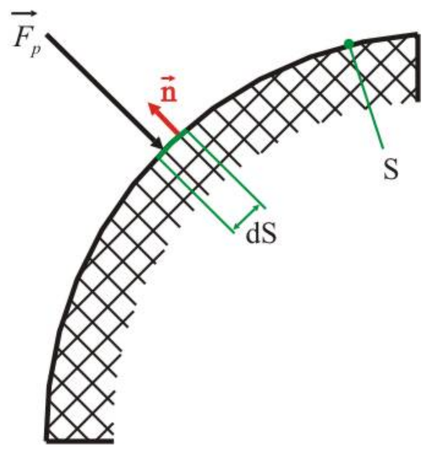
Acțiunea fluidelor în repaus asupra suprafețelor solide

Prin analogie cu mecanica clasică se poate considera că acțiunea fluidului poate fi caracterizată de o forță rezultantă şi un moment rezultant ce formează împreună un torsor.

Se consideră inițial forța cu care acționează fluidul asupra unui element de suprafață infinitezimal:

$$d\overline{F_p} = -p \cdot \bar{n} dS$$

deci pe acea suprafață infinitezimală pe care presiunea p se poate considera constantă. Forța totală pe întreaga suprafață este atunci:



$$\overline{F_p} = -\int_S p \cdot \bar{n} dS$$

iar momentul corespunzător tuturor forțelor de presiune este:

$$\overline{M} = \int_S \bar{r} \times \left(-p \cdot \bar{n} dS\right) \Rightarrow \overline{M} = \int_S \bar{n} \times \bar{r} p dS$$

1.Acțtiunea fluidelor în repaus asupra suprafețelor plane

Pe o suprafață plană, normala n are aceeaşi orientare constantă:

$$\overline{F_p} = -\bar{n} \int_S p dS$$

iar momentul tuturor forțelor devine:

$$\overline{M} = \bar{n} \times \int_S \bar{r} p dS$$

Pentru determinarea vectorului de poziție corespunzător punctului de aplicație al rezultantei $\left(\overline{r_C}\right)$, $\left(C - \textit{centrul de presiune}\right)$ se aplică:

Teorema lui Varignon:

Momentul rezultantei este egal cu suma momentelor tuturor forțelor ce acționează asupra fluidului considerat.

$$\overline{M}=\overline{r_C}\times\overline{F_p} \quad \Rightarrow \quad \overline{M}=\overline{r_C}\times\left(-\overline{n}\int_S pdS\right)=\overline{n}\times\overline{r_C}\int_S pdS$$

Se egalează cele două expresii ale momentului şi $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \overline{r_C}=\frac{\int_S \overline{r}pdS}{\int_S pdS}$$

1.1.Acțiunea fluidelor uşoare în repaus asupra suprafețelor plane

În cazul fluidelor uşoare se poate considera că presiunea în întreg mediu fluid este constantă şi ca urmare şi presiunea poate ieşi în fața integralei:

$$p=ct \qquad \overline{F_p}=-\overline{n}\int_S pdS \quad \Rightarrow \quad \overline{F_p}=-\overline{n}p\cdot S \quad \Rightarrow \quad F_p=pS$$

Forța cu care acționează un fluid uşor asupra unei suprafețe solide plane este deci egală cu produsul dintre presiunea fluidului uşor şi aria suprafeței solide pe care acționează acesta.

Pentru determinarea vectorului de poziție al centrului de presiune, punctul de aplicație al forței rezultante:

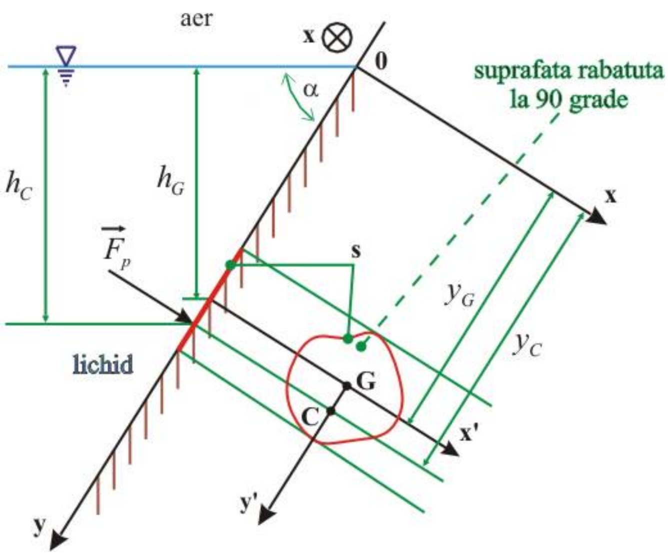
-din $\overline{r_C}=\frac{\int_S \overline{r}pdS}{\int_S pdS}$ şi cu $p=ct$ $\Rightarrow$ $\overline{r_C}=\frac{p\int_S \overline{r}dