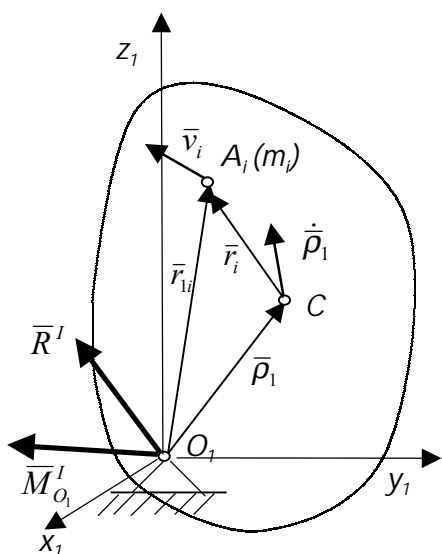


Fig.15.1

Torsorul forțelor de inerție

Se definește torsorul forțelor de inerție ca fiind format din cele două componente: rezultanta \bar{R}^I și momentul rezultant $\bar{M}_{O_1}^I$ al forțelor de inerție.

În cazul unui sistem material discret (fig.5.1) acestea au expresiile:

$$\bar{R}^I = -\frac{d\bar{H}_1}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right) = -M\bar{a}_C = -M\ddot{\bar{p}}_1$$

$$\bar{M}_{O_1}^I = -\frac{d\bar{K}_1}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \bar{r}_{i1} \times m_i \bar{v}_i \right)$$

iar pentru un sistem material continuu (rigid) :

$$\bar{R}^I = -\frac{d\bar{H}_1}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_{(D)} \bar{v}_1 dm \right) = -M\bar{a}_C = -M\ddot{\bar{p}}_1$$

$$\bar{M}_{O_1}^I = -\frac{d\bar{K}_1}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_{(D)} \bar{r}_1 \times \bar{v}_1 dm \right)$$

15.2. Principiul lui d'Alembert

În studiul mișcării punctului material liber, este valabilă relația fundamentală a dinamicii conform principiul acțiunii forței, al lui Newton (15.10):

$$m\bar{a} = \bar{F} \quad (15.12)$$

unde: \bar{F} este rezultanta forțelor direct aplicate (cunoscute) ce acționează asupra punctului;

m - masa punctului;

\bar{a} - accelerația considerată în raport cu un sistem de referință inerțial.

$$\text{Din (15.12) se poate scrie: } \bar{F} - m\bar{a} = 0 \quad (15.12')$$

Relația (15.12') nu mai poate fi folosită în cazul punctului material supus la legături, unde $\bar{F} = \bar{F}^{(a)} + \bar{F}^{(leg)}$, așa cum se știe de la dinamica punctului material.

Prin urmare, în dinamica punctului material supus la legături se poate scrie:

$$\bar{F}^{(a)} + \bar{F}^{(leg)} - m\bar{a} = 0; \quad \text{adică: } \bar{F}^{(a)} - m\bar{a} \neq 0$$

$$\text{Se face notația : } \bar{F}_p = \bar{\phi} = \bar{F}^{(a)} - m\bar{a} = \bar{F}^{(a)} + \bar{F}^{(I)} \quad (15.13)$$

unde: $\bar{F}_p = \bar{\phi}$ se numește *forță pierdută sau vectorul lui d'Alembert*,

iar vectorul $(-m\bar{a})$ este tocmai forța de inerție $\bar{F}_i^{(I)}$.

Fiind dat un sistem de puncte materiale A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) supus acțiunii forțelor date $\bar{F}_i^{(a)}$ și supus unor legături geometrice, *forțele pierdute (sau vectorii lui d'Alembert)* sunt:

$$\bar{\phi}_i = \bar{F}_i^{(a)} - m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^{(a)} + \bar{F}_i^{(I)} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (15.13')$$

În același timp, deoarece legăturile implică existența unor forțe de legătură $\bar{F}_i^{(leg)}$, acționând asupra punctelor A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), conform ecuației fundamentale a lui Newton, ar trebui să avem:

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i^{(a)} + \bar{F}_i^{(leg)}, \quad (15.14)$$

unde: $\bar{F}_i^{(leg)}$ este rezultanta forțelor de legătură care acționează asupra punctului A_i .

Înlocuind relația (15.14) în relația (15.13') se obține o primă formă a principiului lui d'Alembert:

$$\bar{\phi}_i + \bar{F}_i^{(leg)} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (15.15)$$

deci **principiul lui d'Alembert** se enunță astfel: “*la fiecare moment t , forțele pierdute $\bar{\phi}_i$ (vectorii lui d'Alembert) echilibrează forțele de legătură $\bar{F}_i^{(leg)}$ ” sau “*la fiecare moment t , forțele pierdute și forțele de legătură își fac echilibru în virtutea legăturilor*”.*

Dacă se folosesc metodele generale ale mecanicii clasice și în locul legăturilor se introduc forțele de legătură $\bar{F}_i^{(leg)}$, se obține :

$$\bar{F}^{(a)} + \bar{F}_i^{(I)} + \bar{F}^{(leg)} = 0 \quad (15.16)$$

adică **principiul lui d'Alembert** într-o a doua formă echivalentă: “*forțele date $\bar{F}_i^{(a)}$, forțele de inerție ($\bar{F}_i^{(I)} = -m_i a_i$) presupuse aplicate punctelor materiale A_i formează împreună cu forțele de legătură $\bar{F}_i^{(leg)}$ un sistem de forțe în echilibru*”.

Principiul lui d'Alembert sub această formă, nu este un principiu nou, ci mai curând o metodă nouă cunoscută în mecanica generală, sub numele de **metoda cinetostatică**. Se observează că *principiul lui d'Alembert reduce o problemă de dinamică la una de statică* : echilibrul fiind aici (în esență) o consecință a introducerii forțelor de inerție, presupuse aplicate punctelor materiale ale sistemului. Se reamintește faptul că *în realitate forțele de inerție nu acționează asupra punctelor materiale ci asupra agentului exterior punctului sau corpului*. Este vorba deci de un echilibru fictiv.

Dacă se extinde relația (15.16) la toate punctele sistemului, deci însumând pentru toate punctele se obține:

- pentru forțe:
$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(I)} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(leg)} = 0 \quad (15.17)$$

- pentru momente:
$$\sum \bar{M}_o(\bar{F}_i^{(a)}) + \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i^{(I)}) + \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i^{(leg)}) = 0 \quad (15.17')$$

Aplicație

Două corpuri de greutate G_1 și G_2 ($G_1 > G_2$) sunt legate de capetele unui fir inextensibil care este petrecut peste un scripete fix de rază r . Neglijând frecările și masa scripetelui (fig.15.1.a), să se determine folosind principiul lui d'Alembert accelerația cu care coboară greutatea G_1 , tensiunea din fir și reacțiunile din articulație.

Rezolvare

În fig.15.1.a sunt figurate forțele date G_1 , G_2 și forțele de legătură R_x și R_y , precum și forțele de inerție $F_1^{(I)}$ și $F_2^{(I)}$. Conform principiului d'Alembert, sistemul de forțe reprezentat în figura 15.1.a este în echilibru. Scriind ecuațiile de proiecții și ecuația de momente în raport cu centrul scripetelui O de masă neglijabilă și întrucât :

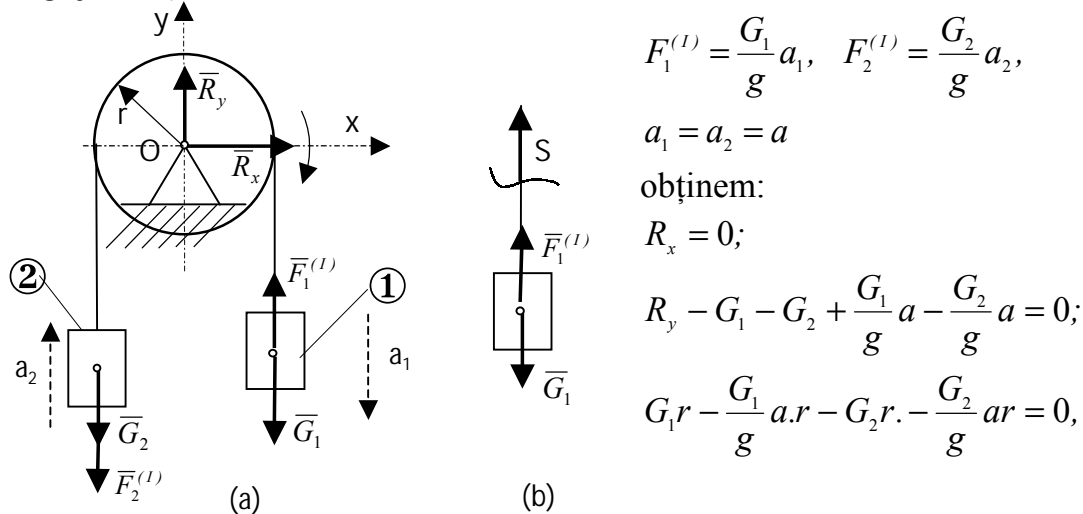


Fig.15.1

de unde deducem:
$$a = \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} g; \quad R_x = 0, \quad R_y = \frac{4G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Pentru determinarea tensiunii din fir, se izolează greutatea G_1 (fig.15.1.b), iar ecuația de proiecție pe direcția firului va fi: $S + \frac{G_1}{g} a - G_1 = 0$, din care, ținând seama de expresia accelerației, se deduce expresia tensiunii din fir:

$$S = \frac{2G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}.$$

Izolând greutatea G_2 se obține pentru S aceeași expresie, datorită faptului că nu s-a ținut seama de masa scripetelui. Dacă s-ar fi ținut seama și de această masă, atunci tensiunile din cele două porțiuni de fir ar fi fost diferite.

15.3. Principiul lucrului mecanic virtual

Fie un punct material A acționat de un sistem de forțe date a căror rezultantă este \bar{F} , care este obligat să rămână în echilibru pe o suprafață lucie (Σ) (fig. 15.2). În acest caz forța de legătură este reacțiunea normală \bar{N} . Dându-se punctului A o deplasare virtuală elementară $\delta\bar{r}$ (compatibilă cu legăturile) ea se va găsi în planul Π tangent la (Σ) în A . Rezultă că $\bar{N} \perp \delta\bar{r}$ și deci produsul scalar:

$$\bar{N} \cdot \delta\bar{r} = 0. \quad (15.18)$$

Această relație exprimă proprietatea că lucrul mecanic al reacțiunii \bar{N} pentru deplasarea virtuală elementară $\delta\bar{r}$ este nul; cu alte cuvinte *lucrul mecanic virtual al reacțiunii normale \bar{N} este nul*. La aceeași concluzie se ajunge în cazul unui punct material obligat să rămână pe o curbă lucie sau în cazul unui rigid supus la legături fără frecare.

De exemplu, în cazul unui rigid supus legăturilor de tip:

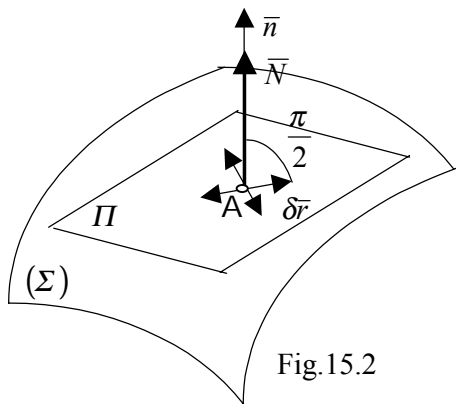


Fig.15.2

- reazem simplu, reacțiunea este normală la suprafața de sprijin, iar deplasarea virtuală, fiind tangentă la această suprafață, este normală pe reacțiune;
- articulație, lucrul mecanic virtual al reacțiunii \bar{R} este nul, deoarece deplasările virtuale $\delta\bar{r}$ sunt nule;
- încastrare, lucrul mecanic virtual al reacțiunii \bar{R} și al momentului \bar{M} sunt nule, deoarece deplasările cât și rotirile virtuale sunt nule.

Revenind la relația (15.18) și generalizând pentru n punctele materiale (sau rigide) supuse la legături fără frecare și aflate în echilibru, însumând pentru aceste n puncte se obține:

$$\sum_{i=1}^n \bar{N}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15.19)$$

și se ajunge la **prima formulare a principiului lucrului mecanic virtual**: “în cazul unui sistem material supus la legături ideale, aflat în echilibru, lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură este nul” (I).

Să considerăm în continuare un sistem de puncte materiale în echilibru, la care rezultanta forțelor date (direct aplicate): $\bar{R}^{(a)} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(a)} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ și a forțelor de

legătură exterioare și interioare: $\bar{R}^{(leg)} = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i^{(leg)} = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i^{(int)}$ este nulă,

$$\text{adică: } \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i^{(int)} = 0. \quad (15.20)$$

Dându-se sistemului deplasări virtuale $\delta \bar{r}_i (i=1,2,\dots,n)$ compatibile cu legăturile fiecărui punct al sistemului pentru acest caz, se obține lucrul mecanic virtual:

$$\delta L = \sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i + \sum \bar{R}_i^{(ext)} \cdot \delta \bar{r}_i + \sum \bar{R}_i^{(int)} \cdot \delta \bar{r}_i = 0. \quad (15.21)$$

Deoarece în baza primei formulări a principiului lucrului mecanic virtual $\sum \bar{R}_i^{(ext)} \cdot \delta \bar{r}_i = 0$, legăturile fiind fără frecare și deoarece în cazul unui sistem nedeformabil, lucrul mecanic elementar al forțelor de legătură interioare este nul: $\sum \bar{R}_i^{(int)} \cdot \delta \bar{r}_i = 0$, rezultă: $\delta L = \sum \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$. (15.22)

și se ajunge la o **a doua formulare a principiului lucrului mecanic virtual**: “*condiția necesară și suficientă ca un sistem material să rămână în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe date \bar{F}_i , ($i=1,2,\dots,n$), este ca lucrul mecanic virtual, corespunzător oricăror deplasări virtuale, al acestor forțe să fie nul*” (II).

Acest principiu mai poate fi exprimat și sub alte forme; de exemplu: conform definiției produsului scalar a doi vectori

$$\sum |\bar{F}_i| \cdot |\delta \bar{r}_i| \cos(\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = 0, \quad (15.23)$$

sau în funcție de proiecțiile acestor vectori pe axele sistemului de coordonate cartezian: $\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$. (15.24)

Este interesant de aplicat principiul lucrului mecanic virtual pentru găsirea legii de mișcare a unui sistem material (deci care nu se află în echilibru). Astfel, înmulțind scalar relația (15.16) cu $\delta \bar{r}_i$, însumând apoi și ținând seama de faptul că lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură este nul, se obține:

$$\sum (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0, \text{ sau: } \sum (\bar{F}_i^{(a)} + \bar{F}_i^{(t)}) \cdot \delta \bar{r}_i = \sum \bar{F}_i^p \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \quad (15.25)$$

adică se ajunge la **a treia formulare a principiului lucrului mecanic virtual**: “*lucrul mecanic virtual al forțelor pierdute este nul*” (III).

Relația (15.25) este de fapt o sinteză a celor două formulări enunțate mai sus și se aplică în dinamică; de asemenea ea este extrem de generală și exprimă punctul de plecare pentru mecanica analitică.

Pentru un sistem de rigide, introducând pentru fiecare corp torsorul forțelor de inerție, se obține:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \{ (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \cdot \delta \bar{r}_i + [\bar{M}_o(\bar{F}_i) + \bar{M}_o(\bar{F}_i^{(t)})] \cdot \delta \bar{\theta}_i \} = 0. \quad (15.26)$$

În cazul legăturilor cu frecare, se consideră forțele și cuplurile de frecare, drept forțe și cupluri exterioare active. De exemplu, o forță de frecare coulombiană se exprimă în următoarea formă cunoscută: $\bar{T} = -\mu |\bar{N}| \bar{v} / |\bar{v}|$.

Avantajul aplicării principiului lucrului mecanic virtual pentru determinarea legii de mișcare a unui sistem, față de metoda cinetostatică, constă în aceea că sunt eliminate din calcule reacțiunile.

Aplicația 1.

Se consideră sistemul format din barele omogene $OA = L$ și $AB = 2L$ având greutatea, G și respectiv $2G$. Sistemul are articulații în punctele O și A și rezemare simplă în C (fig.15.3), astfel că $OC = L$. Legăturile sunt fără frecare. Se cere să se determine unghiul α corespunzător poziției de echilibru a sistemului.

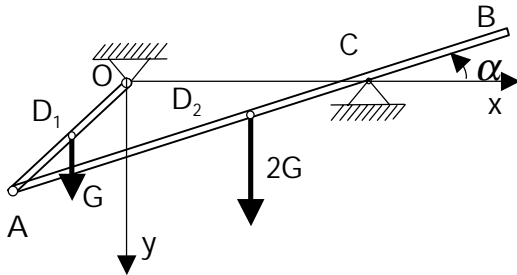


Fig.15.3

Rezolvare

Forțele date sunt $F_1 = G$ și $F_2 = 2G$ sunt aplicate în centrele de masă ale barelor D_1 și D_2 . Se consideră sistemul de axe xOy din figură, ales în planul sistemului de bare.

Se aplică formula (15.24) unde :

$$X_1 = X_2 = 0, Y_1 = G, Y_2 = 2G,$$

care devine:
$$\sum_{i=1}^2 Y_i \delta y_i \equiv Y_1 \delta y_1 + Y_2 \delta y_2 = G \delta y_1 + 2G \delta y_2 = 0 \quad (a)$$

Configurația de echilibru a sistemului de bare depinde de un singur parametru α , iar pentru calculul deplasărilor virtuale $\delta y_1 = \delta y_{D_1}$, $\delta y_2 = \delta y_{D_2}$ se exprimă y_1 și y_2 în funcție de acest parametru și se diferențiază, obținându-se:

$$\begin{cases} y_1 = y_{D_1} = \frac{L}{2} \sin 2\alpha \\ y_2 = y_{D_2} = L \sin 2\alpha - L \sin \alpha \end{cases} \quad (b)$$

și

$$\begin{cases} \delta y_1 = L \cos 2\alpha \cdot \delta \alpha \\ \delta y_2 = (2L \cos 2\alpha - L \cos \alpha) \cdot \delta \alpha \end{cases}$$

În acest caz relația (a) devine:

$$GL \cos \alpha \cdot \delta \alpha + 2G(2L \cos 2\alpha - L \cos \alpha) \cdot \delta \alpha = 0 \quad (c)$$

și deoarece $\delta \alpha \neq 0$, rezultă:

$$5 \cos 2\alpha - 2 \cos \alpha = 0.$$

Înlocuind $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ se obține ecuația:

$$10 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha - 5 = 0, \text{ care rezolvată ne furnizează soluțiile } \alpha_1 \text{ și } \alpha_2.$$

Se observă că la rezolvarea problemei de echilibru cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual nu a fost necesară determinarea forțelor de legătură din articulații și rezeme.

Aplicația 2

Se dă sistemul format din trei corpuri de greutate G_1 , G_2 și G_3 , legate între ele prin fire inextensibile (aceeași cu aplicația de la paragraful 13.6) ca în figura 15.4, unde sunt date elementele mecanice și geometrice corespunzătoare. Discul (3), se rostogolește fără alunecare pe planul înclinat cu unghiul α .

Se cere să se stabilească legea de mișcare a sistemului.

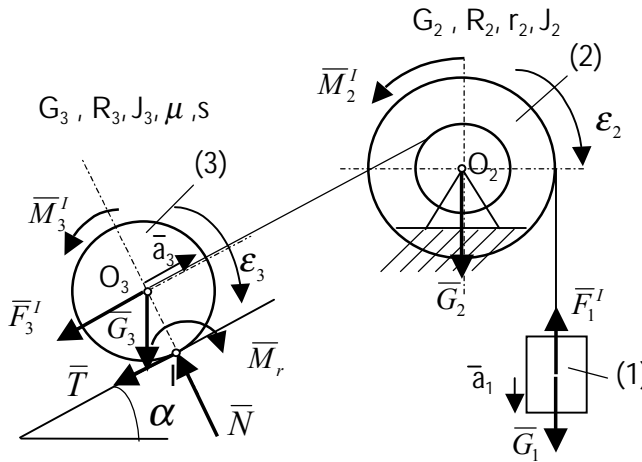


Fig.15.4.

$$\delta L = G_1 \delta h_1 - m_1 a_1 \delta h_1 - M_2^I \cdot \delta \varphi_2 - G_3 \delta h_3 \sin \alpha - m_3 a_3 \delta h_3 - M_3^I \cdot \delta \varphi_3 - M_r \cdot \delta \varphi_3 = 0. \quad (a)$$

Rezolvare

Analiza cinematică este prezentată în tabelul 15.1. Discul (3), rostogolindu-se fără să alunece, atunci punctul I de contact cu planul înclinat este centrul instantaneu de rotație, iar forța de frecare, de alunecare $T \leq \mu N$ fiind aplicată în I nu dă lucrul mecanic (viteza relativă dintre roată și plan în punctul I fiind zero). Se aplică principiul lucrului mecanic virtual sub forma (15.26):

Tabelul 15.1.

Corpu l	Felul mișcării	Deplasarea	Viteza	Accelerația
(1)	Translație	h_1	$v_1 = \dot{h}_1$	$a_1 = \dot{v}_1 = \ddot{h}_1$
(2)	rotație	$\varphi_2 = \frac{h_1}{R_2}$	$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}$	$\epsilon_2 = \frac{a_1}{R_2}$
(3)	Plan -paralelă	$h_3 = r_2 \varphi_2 = \frac{r_2}{R_2} h_1$ $\varphi_3 = \frac{h_3}{R_3} = \frac{r_2}{R_2 R_3} h_1$	$v_3 = \frac{r_2}{R_2} v_1$ $\omega_3 = \frac{r_2}{R_2 R_3} v_1$	$a_3 = \frac{r_2}{R_2} a_1$ $\epsilon_3 = \frac{r_2}{R_2 R_3} a_1$

Înlocuind masele m_1 , m_2 , m_3 cu greutățile G_1 , G_2 , G_3 și forțele de inerție \bar{F}_1^I , \bar{F}_3^I precum și cuplurile de inerție M_2^I , M_3^I cu sensurile lor date în figura 15.4, în relația (a), se obține:

$$\delta L = G_1 \cdot \delta h_1 - \frac{G_1}{g} a_1 \cdot \delta h_1 - \frac{J_2}{R_2 R_2} a_1 \cdot \delta h_1 - G_3 \sin \alpha \frac{r_2}{R_2} \cdot \delta h_1 - \frac{G_3}{g} \left(\frac{r_2}{R_2} \right)^2 a_1 \cdot \delta h_1 - \frac{G_3 R_3^2}{2g} \left(\frac{r_2}{R_2 R_3} \right)^2 a_1 \cdot \delta h_1 - G_3 \cos \alpha \frac{r_2}{R_2 R_3} \cdot \delta h_1 = 0.$$

Dând factorul comun $\delta h_1 \neq 0$ se obține o ecuație de gradul întâi a cărei soluție este :

$$a_1 = \frac{G_1 - G_3 \frac{r_2}{R_2} \sin \alpha - G_3 \frac{sr_2}{R_2 R_3} \cos \alpha}{\frac{G_1}{g} + \frac{J_2}{R_2^2} + \frac{3G_3}{2g} \left(\frac{r_2}{R_2} \right)^2}.$$

15.4. Principiul lucrului mecanic virtual în cazul unui sistem cu mai multe grade de libertate

Fie un sistem cu h grade de libertate, caracterizat prin coordonatele generalizate: q_1, q_2, \dots, q_h și acționat de n forțe exterioare direct aplicate $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$. Vectorul de poziție al punctului A_i de aplicație al forței \bar{F}_i este:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_h, t). \quad (15.27)$$

Ne propunem să determinăm condiția de echilibru a sistemului (de exemplu, valorile forțelor pentru o anumită poziție de echilibru dată). Pentru aceasta se aplică principiul lucrului mecanic virtual sub forma (15.22):

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$$

unde conform relației (15.27) avem:

$$\delta \bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (15.28)$$

și prin urmare:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^h \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0, \quad (15.29)$$

iar prin inversarea ordinei de însumare rezultă:

$$\delta L = \sum_{k=1}^h \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0. \quad (15.30)$$

Se definește *forța generalizată* prin expresia:

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (15.31)$$

Se observă că forța generalizată Q_k poate să aibă dimensiunea unei forțe dacă q_k are dimensiunea unei lungimi sau a unui cuplu, dacă q_k este o mărime adimensională (un unghi). Relația (15.30) se mai scrie în funcție de forțele generalizate astfel:

$$\delta L = \sum_{k=1}^h Q_k \delta q_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k + \dots + Q_h \delta q_h = 0. \quad (15.32)$$

Analogia formală dintre relațiile (15.32) și (15.26) justifică denumirea de forță generalizată dată expresiei (15.31).

Dacă legătura este olonomă (și prin urmare $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_h$ sunt independente), pentru ca ecuația (15.32) să fie posibilă este necesar să existe simultan relațiile:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_h = 0. \quad (15.33)$$

Forțele generalizate pot fi calculate cu ajutorul formulei (15.31) sau mai simplu, în modul următor: se consideră variabilă succesiv, câte o singură coordonată generalizată q_k , deci $\delta q_k \neq 0$ și se păstrează constante celelalte coordonate generalizate, obținându-se:

$$Q_k = \frac{(\delta L)_{q_k \text{ variabil}}}{\delta q_k}. \quad (15.34)$$

De exemplu, dacă: $\delta q_1 \neq 0$ și $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_h = 0$, adică:

$$(\delta L)_{q_1 \text{ variabil}} = Q_1 \cdot \delta q_1 \text{ și se obține: } Q_1 = \frac{(\delta L)_{\text{variabil}}}{\delta q_1}.$$

În mod analog se obțin și celelalte forțe generalizate.

Relațiile $Q_k = 0$ ($k=1,2,3,\dots,h$) conform (15.32), reprezintă condițiile de echilibru căutate.

A p l i c a ț i e

Se dă sistemul de două bare articulate în O (articulație fixă) și A_2 (articulație mobilă) acționate de forțele P_1, P_2, P_3, P_4 aplicate respectiv în punctele A_1, A_2, A_3, A_4 , ca în fig.15.5. Barele fac cu orizontala respectiv unghiurile α_1 și α_2 și au lungimile $OA_2 = L_1$, ($OA_1 = L_1 / 2$) respectiv $A_2A_4 = L_2$, ($A_2A_3 = L_2 / 2$).

Se cere să se determine poziția de echilibru a sistemului.

R e z o l v a r e

Sistemul are două grade de libertate α_1 și α_2 , care joacă rolul coordonatelor q_1 și q_2 .

Se aleg axele ca în figura 15.5. Pentru a determina poziția de echilibru vom determina forțele generalizate Q_1 și Q_2 și le vom egala cu zero.

Sistemul fiind în planul xOy , formula (15.31) se scrie pentru Q_1 astfel:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^4 \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} \right)$$

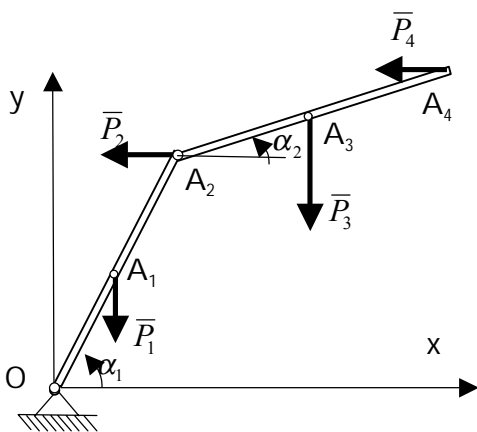


Fig.15.5

în care proiecțiile pe axe ale forțelor X_i, Y_i sunt:

$$\begin{aligned} X_1 = 0, Y_1 = -P_1, & \quad X_2 = -P_2, Y_2 = 0, \\ X_3 = 0, Y_3 = -P_3, & \quad X_4 = -P_4, Y_4 = 0, \\ Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Deci: } Q_1 = \sum_{i=1}^4 \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_2} \right) = -P_1 \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} - P_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} - P_3 \frac{\partial y_3}{\partial \alpha_1} - P_4 \frac{\partial x_4}{\partial \alpha_1}.$$

Coordonatele celor patru puncte în care sunt aplicate forțele sunt respectiv:

$$\begin{aligned} A_1 \quad \begin{cases} x_1 = 0,5 L_1 \cos \alpha_1 \\ y_1 = 0,5 L_1 \sin \alpha_1 \end{cases} & \quad A_3 \quad \begin{cases} x_3 = L_1 \cos \alpha_1 + 0,5 L_2 \cos \alpha_2 \\ y_3 = L_1 \sin \alpha_1 + 0,5 L_2 \sin \alpha_2 \end{cases} \\ A_2 \quad \begin{cases} x_2 = L_1 \cos \alpha_1 \\ y_2 = L_1 \sin \alpha_1 \end{cases} & \quad A_4 \quad \begin{cases} x_4 = L_1 \cos \alpha_1 + L_2 \cos \alpha_2 \\ y_4 = L_1 \sin \alpha_1 + L_2 \sin \alpha_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Calculând derivatele parțiale $\frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial y_3}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial x_4}{\partial \alpha_1}$ și înlocuind expresiile lor în

expresia lui Q_1 se obține: $Q_1 = L_1 \left(-\frac{P_1}{2} \cos \alpha_1 - P_3 \cos \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_1 + P_4 \sin \alpha_1 \right)$.

Analog se obține: $Q_2 = \sum_{i=1}^4 \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_2} \right) = L_2 \left(-\frac{P_3}{2} \cos \alpha_2 + P_4 \sin \alpha_2 \right)$

Pozițiile de echilibru ale sistemului se obțin din ecuațiile: $Q_1=0$ și respectiv $Q_2=0$:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{P_1 + 2P_3}{2(P_2 + P_4)}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{P_3}{2P_4}.$$

15.5. Calculul reacțiunilor cu ajutorul teoremei lucrului mecanic virtual.

Pentru a se calcula o anumită reacțiune a unui corp sau sistem material supus la legături, se suprimă legătura respectivă și se introduce reacțiunea căutată. În continuare se aplică sistemului o deplasare virtuală elementară, care să fie compatibilă cu legăturile rămase. Pentru această deplasare, reacțiunea în cauză și forțele direct aplicate (date) efectuează un lucru mecanic virtual: aplicând principiul lucrului mecanic virtual se obține o relație ce conține ca necunoscută tocmai reacțiunea pe care dorim să o calculăm.

În mod analog se pot calcula eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele: pentru aceasta se secționează bara respectivă a grinzii cu un plan imaginar, se introduce un efort axial (de întindere) și în continuare se aplică principiul lucrului mecanic virtual, dând sistemului deplasări virtuale (compatibile cu legăturile rămase).

Aplicație

Se consideră o bară $AB = L$, articulată în A și simplu rezemată în B , acționată în punctul C de forța concentrată P , înclinată cu unghiul α față de axa barei (fig.15.6). Aplicând principiul lucrului mecanic virtual, se cer forțele de legătură din A și B .

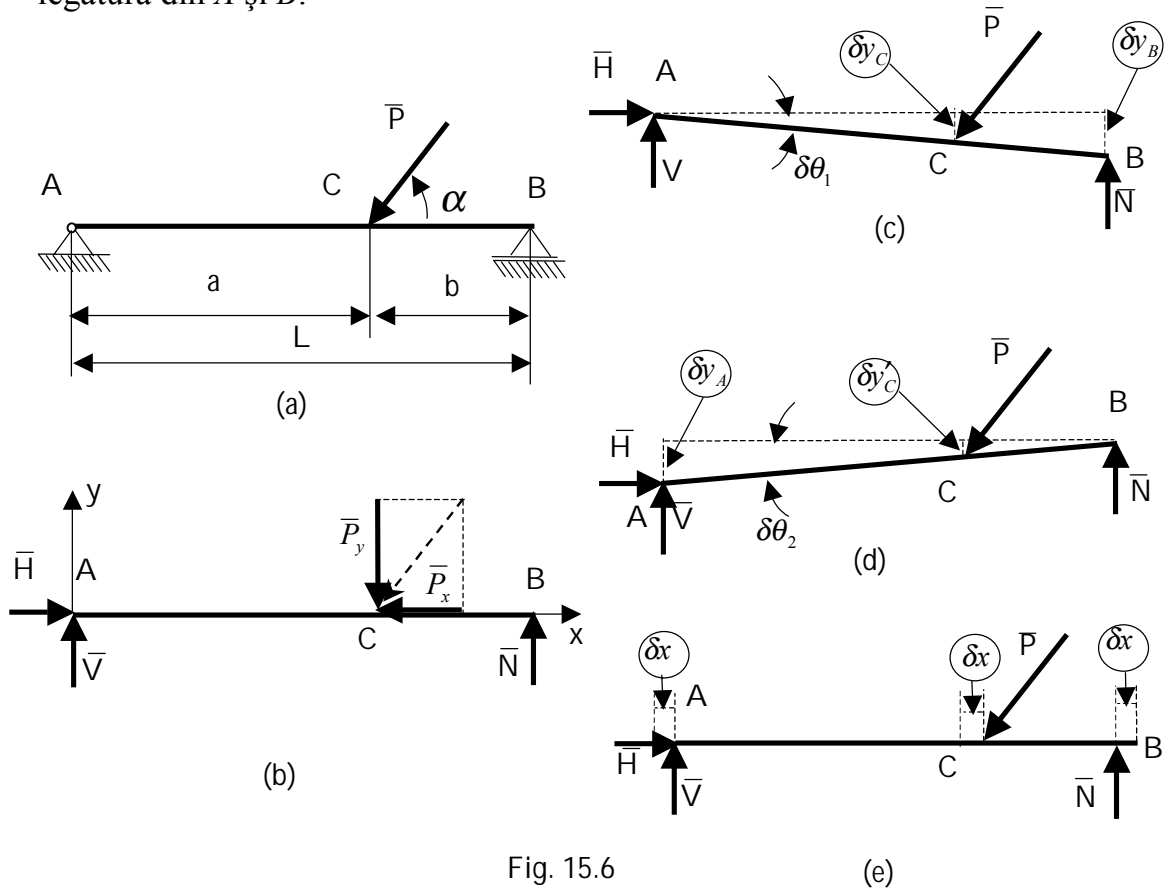


Fig. 15.6

(e)

Rezolvare

Pentru calculul reacțiunilor din A și B (fig. 15.6,a) se izolează bara AB prin suprimarea legăturilor, introducându-se reacțiunile H , V și N (fig.15.6,b).

- a. Pentru calculul reacțiunii N se dă barei o rotire virtuală $\delta\theta_1$, în jurul punctului A (fig.15.6,c). Deplasările virtuale liniare δy_B , δy_C ale punctelor de aplicație ale forțelor ce acționează respectiv în punctele B , C sunt legate de deplasarea $\delta\theta_1$,

prin relația:
$$\frac{\delta y_C}{a} = \frac{\delta y_B}{L} = \operatorname{tg}(\delta\theta_1) \approx \delta\theta_1$$

deoarece $\delta\theta_1$ fiind un unghi foarte mic : $\sin \delta\theta_1 \approx \delta\theta_1$, $\cos \delta\theta_1 \approx 1$.

Avem deci relațiile:
$$\delta y_C = a\delta\theta_1, \quad \delta y_B = L\delta\theta_1.$$

Lucrul mecanic virtual corespunzător acestor deplasări este nul, deci:

$$\delta L = P \sin \alpha \cdot \delta y_C - N \cdot \delta y_B = 0$$

sau:
$$P \sin \alpha \cdot a \cdot \delta\theta_1 - N \cdot L \cdot \delta\theta_1 = (aP \sin \alpha - NL) \cdot \delta\theta_1 = 0$$

Cum $\delta\theta_1 \neq 0$, rezultă reacțiunea N din anularea primului factor:

$$N = \frac{Pa}{L} \sin\alpha.$$

- b. Pentru calculul reacțiunii V se dă barei AB o rotație virtuală (elementară) $\delta\theta_2$ în jurul punctului B (fig.15.6.d). Se obțin pentru deplasările virtuale ale punctelor C și A valorile: $\delta y'_C = b\delta\theta_2$; $\delta y_A = L\delta\theta_2$, iar lucrul mecanic virtual al forțelor respective corespunzător acestor deplasări este nul:

$$\delta L = -V \cdot \delta y_A + P \sin\alpha \cdot \delta y'_C = (-VL + Pbsin\alpha)\delta\theta_2 = 0$$

Cum $\delta\theta_2 \neq 0$, rezultă reacțiunea V din anularea primului factor:

$$V = \frac{Pb}{L} \sin\alpha.$$

- c. Pentru calculul reacțiunii H , se dă o deplasare virtuală orizontală δx (fig.15.6.e). Lucrul mecanic virtual al forțelor respective corespunzător acestei deplasări este nul: $\delta L = H \cdot \delta x - P \cos\alpha \cdot \delta x = (H - P \cos\alpha) \cdot \delta x = 0$

de unde: $H = P \cos\alpha$.

Se poate aplica același raționament în cazul unei bare încastrate acționată de o forță exterioară, sau unui sistem de două sau mai multe bare articulate și rezemate.

15.6. Ecuatiile lui Lagrange de speța a doua

Cele mai reprezentative ecuații ale mecanicii analitice sunt ecuațiile lui Lagrange. Pentru deducerea lor se pleacă de la relația ce reprezintă sinteza celor două principii prezentate anterior, adică relația (15.25):

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \delta \bar{r}_i = 0. \quad (15.35)$$

Să considerăm un sistem material (de puncte sau corpuri) a cărui configurație este definită de h parametri independenți $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_h$ cunoscuți sub numele de *coordonate generalizate*. Vectorul de poziție \bar{r}_i al unui punct oarecare A_i al sistemului depinde de coordonatele generalizate, iar în cazul legăturilor reonome, depinde explicit și de timpul t , adică:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_h, t). \quad (15.36)$$

Deplasarea virtuală $\delta \bar{r}_i$ se poate deci scrie astfel:

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (15.37)$$

Introducând (15.37) în (15.35) obținem:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (15.38)$$

sau:
$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^h \left(\bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} - m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0$$

sau inversând ordinea de însumare:

$$\sum_{k=1}^h \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0. \quad (15.39)$$

Se observă că primul termen al parantezei reprezintă forțele generalizate care au fost definite anterior (15.31) prin:

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, h), \quad (15.40)$$

Totodată se pot efectua asupra celui de-al doilea termen al parantezei următoarele transformări:

$$\begin{aligned} m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} &= m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \bar{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \bar{v}_i \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\bar{r}_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (15.41)$$

pentru masele m_i constante.

Pe de altă parte, din relația (15.27) rezultă

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^h \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \quad (15.42)$$

unde $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$ fiind vitezele generalizate.

Consecința imediată a relației (15.42) este faptul că:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, h \quad (15.43)$$

În acest caz relația (15.41) devine:

$$\begin{aligned} m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \end{aligned} \quad (15.44)$$

Energia cinetică E a întregului sistem material este:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (15.45)$$

deci expresia (15.44) însumată pentru toate punctele materiale ale sistemului se

$$\text{mai poate scrie: } \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} \quad (15.46)$$

În virtutea relațiilor (15.40), (15.46) și a unei schimbări de semn, relația (15.39) devine:

$$\sum_{k=1}^h \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0. \quad (15.47)$$

Deoarece legătura este oloamnă, în consecință deplasările virtuale $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_h$ sunt independente și diferite de zero, atunci pentru ca ecuația (15.47) să fie satisfăcută, este necesar ca toți coeficienții să fie nuli, adică:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} - Q_k = 0 \quad (15.47)$$

sau:
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, h) \quad (15.48)$$

și sunt numite *ecuațiile lui Lagrange de speța a doua* și reprezintă un sistem de h ecuații diferențiale scalare cu h necunoscute q_1, q_2, \dots, q_h deci comod de aplicat în diferitele probleme concrete. Forțele generalizate sunt date de (15.31) sau (15.34):

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right); \quad Q_k = \frac{(\delta L)_{q_k \text{ variabil}}}{\delta q_k}.$$

Observații:

- 1) Pentru studiul mișcării unui sistem de puncte materiale cu mai multe grade de libertate, cu ajutorul sistemelor de ecuații (15.44), este necesar să se stabilească expresia energiei cinetice a întregului sistem E și a forței generalizate Q_k , în funcție de coordonatele generalizate, de vitezele generalizate și de timp.
- 2) Expresia energiei cinetice E se determină relativ ușor. Se exprimă coordonatele (x_i, y_i, z_i) ale unui punct oarecare A_i în funcție de coordonatele generalizate q_1, q_2, \dots, q_h ; se derivează în raport cu timpul coordonatele punctului A_i și apoi se formează suma:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Expresia lui E poate fi determinată și ca suma energiilor cinetice ale fiecărui corp din sistem ținându-se seama de particularitatea mișcării corpului respectiv.

- 3) Expresia forței generalizate Q_k se poate determina fie ținând seama de

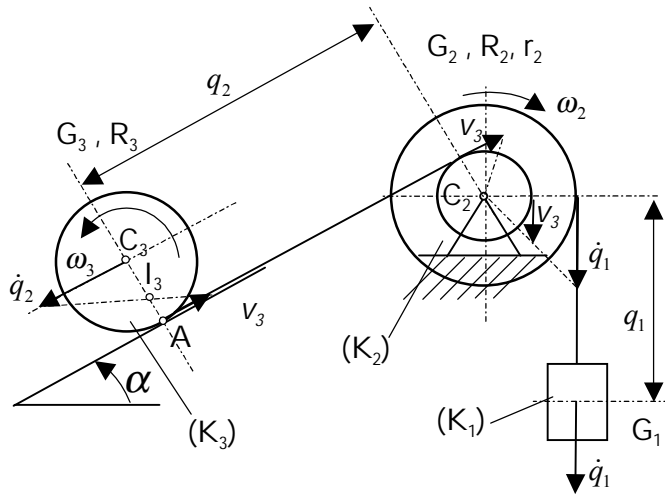
expresia (15.31):
$$Q_k = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

sau de formula (15.34):
$$Q_k = \frac{(\delta L)_{q_k \text{ var}}}{\delta q_k}.$$

Aplicație

Se dă sistemul format din trei corpuri K_1 , K_2 , K_3 , legate între ele prin fire inextensibile din figura 15.7 ; în figură sunt trecute elementele mecanice și geometrice ale corpurilor, precum și sensurile de mișcare ale corpurilor; așa cum se observă corpurile au următoarele mișcări: de translație, de rotație și plan-paralelă.

Se cere să se determine mișcarea sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange.



Rezolvare

Problema are două grade de libertate și se iau drept coordonate generalizate distanțele q_1 și q_2 din fig. 15.7. Energia cinetică a întregului sistem este suma energiilor cinetice ale celor trei corpuri (cu mișcările lor particulare, iar roțile se consideră omogene):

$$E = E_1 + E_2 + E_3, \text{ unde:}$$

Fig.15.7

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} \dot{q}_1^2; \quad E_2 = \frac{1}{2} J_{C_2} \omega_2^2 = \frac{1}{4} \frac{G_2}{g} R_2^2 \omega_2^2;$$

$$E_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{C_3}^2 + \frac{1}{2} J_{C_3} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{G_3}{g} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{4} \frac{G_3}{g} R_3^2 \omega_3^2.$$

Pentru corpul K_2 , care execută o mișcare de rotație în jurul centrului său de masă C_2 , se poate scrie: $\omega_2 = \frac{\dot{q}_1}{R_2} = \frac{v_3}{r_2}$ și vom avea: $E_2 = \frac{1}{4} \frac{G_2}{g} \dot{q}_1^2$.

Pentru corpul K_3 , care execută o mișcare plan paralelă, avem:

$$\omega_3 = \frac{\dot{q}_2}{C_3 I_3} = \frac{v_3}{R_3 - C_3 I_3}, \text{ unde } v_3 = \frac{r_2}{R_2} \dot{q}_1 \text{ și deci}$$

$$C_3 I_3 = \frac{R_2 R_3 \dot{q}_2}{R_2 \dot{q}_2 + r_2 \dot{q}_1}, \text{ adică } \omega_3 = \frac{R_2 \dot{q}_2 + r_2 \dot{q}_1}{R_2 R_3}$$

$$\text{și prin urmare: } E_3 = \frac{1}{2} \frac{G_3}{g} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{4} \frac{G_3}{g} \left(\frac{R_2 \dot{q}_2 + r_2 \dot{q}_1}{R_2} \right)^2.$$

Rezultă energia totală a sistemului:

$$E = \left(\frac{1}{2} \frac{G_1}{g} + \frac{1}{4} \frac{G_2}{g} + \frac{1}{4} \frac{G_3}{g} \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \dot{q}_1^2 + \frac{3}{4} \frac{G_3}{g} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{G_3}{g} \frac{r_2}{R_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

Derivatele ei parțiale în raport cu q_1 , q_2 și în raport cu \dot{q}_1 , \dot{q}_2 sunt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial q_1} &= \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0; \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} &= \left(\frac{G_1}{g} + \frac{1 G_2}{2 g} + \frac{1 G_3 r_2^2}{2 g R_2^2} \right) \dot{q}_1 + \frac{1 G_3 r_2}{2 g R_2} \dot{q}_2; \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{3 G_3}{2 g} \dot{q}_2 + \frac{1 G_3 r_2}{2 g R_2} \dot{q}_1.\end{aligned}$$

Pentru determinarea forțelor generalizate Q_1 și Q_2 se calculează lucrul mecanic virtual considerând pe rând ca variabile, coordonatele q_1 și respectiv q_2 :

$$Q_1 = \frac{(\delta L)_{q_1 \text{ variabil}}}{\delta q_1} = \frac{G_1 \delta q_1}{\delta q_1} = G_1; \quad Q_2 = \frac{(\delta L)_{q_2 \text{ variabil}}}{\delta q_2} = \frac{G_3 \sin \alpha \cdot \delta q_1}{\delta q_1} = G_3 \sin \alpha.$$

Ecuțiile lui Lagrange (15.48) se scriu deci

$$\begin{aligned}\frac{1}{2g} \left[\ddot{q}_1 \left(2G_1 + G_2 + G_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) + G_3 \frac{r_2}{R_2} \ddot{q}_2 \right] &= G_1 \\ \frac{G_3}{2g} \left(3\ddot{q}_2 + \frac{r_2}{R_2} \ddot{q}_1 \right) &= G_3 \sin \alpha.\end{aligned}$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$\ddot{q}_1 = \frac{6G_1 - 2 \frac{r_2}{R_2} G_3 \sin \alpha}{6G_1 + 3G_2 + 2G_3 \frac{r_2^2}{R_2^2}} g; \quad \ddot{q}_2 = \frac{2}{3} g \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{r_2}{R_2} \frac{6G_1 - 2 \frac{r_2}{R_2} G_3 \sin \alpha}{6G_1 + 3G_2 + 2G_3 \frac{r_2^2}{R_2^2}} g$$

15.7. Ecuțiile lui Lagrange pentru cazul particular al forțelor derivând dintr-o funcție de forță.

Să considerăm cazul particular (destul de des întâlnit în problemele de mecanica teoretică) în care forțele \vec{F}_i date derivă din funcția de forță U_i , adică avem:

$$\vec{F}_i = \text{grad} U_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \vec{i} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i} \vec{j} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i} \vec{k}, \quad (15.49)$$

unde U_i depinde de coordonate și eventual de timp, adică

$$U_i = U_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dots, x_n, y_n, z_n; t) \quad (15.50)$$

Relația (15.49) este echivalentă cu relațiile:

$$X_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}, Y_i = \frac{\partial U_i}{\partial y_i}, Z_i = \frac{\partial U_i}{\partial z_i}. \quad (15.51)$$

În acest caz forța generalizată conform (15.31) se scrie:

$$\begin{aligned} Q_k &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial U_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^n U_i \right) = \frac{\partial U}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (15.52)$$

unde s-a notat $\sum_{i=1}^n U_i = U$ funcția de forță corespunzătoare întregului sistem, care depinde de aceleași coordonate ca și funcțiile U_i și eventual de timpul t :

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_h, t) \quad (15.53)$$

În cazul în care forța generalizată Q_k derivă dintr-o funcție de forță U se obține din relația (15.52). Ca și în mecanică newtoniană, *forța generalizată Q_k se numește conservativă*.

Ținând seama de expresiile (15.52) ale forțelor Q_k , ecuațiile (15.48) devin:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (k=1,2,\dots,h) \quad (15.54)$$

sau:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (E + U) = 0. \quad (15.55)$$

Aceste ecuații capătă o formă mai simplă dacă se consideră funcția:

$$L = E + U \quad (15.56)$$

numită funcția lui Lagrange sau potențialul cinetic al sistemului material.

Se observă că, în general, energia cinetică depinde de coordonatele generalizate, vitezele generalizate și timp, iar funcția de forță depinde de coordonatele generalizate și timp:

$$E = E(q_1, q_2, \dots, q_h; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_h, t); \quad U = U(q_1, q_2, \dots, q_h, t). \quad (15.57)$$

și deci:

$$L = E + U = L(q_1, q_2, \dots, q_h; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_h; t), \quad (15.58)$$

atunci este evidentă relația:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \quad (15.59)$$

și noua formă a ecuațiilor (15.55) este:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k=1,2,\dots,h). \quad (15.60)$$

Ecuțiile lui Lagrange scrise sub una din formulele (15.48), (15.54) sau (15.60) sunt ecuațiile generale de mișcare din mecanica analitică pentru un sistem material supus la legături olonome.

Acestea reprezintă un sistem de h ecuații diferențiale de ordinul doi, cu necunoscute funcțiile $q_k = q_k(t)$, care în condiții date (care satisfac condițiile inițiale referitoare la poziții $(q_k)_0$ și la viteze $(\dot{q}_k)_0$) conduc la soluții unice. De menționat că problema directă a dinamicii are întodeauna soluția unică.

Aplicație

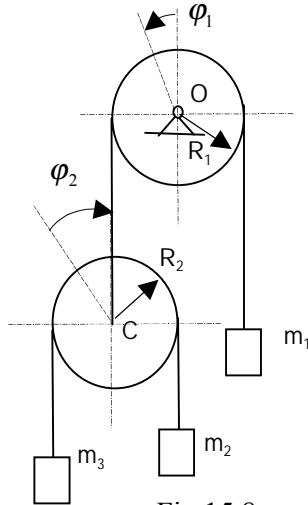


Fig.15.8

Se consideră un sistem format din trei corpuri de mase m_1, m_2, m_3 și două discuri de mase neglijabile (fig.15.8) având razele R_1 și R_2 . Să se studieze mișcarea sistemului cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange, scrise sub forma (15.60).

Rezolvare:

Sistemul de corpuri are două grade de libertate cinematică, adică poziția sistemului este determinată de doi parametri independenți, reprezentați de unghiurile: φ_1 și φ_2 : $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$, (cu condiția ca firele să nu alunece pe discuri). Vitezele celor trei corpuri, aflate în mișcare de translație, sunt:

$$v_1 = R_1 \dot{\varphi}_1; \quad v_2 = R_1 \dot{\varphi}_1 + R_2 \dot{\varphi}_2; \quad v_3 = R_1 \dot{\varphi}_1 - R_2 \dot{\varphi}_2.$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (R_1 \dot{\varphi}_1 + R_2 \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (R_1 \dot{\varphi}_1 - R_2 \dot{\varphi}_2)^2$$

$$E = \frac{1}{2} R_1^2 \dot{\varphi}_1^2 (m_1 + m_2 + m_3) + \frac{1}{2} R_2^2 \dot{\varphi}_2^2 (m_2 + m_3) + R_1 R_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (m_2 - m_3)$$

Funcția de forță a sistemului este:

$$U = -m_1 g R_1 \varphi_1 + m_2 g (R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2) + m_3 g (R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi_2)$$

$$U = g R_1 \varphi_1 (-m_1 + m_2 + m_3) + g R_2 \varphi_2 (m_2 - m_3)$$

Calculând derivatele parțiale ale funcției lui Lagrange ($L=E+U$) în raport cu φ_1 , φ_2 , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ și în raport cu timpul, și introducând aceste derivate în ecuațiile lui Lagrange (15.60) se obține următorul sistem de ecuații diferențiale:

$$R_1 (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{\varphi}_1 + R_2 (m_2 - m_3) \ddot{\varphi}_2 = g (-m_1 + m_2 + m_3)$$

$$R_1 (m_2 - m_3) \ddot{\varphi}_1 + R_2 (m_2 + m_3) \ddot{\varphi}_2 = g (m_2 - m_3)$$

Rezolvând acest sistem, obținem accelerațiile unghiulare

$$\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1, \quad \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2, \quad \text{constante.}$$

15.8. Ecuatiile canonice ale lui Hamilton

Se reia studiul mișcării unui sistem de n puncte materiale supus unor legături olonome și reonome, având h grade de libertate (parametrii $\{q_k\}_{k=1,\dots,h}$) și care este acționat de un sistem de forțe conservative. Această problemă a fost studiată anterior cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange, care se scriu sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k=1,2,\dots,h). \quad (15.61)$$

unde $L = L(q_1, q_2, \dots, q_h; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_h; t)$ este funcția lui Lagrange sau potențialul cinetic al sistemului material.

În anumite probleme este mai comod să se reducă ordinul ecuațiilor diferențiale (15.61) de la doi la unu, adică să se găsească un sistem echivalent cu cel anterior, care să conțină $2h$ ecuații diferențiale de ordinul întâi, rezultat care de datorează lui *W.R. Hamilton*.

Înmulțind cele h ecuații (15.61) respectiv cu: $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_h$ și însumându-le se obține:

$$\sum_{k=1}^h \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{k=1}^h \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (15.62)$$

Folosind identitatea $uv' = (uv)' - u'v$, derivatele fiind în raport cu timpul, se poate scrie:

$$\sum_{k=1}^h \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{k=1}^h \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \quad (15.63)$$

Introducând această relație în (15.62) se obține:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^h \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = 0 \quad (15.64)$$

Observând că funcția Lagrange depinde de coordonatele generalizate, de vitezele generalizate și (eventual) de timp, derivata totală în raport cu timpul a acestei funcții este:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (15.65)$$

Comparând relațiile (15.64) și (15.65) constatăm că prima relație se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^h \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{dL}{dt} = 0 \quad (15.66)$$

Se definește impulsul generalizat, corespunzător coordonatei generalizate q_k , prin expresia:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (15.67)$$

$$\text{Relația (15.66) se mai scrie: } \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^h p_k \dot{q}_k - L \right] + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (15.68)$$

Se observă că dacă $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, relația (15.68) conduce la o integrală primă, adică:

$$\sum_{k=1}^h p_k \dot{q}_k - L = \text{const.},$$

$$\text{unde expresia: } H = \sum_{k=1}^h p_k \dot{q}_k - L \quad (15.69)$$

se numește *funcția lui Hamilton*. Această funcție are dimensiunea funcției lui Lagrange L , respectiv a unei energii și joacă un rol important în mecanică.

Această funcție este o constantă a mișcării atunci când funcția lui Lagrange nu depinde explicit de timp. În cazul legăturilor scleronome, *funcția lui Hamilton* reprezintă *energia mecanică totală* a sistemului. Deoarece în cazul legăturilor scleronome, energia cinetică este o formă pătratică în vitezele generalizate \dot{q}_k , aplicând teorema lui Euler pentru funcții omogene de gradul m :

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + \dots = m \cdot f(x, y, z, \dots)$$

$$\text{și observând că: } p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \quad (15.70)$$

expresia (15.69) devine:

$$H = \sum_{k=1}^h p_k \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^h p_k \dot{q}_k - (E + U) = 2E - (E + U) = E - U \quad (15.71)$$

$$H = E + V$$

Din această ultimă relație rezultă că în cazul menționat H reprezintă *energia mecanică totală* a sistemului de puncte materiale considerat. De asemenea rezultă și faptul că $H = \text{const.}$ reprezintă o integrală primă a mișcării, adică $E + V = E_m = \text{const.}$

În continuare se urmărește transformarea ecuațiilor lui Lagrange (15.61) din ecuații de ordinul doi, în ecuații diferențiale de ordinul întâi. Pentru aceasta se înlocuiesc variabilele q_k, \dot{q}_k ($k=1, 2, \dots, h$) și t , prin variabilele: q_k, p_k ($k=1, 2, \dots, h$) și t , adică de la funcția lui Lagrange $L = L(q_1, q_2, \dots, q_h; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_h; t)$ se trece la o funcție de coordonate generalizate, de impulsuri generalizate și de timp, numită *funcția lui Hamilton*:

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_h; p_1, p_2, \dots, p_h, t) \quad (15.72)$$

Aplicând operatorul diferențial $d(\cdot)$ acestei funcții, rezultă:

$$dH = \sum_{k=1}^h \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^h \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (15.73)$$

Aplicând același operator diferențial $d(\cdot)$ relației (15.69), și ținând seama de expresia funcției L se obține:

$$dH = \sum_{k=1}^h \dot{q}_k dp_k + \sum_{k=1}^h p_k d\dot{q}_k - \left(\sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right) \quad (15.74)$$

Ținând seama de expresia impulsului generalizat (15.67) relația (15.74) se scrie:

$$dH = \sum_{k=1}^h \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^h \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (15.75)$$

Pe de altă parte, ținând seama de (15.67), ecuațiile lui Lagrange (15.61) se scriu:

$$\frac{d}{dt}(p_k) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = \dot{p}_k, \quad (k=1,2,\dots,h) \quad (15.76)$$

Relația (15.75) se scrie:

$$dH = -\sum_{k=1}^h \dot{p}_k dq_k + \sum_{k=1}^h \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (15.77)$$

Comparând cele două expresii (15.73) și (15.77) ale diferențialei dH și ținând seama că variabilele q_k , p_k ($k=1,2,\dots,h$) și t sunt independente, rezultă:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k; \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = \dot{p}_k; \quad (k=1,2,\dots,h) \quad (15.78)$$

și

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (15.79)$$

Ecuațiile (15.78) formează un sistem de $2h$ ecuații diferențiale de ordinul întâi, mai ușor de rezolvat decât cele h ecuații diferențiale de ordinul doi ale lui Lagrange. Ecuațiile (15.78) se numesc *ecuațiile canonice ale lui Hamilton*.

Derivând în raport cu timpul funcția lui Hamilton (15.72), se obține:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^h \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^h \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (15.80)$$

Înlocuind expresiile (15.78) în expresia derivatei (15.80) se obține:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^h (-\dot{p}_k \dot{q}_k) + \sum_{k=1}^h \dot{q}_k \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{sau} : \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (15.81)$$

deci *derivata totală și derivata parțială în raport cu timpul a funcției lui Hamilton sunt egale*.

Dacă H nu depinde explicit de timp și respectiv dacă L nu depinde explicit de timp (vezi relațiile (15.78) și (15.80)), atunci:

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad \text{deci} \quad H = \text{constant}. \quad (15.82)$$

În cadrul teoriei lui Hamilton, mișcarea se studiază cu ajutorul coordonatelor generalizate și a impulsurilor generalizate, care se determină cu ajutorul relațiilor (15.78).

Mărimile q_k , p_k ($k=1,2,\dots,h$) se numesc *coordonate canonice* și cu ajutorul lor se determină starea dinamică a unui sistem de puncte materiale. Se poate spune că mișcarea sistemului este cunoscută dacă se cunosc coordonatele unui punct în spațiul $2h$ -dimensional, numit *spațiul fazelor*. În acest spațiu q_k și p_k sunt *coordonate conjugate*. În cazul unui sistem cu un singur grad de libertate, *spațiul fazelor* devine *planul fazelor*, coordonatele fiind q și p .

Aplicație

Se consideră o bară omogenă de lungime $OA=L$ și greutate G , care se mișcă în planul vertical, în jurul unei axe orizontale ce trece prin capătul ei O (fig.15.9). Se cere să se obțină ecuația diferențială a mișcării folosind cele două metode:

- Ecuațiile lui Lagrange
- Ecuațiile lui Hamilton

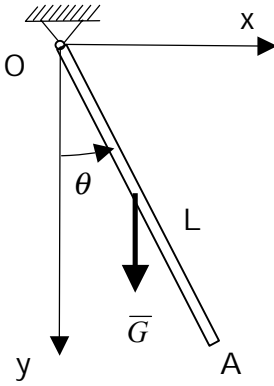


Fig. 15.9

Rezolvare:

- Sistemul are un singur grad de libertate, parametrul mișcării fiind unghiul θ . Deci unica coordonată generalizată fiind $q=\theta$ și singura forță exterioară fiind greutatea barei G , care este o forță conservativă, căreia îi corespunde funcția de forță :

$$U = \frac{L}{2} G \cos \theta + C = \frac{L}{2} G \cos q + C$$

unde C este o constantă arbitrară.

Energia cinetică la un moment oarecare t este:

$$E = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} \frac{L^2}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{GL^2}{6g} \dot{q}^2$$

Deci funcția lui Lagrange are expresia:

$$L = E + U = \frac{GL^2}{6g} \dot{q}^2 + \frac{GL}{2} \cos q + C$$

Mișcarea depinzând de un singur parametru, se scrie o singură ecuație a lui Lagrange, de tipul (15.61), pentru aceasta se calculează derivatele :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{GL}{2} \sin q; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{GL^2}{3g} \dot{q}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{GL^2}{3g} \ddot{q}$$

deci ecuația lui Lagrange se scrie:

$$\frac{GL^2}{3g} \ddot{q} + \frac{GL}{2} \sin q = 0 \quad \text{sau :} \quad \ddot{q} + \frac{3g}{2L} \sin q = 0$$

ecuație cunoscută de la pendulul fizic, studiat la paragraful 13.4.

- La aceeași ecuație se poate ajunge folosind teoria lui Hamilton. Funcția lui Hamilton se scrie conform relației (15.69), pentru cazul particular în care avem o singură coordonată generalizată și un singur impuls generalizat p :

$$H = \sum_{k=1}^h p_k \dot{q}_k - L = p \dot{q} - L$$

unde impulsul generalizat ce scrie conform relației (15.67):

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{GL^2}{3g} \dot{q}.$$

Dacă se exprimă din această relație viteza generalizată în funcție de impulsul generalizat: $\dot{q} = \frac{3g}{GL^2} p$ și se înlocuiește în expresia de sus a

funcției lui Hamilton, se obține: $H = \frac{3g}{GL^2} p^2 - \left(\frac{3}{2} \frac{g}{GL^2} p^2 + \frac{GL}{2} \cos q + C \right)$

Ecuatiile canonice ale lui Hamilton (15.78): $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}; \quad \frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p}$

în acest caz devin: $\frac{3g}{GL^2} p = \dot{q}; \quad \frac{GL}{2} \sin q = -p$

unde dacă se elimină impulsurile generalizate, se obține ecuația diferențială de ordinul doi a mișcării barei, pe care am obținut-o mai sus folosind ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{GL^2}{3g} \ddot{q} + \frac{GL}{2} \sin q = 0 \quad \text{sau :} \quad \ddot{q} + \frac{3g}{2L} \sin q = 0$$

15.9. Elemente de stabilitate

15.9.1. Echilibrul stabil. Teorema Lejeune-Dirichlet

Fie un sistem de n puncte materiale supus la legături ideale olonome, a cărui poziție depinde de h parametri – coordonatele generalizate q_1, q_2, \dots, q_h – și acționat de forțe conservative, care derivă din funcția de forță $U(q_1, q_2, \dots, q_h)$.

Pentru ca sistemul să fie în echilibru, conform principiului lucrului mecanic virtual și conform relației (15.56) avem:

$$\delta L = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_{k=1}^h \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (15.83)$$

Deplasările virtuale fiind arbitrare, din relația (15.83) rezultă condițiile de echilibru:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_h} = 0 \quad (15.84)$$

Aceste relații reprezintă expresia matematică a faptului că funcția U ia valori extreme (maxime sau minime) pentru configurațiile de echilibru ale sistemului de puncte materiale considerat.

În continuare ne interesează determinarea condițiilor pentru care configurațiile de echilibru sunt stabile. Se spune că o *configurație de echilibru este stabilă* dacă la o perturbare foarte mică a sistemului de puncte materiale aflat în echilibru, noua configurație nu se îndepărtează foarte mult de configurația de echilibru.

Studiul stabilității echilibrului are la bază *teorema Lejeune-Dirichlet*, cu următorul enunț: “dacă în configurația de echilibru a unui sistem material, asupra căruia acționează un sistem de forțe conservative, funcția de forțe U , are un maxim, atunci echilibrul este stabil”.

Pentru demonstrarea acestei teoreme se consideră un sistem material în echilibru și se notează cu $q_1^0, q_2^0, \dots, q_h^0$ valorile coordonatelor generalizate date de ecuațiile (15.84) și care corespund ecuațiilor de echilibru. Se efectuează o schimbare de variabile astfel încât configurația de echilibru să corespundă originii noului sistem de coordonate: $q_1=0, q_2=0, \dots, q_h=0$. Întrucât funcția de forțe U poate fi determinată cu aproximația unei constante, se alege această constantă astfel încât funcția de forțe să fie nulă în origine, adică configurației de echilibru îi corespunde $U(0, 0, \dots, 0)=0$, valoare ce este considerată maximă pentru U . Rezultă că, într-o vecinătate a originii, U are valori negative, respectiv energia potențială $V=-U$, are valori pozitive, iar în origine valoarea zero.

Se presupune că sistemul este deplasat într-o configurație vecină arbitrară și că se impun punctelor sistemului, viteze arbitrare mici. În noua configurație, funcția de forțe U are valoarea $U_0 < 0$ și datorată variațiilor mici ale coordonatelor și vitezelor mici imprimare, valoarea funcției de forțe în modul și a energiei cinetice sunt inferioare unor valori pozitive $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ arbitrar de mici, adică: $|U_0| < \varepsilon_1, E_0 < \varepsilon_2$. Între configurația inițială, caracterizată prin U_0 și E_0 și o poziție infinit vecină, caracterizată prin U și V se aplică teorema energiei cinetice:

$$dE = dL = dU \quad (15.85)$$

$$\text{sau } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i0}^2 = U - U_0 \quad (15.86)$$

$$\text{sau } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = U + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i0}^2 - U_0 \right). \quad (15.87)$$

Membrul stâng al expresiei (15.87) reprezintă tocmai energia cinetică totală E a sistemului material, care este o mărime pozitivă, deci și membrul drept al egalității trebuie să fie pozitiv. Paranteza din membrul drept este pozitivă, pentru că este suma dintre o energie cinetică pozitivă și cantitatea ($-U_0$) care este pozitivă întrucât $U_0 < 0$. Deoarece, după raționamentul de mai sus, avem:

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i0}^2 < \varepsilon_2, \quad -U_0 < \varepsilon_1$$

$$\text{rezultă că: } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i0}^2 - U_0 < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon \quad (15.88)$$

unde: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ este un număr pozitiv, arbitrar de mic.

Relația (15.87) devine:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = U + \varepsilon \quad (15.89)$$

Primul membru al inegalității (15.89) fiind pozitiv, avem:

$$U + \varepsilon > 0 \quad (15.90)$$

Dacă configurația de echilibru considerată nu ar fi stabilă, atunci sistemul material s-ar îndepărta mult de configurația de echilibru, deci parametrii $q_1, q_2, \dots, q_k \dots q_h$ ar lua valori mari și implicit funcția de forțe $U(q_1, q_2, \dots, q_h)$ ar lua de asemenea valori mari, ceea ce ar duce la $U + \varepsilon < 0$, U fiind negativ.

Dar $U + \varepsilon < 0$ implică $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 < 0$, ceea ce este imposibil. Deci funcția de forțe U , trebuie să fie neapărat mică, adică:

$$|U| < \eta, \quad \eta < \varepsilon, \quad (15.91)$$

unde η este un număr pozitiv, arbitrar de mic, mai mic decât ε care este de asemenea un număr pozitiv, arbitrar de mic.

În concluzie, conform relațiilor (15.91), valorile coordonatelor generalizate $q_1, q_2, \dots, q_k \dots q_h$ trebuie să difere foarte puțin de cele din configurația de echilibru, deci echilibrul este stabil în condițiile **teoremei Lejeune-Dirichlet** (funcția de forță U trebuie să fie maximă).

Din punct de vedere matematic, pentru ca o funcție de forțe $U(q_1, q_2, \dots, q_h)$ să fie maximă este necesar și suficient să fie îndeplinite condițiile (15.84):

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_h} = 0$$

și toate expresiile următoare să fie pozitive:

$$\Delta_1 = -A_{11} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \dots \quad \Delta_h = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1h} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{h1} & A_{h2} & \dots & A_{hh} \end{vmatrix} > 0 \quad (15.92)$$

$$\text{unde: } A_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{q_1=q_1^0, q_2=q_2^0, \dots, q_h=q_h^0}$$

iar $q_1^0, q_2^0, \dots, q_h^0$ reprezintă soluțiile sistemului de ecuații (15.84).

În cazul unui sistem cu un singur grad de libertate, condițiile (15.92) devin:

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right)_{q=q^0} < 0 \quad (15.93)$$

Pentru un sistem cu două grade de libertate, condițiile de echilibru stabil (15.92) devin:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_{q_1=q_1^0, q_2=q_2^0} < 0; \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_{q_1=q_1^0, q_2=q_2^0} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \right)_{q_1=q_1^0, q_2=q_2^0} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_{q_1=q_1^0, q_2=q_2^0}^2 > 0; \quad (15.94)$$

Aplicația 1

Se dă bara $AB=L$ omogenă, de greutate G , $AC=CB=L/2$, rezemată de un perete vertical și de punctul O (fig. 15.10). Se cere să se determine poziția de echilibru și să se stabilească dacă echilibrul este stabil sau instabil (distanța $a > L/2$ este dată).

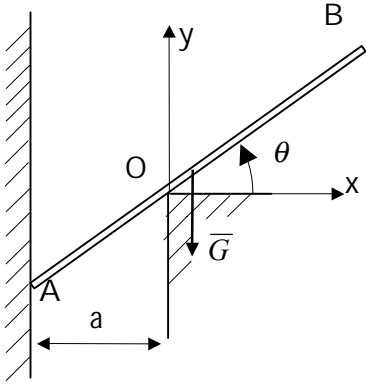


Fig.15.10

Rezolvare

În raport cu sistemul de axe ales în fig. 15.10., funcția de forță este:

$$U = -Gy_C + C$$

$$\text{sau: } U = -G \left(\frac{L}{2} \cdot \sin \theta - a \cdot \operatorname{tg} \theta \right) + C$$

Poziția de echilibru se determină cu condiția:

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -G \left(\frac{L}{2} \cdot \cos \theta - \frac{a}{\cos^2 \theta} \right) = 0,$$

$$\text{sau } \cos \theta = \sqrt[3]{\frac{2a}{L}}$$

Pentru a vedea dacă echilibrul este stabil, se verifică dacă este îndeplinită condiția: $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right)_{q=q^0} < 0$, adică: $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\sqrt[3]{2a/L}} < 0$.

$$\text{Astfel: } \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -G \left(-\frac{L}{2} \cdot \sin \theta - \frac{2a \cdot \sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) = G \sin \theta \left(\frac{L}{2} + 2a \cdot \frac{L}{2a} \right) = \frac{3L}{2} G \sin \theta$$

Se observă că pentru valori ale unghiului $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (care convin problemei), se obține:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\sqrt[3]{2a/L}} > 0$$

ceea ce indică existența unui *echilibru instabil*.

Aplicația 2

Se dă o placă omogenă, de latură a și greutate G_1 , se poate roti în plan vertical în jurul unei axe orizontale ce trece prin colțul notat cu O (articulație cilindrică plană, fig. 15.11). De colțul A este prins capătul unui fir. Firul este petrecut peste scripetele ideal B fără frecare, iar de celălalt capăt al firului se suspendă greutatea $G_2 = \sqrt{2}/2 G_1$. Se cunosc distanțele $OA=OB=a$

Se cere să se determine pozițiile de echilibru ale sistemului și să se studieze stabilitatea lor.

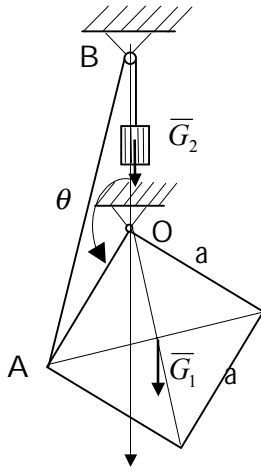


Fig.15.11

Rezolvare

Se notează unghiul $\angle AOB = \theta$ și atunci în raport cu sistemul de axe ales în fig. 15.11., funcția de forță este:

$$U = G_1 a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\pi - \theta - \frac{\pi}{4}\right) + G_2 \left(L - 2a \sin \frac{\theta}{2}\right) + C_1$$

unde cu L s-a notat lungimea totală a firului (de la A la greutatea G_2). Singurul parametru de care depinde echilibrul sistemului este unghiul θ , iar condițiile de stabilitate sunt date de ecuațiile (15.93). Se calculează mai întâi prima derivată a lui U în raport cu θ și se egalează cu zero:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = G_1 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) - G_2 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} = 0$$

Întrucât $G_2 = \sqrt{2} / 2 G_1$ se obține:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) - \cos \frac{\theta}{2} = 0, \text{ sau: } \sin\left(\frac{3\theta}{4} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

Soluțiile ultimei ecuații sunt: $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$; $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$; $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$;

Derivata de ordinul al II-lea este:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -G_1 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) + G_2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = G_1 a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) \right]$$

care pentru pozițiile de echilibru: $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$; $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$; $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$;

capătă valorile:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\frac{\pi}{6}} = G_1 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{3}{8} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \right] > 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = G_1 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\frac{3\pi}{2}} = G_1 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] > 0$$

Prin urmare, echilibrul este stabil pentru $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$

și instabil pentru $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$; $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$.

15.9.2. Stabilitatea mișcării. Criteriul Routh-Hurwitz

Noțiunea de stabilitate întâlnită la echilibru, a fost extinsă și la mișcarea unui sistem de puncte materiale. Astfel, mișcarea sub acțiunea unui sistem de forțe dat depinde de condițiile inițiale. Dacă la perturbații foarte mici ale condițiilor inițiale corespund mișcări ale sistemului care rămân tot timpul în vecinătatea mișcării neperturbate, mișcarea neperturbată, este considerată *stabilă*, iar în caz contrar, este considerată *nestabilă*. Prin anumite schimbări de variabile și obținerea sistemului de ecuații ale mișcării neperturbate, se ajunge la concluzia că *studiul stabilității mișcării* se reduce la studiul stabilității echilibrului, analizată anterior.

Problema stabilității mișcării este vastă, cu multe implicații teoretice, iar tratarea ei mai dezvoltată depășește obiectivele prezentei lucrări. În consecință ne vom limita numai la unele aspecte cu caracter aplicativ.

Se consideră ecuațiile de mișcare ale unui sistem material sub o formă în care timpul nu apare explicit, adică:

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (15.95)$$

Studiul stabilității mișcării dată de aceste ecuații se poate reduce la studiul stabilității unei configurații de echilibru, considerată că are loc pentru $x_i = 0$, ($i=1,2,3,\dots,n$), conform ipotezelor adoptate. Dacă variabilele x_i sunt foarte mici, dezvoltând în serie funcțiile $\varphi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ (atunci când este posibil), se pot păstra numai termenii de gradul I, atunci sistemul (15.95) se transformă în:

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (15.96)$$

denumit și *sistemul primei aproximații*.

Ecuațiile (15.96) reprezintă un sistem de ecuații diferențiale liniare, astfel încât soluțiile pot fi de forma: $x_i = C_i e^{rt}$. Din condiția ca aceste soluții să verifice ecuațiile (15.96), și după simplificarea cu e^{rt} rezultă un sistem de n ecuații algebrice liniare și omogene în constantele C_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$). Sistemul fiind omogen, pentru ca $C_i \neq 0$, trebuie ca determinantul coeficienților să fie nul, adică:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0 \quad (15.97)$$

Acest determinant este echivalent cu o ecuație algebrică de gradul n în necunoscuta r , numită ecuație caracteristică, și anume:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (15.98)$$

Dacă soluțiile ecuației (15.98) sunt reale și negative, sau sunt complex conjugate cu partea reală negativă, atunci soluțiile ecuațiilor diferențiale (15.96) tind spre zero când $t \rightarrow \infty$, iar *configurația de echilibru este asimptotic stabilă*. Dacă există o combinație a celor două cazuri anterioare, *configurația de echilibru este simplu stabilă*. Dacă numai una din rădăcinile ecuației (15.98) nu se încadrează în unul dintre cele două cazuri anterioare, *configurația de echilibru este nestabilă*.

Pentru aprecierea naturii rădăcinilor ecuației (15.98) se folosește *criteriul Routh-Hurwitz* care arată că toate rădăcinile ecuației au partea reală negativă dacă:

1. Polinomul $P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n$ are toți coeficienții nenuli și de același semn;
2. Toți determinanții principali ai matricii :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot a_1 \\ a_{2m-1} & a_{2m-2} & a_{2m-3} & a_{2m-4} & a_{2m-5} & \dots & a_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad (15.99)$$

trebuie să fie pozitivi, adică:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \dots$$

$$\dots \Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2m-1} & a_{2m-2} & a_{2m-3} & a_{2m-4} & \dots & a_m \end{vmatrix} > 0 \quad (15.100)$$

Se observă că există relația de recurență:

$$\Delta_m = a_m \Delta_{m-1} \quad (15.101)$$

Dacă se aplică *criteriul Routh-Hurwitz* unei ecuații caracteristice de gradul al II-lea, deoarece $\Delta_1 > 0$ totdeauna, trebuie verificat că:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad \text{și} \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0 \quad (15.102)$$

Dacă același criteriu se aplică unei ecuații caracteristice de gradul trei, atunci trebuie îndeplinite condițiile:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0 \quad (15.103)$$

Aplicație

Presupunând că ecuația de mișcare a manșonului regulatorului unei mașini se scrie sub forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A(\omega - \omega_0)$$

unde: x este deplasarea manșonului regulatorului

m - masa echivalentă a sistemului,

c - coeficientul de rezistență

k - constanta elastică a arcului regulatorului;

ω - viteza unghiulară instantanee a mișcării

ω_0 - viteza unghiulară medie a mișcării

A - constantă

Pe de altă parte ecuația mișcării regulatorului este dată de:

$$J\dot{\omega} = -Bx$$

unde: J este momentul de inerție redus al organelor în mișcare de rotație

B - o constantă

Se cere să se determine condițiile de stabilitate ale sistemului alcătuit din manșon și regulator.

Rezolvare

Ecuațiile diferențiale ale mișcării sunt:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A(\omega - \omega_0) \quad (a)$$

$$J\dot{\omega} = -Bx$$

Notând pentru mișcarea perturbată:

$$x = x_0 + q_1$$

$$\text{și } \omega = \omega_0 + q_2$$

și introducându-le în sistemul (a) se obține un nou sistem:

$$m\ddot{q}_1 + c\dot{q}_1 + kq_1 + kx_0 = Aq_2 \quad (b)$$

$$J\dot{q}_2 = -B(q_1 + x_0)$$

Acest sistem se rezolvă prin metoda derivării și a eliminării; dacă se derivatează prima ecuație (b) în raport cu timpul și se elimină \dot{q}_2 din a doua, se obține :

$$\begin{aligned}
 m\ddot{q}_1 + c\dot{q}_1 + kq_1 &= A\dot{q}_2 \\
 m\ddot{q}_1 + c\dot{q}_1 + kq_1 + \frac{AB}{J}q_1 + \frac{AB}{J}x_0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{c}$$

Ecuția caracteristică a ecuației diferențiale (c) este:

$$mr^3 + cr^2 + kr + \frac{AB}{J} = 0 \tag{d}$$

Aplicând criteriul de stabilitate Routh-Hurwitz se observă că:

$$a_0 = m, \quad a_1 = c, \quad a^2 = k, \quad a_3 = \frac{AB}{J} \tag{e}$$

Conform relațiilor (15.100), pentru ca mișcarea să fie stabilă trebuie satisfăcute relațiile:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 = c > 0; \quad \Delta_2 &= \begin{vmatrix} c & m \\ \frac{AB}{J} & k \end{vmatrix} = ck - m\frac{AB}{J} > 0; \\
 \Delta_3 &= \begin{vmatrix} c & m & 0 \\ \frac{AB}{J} & k & c \\ 0 & 0 & \frac{AB}{J} \end{vmatrix} = \frac{AB}{J} \left(ck - m\frac{AB}{J} \right) > 0
 \end{aligned}
 \tag{f}$$

Aceste condiții sunt echivalente cu:

$$J\frac{ck}{m} > AB > 0 \tag{g}$$

care reprezintă tocmai condițiile de stabilitate căutate.

BIBLIOGRAFIE

1. Appel, P. –*Traité de mécanique rationnelle*, Gouthier –Villars, Paris , 1995.
2. Atanasiu, M. - *Mecanica* . Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
3. Buchholtz, N.N., Voronkov, I.M., Minokov, I.A.- *Culegere de probleme de mecanică rațională. (traducere din limba rusă)*. Editura tehnică, București, 1952.
4. Ceaușu, V., Enescu, N., Ceaușu, F - *Culegere de probleme de mecanică*, IPBucurești, vol.I,II,III, 1983.
5. Florian, V.-*Mecanica teoretică și Rezistența Materialelor*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
6. Huidu, T. - *Mecanica teoretică și elemente de mecanica solidului deformabil*, vol. I, II, Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești, 1983
7. Iacob, C. - *Mecanica Teoretică*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971
8. Onicescu, O., - *Mecanica* . Editura tehnică, București, 1969.
9. Posea, N., Florian,V., Talle,V., Tocaci, E.- *Mecanica aplicată pentru ingineri*. Editura tehnică, București, 1984.
- 10.Rădoi, M., Deciu, E. - *Mecanica* . Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977
- 11.Roșca, I. – *Mecanica pentru ingineri*. Editura MatrixRom, București, 1998.
- 12.Staicu, Șt. - *Mecanica*. Editura Didactică și Pedagogică R.A, București, 1998.
- 13.Teodorescu, P.P.- *Sisteme mecanice. Modele clasice*. Editura tehnică, București, 1988.
- 14.Tocaci, E.– *Mecanica*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
- 15.Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R. - *Mecanica Teoretică*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968
- 16.Voinaroski, R. - *Mecanica Teoretică*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968
- 17.Voinea, R., Voiculescu, D., Ceaușu, V. - *Mecanica* . Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975

CUPRINS

INTRODUCERE

1. Conceptele fundamentale și conceptele de lucru ale mecanicii newtoniene ...	5
2. Diviziunile mecanicii	7
3. Scurt istoric al mecanicii	9

Capitolul 1. NOȚIUNI DE ALGEBRĂ VECTORIALĂ

1.1. Mărimi scalare și mărimi vectoriale. clasificarea vectorilor	11
1.2. Adunarea vectorilor și înmulțirea lor cu un scalar	12
1.3. Versor sau vector unitate	13
1.4. Reprezentarea unui vector liber într-o bază ortonormată	13
1.5. Paralelismul și coplanaritatea vectorilor	14
1.6. Produsul scalar a doi vectori. Definiție. Proprietăți. Expresie analitică	14
1.7. Produsul vectorial a doi vectori. Definiție. Proprietăți. Expresie analitică..	16
1.8. Produsul mixt a trei vectori	17
1.9. Produsul dublu vectorial a trei vectori	17
1.10. Coordonatele pluckeriene ale unei direcții	18

Capitolul 2. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

2.1. Noțiuni introductive	19
2.2. Reducerea forțelor aplicate punctului material. Principiul paralelogramului	19
2.3. Echilibrul forțelor aplicate punctului material liber	21
2.4. Punctul material supus la legături. Axioma legăturilor	23
2.5. Echilibrul forțelor aplicate punctului material supus la legături ideale (fără frecare).....	27
2.6. Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare. Legile frecării uscate	25
2.7. Aspectul geometric al frecării de alunecare	28
2.8. Frecarea firelor	31

Capitolul 3. STUDIUL SISTEMELOR DE FORȚE APLICATE SOLIDULUI RIGID

3.1. Caracterul forțelor aplicate unui solid rigid	35
3.2. Teoria momentelor. Proprietăți	36
3.2.1. Momentul unei forțe în raport cu un punct	36
3.2.2. Momentul unei forțe față de o axă	38
3.2.3. Teoremele lui Varignon	42
3.3. Torsorul unui sistem de forțe	43
3.3.1. Rezultanta generală și momentul resultant	43

3.3.2. Proprietăți ale torsorului	44
3.3.3. Variația momentului rezultat la schimbarea polului de reducere. Proprietăți	45
3.3.4. Torsor minimal. Axa centrală a sistemului de forțe	47
3.3.5. Operații elementare de echivalență	51
3.4. Reducerea sistemelor de vectori	51
3.4.1. Echivalența două sisteme de vectori	51
3.4.2. Reducerea prin operații elementare de echivalență a unui sistem de vectori (S) la un sistem format din trei vectori aplicați în trei puncte arbitrare necoliniare.....	52
3.4.3. Reducerea unui sistem de vectori (S) prin operații elementare de echivalență la un sistem de doi vectori, dintre care unul este aplicat într-un punct arbitrar	53
3.4.4. Cuplul de vectori	54
3.4.5. Sisteme echivalente cu zero	54
3.4.6. Teorema reductibilității sistemelor echivalente	55
3.4.7. Cazurile de reducere a unui sistem de vectori legați sau alunecători	55
3.5. Reducerea unor sisteme particulare de vectori	57
3.5.1. Reducerea unui sistem de vectori coplanari	57
3.5.2. Reducerea unui sistem de vectori paraleli. Centrul vectorilor paraleli	59
3.6. Metode matriciale pentru reducerea unui sistem de vectori alunecători	62

Capitolul 4. CENTRUL MASELOR (CENTRUL DE GREUTATE)

4.1. Greutatea corpurilor. Centrul de greutate. Centrul maselor	65
4.2. Momente statice	66
4.3. Proprietățile centrului maselor	67
4.4. Centrul maselor pentru corpuri omogene	69
4.5. Masă specifică. Corpuri omogene. Centre de greutate geometrice	70

Capitolul 5. STATICA RIGIDULUI

5.1. Condițiile de echilibru pentru rigidul liber	77
5.2. Rigidul supus la legături fără frecare	79
5.2.1. Generalități. Condițiile de echilibru	79
5.2.2. Reazemul simplu	81
5.2.3. Articulația	82
5.2.4. Încăstrarea	84
5.2.5. Legătura (prinderea) cu fir	85
5.3. Rigidul supus la legături cu frecare	89
5.3.1. Aspectul general al frecărilor	89
5.3.2. Frecarea de alunecare	90

5.3.3. Frecarea de rostogolire	93
5.3.4. Frecarea în articulație și lagăre	96
5.3.5. Frecarea de pivotare	99

Capitolul 6. STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

6.1. Sisteme de puncte materiale. Forțe interioare și exterioare	101
6.2. Echilibrul sistemelor de puncte	102
6.3. Sisteme de corpuri rigide	103
6.4. Teorema solidificării. Teorema echilibrului părților	103
6.5. Sisteme din bare articulate (grinzi cu zăbrele)	108
6.5.1. Generalități. Ipoteze simplificatoare	108
6.5.2. Metoda izolării nodurilor	109
6.5.3. Metoda secțiunilor (Ritter)	110
6.5.4. Metoda grafică Cremona	110
6.5.5. Metoda matricială pentru grinzi cu zăbrele.....	111
6.6. Scripetele. Sisteme de scripeți	116
6.6.1. Scripetele fix	116
6.6.2. Scripetele mobil	117
6.6.3. Rigiditatea firelor la scripeți	117
6.6.4. Sistemul de scripeți macara - geamblac (Palanul simplu)	119
6.6.5. Palanul exponențial	120
6.6.6. Scripetele diferențial.....	122
6.7. Statica firului	122
6.7.1. Generalități	122
6.7.2. Ecuațiile generale de echilibru ale firelor	123
6.7.3. Ecuațiile diferențiale ale firelor în coordonate carteziane	124
6.7.4. Ecuațiile diferențiale ale firelor în coordonate naturale	125
6.7.5. Ecuațiile de echilibru ale firului omogen greu. Lănțișorul	126
6.7.1. Frecarea firelor. Aplicație. Frana cu bandă	128

Capitolul 7. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

7.1. Generalități	131
7.2. Traiectorie, viteză și accelerație	131
7.2.1. Traectoria unui punct în mișcare	131
7.2.2. Viteza unui punct în mișcare	132
7.2.3. Accelerația unui punct în mișcare	133
7.2.4. Viteza și accelerația unghiulară	134
7.2.5. Viteza și accelerația areolară	135
7.3. Studiul mișcării punctului material în diferite sisteme de coordonate.....	135
7.3.1. Mișcarea punctului în sistemul de coordonate carteziane.....	135
7.3.2. Mișcarea punctului în sistemul de coordonate cilindrice	136
7.3.3. Mișcarea punctului în sistemul de coordonate naturale.....	138
7.3.4. Calculul razei de curbură a traiectoriei din considerente	

cinematice.....	139
7.4. Mișcări particulare ale punctului material	140
7.4.1. Mișcarea rectilinie uniformă	140
7.4.2. Mișcarea rectilinie uniform variată	141
7.4.3. Mișcarea circulară uniformă	142
7.4.4. Mișcarea circulară neuniformă	142
7.4.5. Mișcarea pe o cicloidă	143
7.4.6. Mișcarea uniformă pe o elice	145

Capitolul 8. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

8.1. Generalități	147
8.2. Mărimi mecanice fundamentale și derivate. Sisteme de unități de măsură. Dimensiuni.....	147
8.3. Principiul fundamental al dinamicii	149
8.4. Ecuțiile diferențiale ale mișcării punctului material liber.....	151
8.5. Ecuțiile diferențiale ale mișcării punctului material liber neglijând rezistența aerului	153
8.6. Ecuțiile diferențiale ale mișcării punctului material liber când se ține seama de rezistența aerului	156
8.6.1. Mișcarea punctului material aruncat vertical în aer.....	156
8.6.2. Mișcarea punctului material aruncat oblic în aer.....	157
8.7. Dinamica punctului material supus la legături.....	160
8.8. Pendulul simplu (matematic)	164
8.8.1. Stabilirea ecuațiilor de mișcare. Determinarea tensiunii din fir	164
8.8.2. Cazul micilor oscilații ale pendulului simplu	165
8.9. Teoremele generale ale dinamicii punctului material	166
8.9.1. Teorema impulsului	166
8.9.2. Teorema momentului cinetic	168
8.9.3. Energia cinetică. Lucrul mecanic. Teorema energiei cinetice	170
8.9.4. Funcția de forță. Energia potențială. Conservarea energiei mecanice.....	173
8.10. Mișcarea punctului material sub acțiunea forțelor centrale	176
8.10.1. Generalității. Proprietății. Teorema ariilor	176
8.10.2. Ecuția diferențială a traiectoriei. Formula lui Binet	178
8.10.3. Mișcarea punctului material sub acțiunea forței de atracție universală	179
8.11. Mișcarea punctului material sub acțiunea forțelor elastice	185

Capitolul 9. CINEMATICA RIGIDULUI

9.1. Generalități	189
9.2. Mișcarea generală a rigidului	189
9.2.1. Parametrii mișcării. Grade de libertate. Unghiurile lui Euler. Traiectoriile diferitelor puncte.....	189

9.2.2. Distribuția vitezelor în mișcarea generală a solidului rigid.....	191
9.2.3. Proprietăți ale câmpului de viteze în mișcarea generală.....	193
9.2.4. Distribuția accelerațiilor în mișcarea generală a rigidului.....	195
9.3. Mișcări particulare ale rigidului.....	195
9.3.1. Mișcarea de translație.....	195
9.3.2. Mișcarea de rotație a rigidului cu axă fixă.....	197
9.3.3. Mișcarea elicoidală (de rototranslație)	204
9.3.4. Mișcarea plan-paralelă (plană).....	209
9.3.5. Mișcarea rigidului cu un punct fix.....	223

Capitolul 10. MIȘCAREA RELATIVĂ A PUNCTULUI MATERIAL ȘI A RIGIDULUI

10.1. Cinematica mișcării relative a punctului.....	225
10.1.1. Generalității. Definiții.....	225
10.1.2. Derivata absolută și relativă (locală) a unui vector.....	226
10.1.3. Compunerea vitezelor în mișcarea relativă.....	228
10.1.4. Compunerea accelerațiilor în mișcarea relativă.....	229
10.2. Dinamica mișcării relative a punctului.....	232
10.3. Cinematica mișcării relative a rigidului	236
10.3.1. Generalități. Definiții	236
10.3.2. Compunerea vitezelor în mișcarea relativă a rigidului	237
10.3.3. Compunerea accelerațiilor în mișcarea relativă a rigidului.....	238
10.4. Cinematica mișcării sistemelor de rigide	239
10.4.1. Definiții	239
10.4.2. Generalizarea relațiilor de la mișcarea relativă a rigidului în cazul lanțurilor cinematice deschise	240
10.4.3 Generalizarea relațiilor de la mișcarea relativă a rigidului în cazul lanțurilor cinematice închise.....	242
10.4.4. Analiza cinematică a lanțurilor cinematice închise plane. Metoda ciclurilor independente.....	242

Capitolul 11. MOMENTE DE INERTIE

11.1. Momente de inerție polare, axiale, planare și centrifugale. Raze de girație (de inerție).....	249
11.2. Momente de inerție în raport cu un sistem de axe cartezian.....	251
11.3. Momente de inerție geometrice.....	253
11.4. Variația momentelor de inerție față de axe paralele (th. lui Steiner).....	254
11.5. Variația momentelor de inerție față de axe concurente.....	256
11.6. Momente de inerție și axe de inerție principale	257
11.7. Elipsoidul de inerție.....	258
11.8. Aplicații.....	260

Capitolul 12. TEOREMELE GENERALE ALE DINAMICII SISTEMELOR DE PUNCTE ȘI RIGIDULUI

12.1. Generalități.....	265
12.2. Impulsul total. Teorema impulsului.....	268
12.2.1. Impulsul total al unui sistem de puncte.....	268
12.2.2. Expresia impulsului total pentru un rigid în mișcare.....	269
12.2.3. Teorema impulsului.....	270
12.3. Moment cinetic total. Teorema momentului cinetic.....	271
12.3.1. Momentul cinetic total al unui sistem de puncte.....	271
12.3.2. Momentul cinetic în cazul în cazul unor mișcări particulare.....	272
12.3.3. Teorema momentului cinetic.....	275
12.4. Energia cinetică totală. Lucrul mecanic. Teorema energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale.....	278
12.4.1. Energia cinetică totală a unui sistem de puncte.....	278
12.4.2. Energia cinetică totală în cazul unor mișcări particulare ale rigidului.....	279
12.4.3. Lucrul mecanic elementar al forțelor aplicate unui sistem de puncte în mișcare. Proprietăți.....	282
12.4.4. Expresia lucrului mecanic elementar al forțelor interioare în funcție de creșterea distanțelor dintre punctele sistemului.....	284
12.4.5. Lucrul mecanic elementar al forțelor aplicate unui rigid.....	285
12.4.6. Teorema energiei cinetice pentru sisteme.....	286
12.4.7. Teorema conservării energiei mecanice.....	288

Capitolul 13. DINAMICA UNOR MIȘCĂRI PARTICULARE ALE RIGIDULUI

13.1. Generalități.....	289
13.2. Dinamica mișcării de translație a rigidului.....	290
13.3. Dinamica mișcării de rotație a rigidului.....	291
13.4. Pendul fizic (compus).....	294
13.5. Dinamica mișcării plan-paralele a rigidului.....	296
13.6. Dinamica rigidului cu punct fix.....	300
13.6.1. Generalități.....	300
13.6.2. Ecuațiile de mișcare (ecuațiile lui Euler).....	301
13.6.3. Relațiile dintre vectorul viteză unghiulară și unghiurile lui Euler.....	302
13.6.4. Cazurile de integrabilitate ale ecuației lui Euler.....	303
13.6.5. Calculul reacțiunilor.....	306
13.6.6. Giroscopul.....	306
13.7. Dinamica sistemelor de corpuri.....	309

Capitolul 14. MIȘCĂRI IMPULSIVE (PERCUTANTE)

14.1. Noțiuni introductive și ipoteze.....	313
14.2. Teoremele generale în timpul ciocnirii.....	315
14.2.1. Teorema impulsului.....	315
14.2.2. Teorema momentului cinetic.....	315
14.2.3. Considerații energetice.....	316
14.3. Ciocnirea centrică a două sfere. Studiul mișcării. Coeficient de restituire	317
14.4. Determinarea coeficientului de restituire.....	320
14.5. Ciocnirea a două corpuri solide.....	321
14.6. Ciocnirea unui corp solid aflat într-o mișcare de rotație. Centrul de percuție.....	324

Capitolul 15. ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

15.1. Obiectul mecanicii analitice. Coordonate generalizate. Deplasări.....	327
15.2. Principiul lui d'Alembert.....	330
15.3. Principiul lucrului mecanic virtual.....	333
15.4. Principiul lucrului mecanic virtual în cazul unui sistem cu mai multe grade de libertate	337
15.5. Calculul reacțiunilor în ajutorul teoremei lucrului mecanic virtual	339
15.6. Ecuatiile lui Lagrange de speța a doua.....	341
15.7. Ecuatiile lui Lagrange în cazul particular al forțelor derivând dintr-o funcție de forță	345
15.8. Ecuatiile canonice ale lui Hamilton.....	348
15.9. Elemente de stabilitate a mișcării.....	352
15.9.1. Echilibrul stabil. Teorema Lejeune-Dirichlet.....	352
15.9.2. Stabilitatea mișcării. criteriul Routh-Hurwitz	357
BIBLIOGRAFIE.....	364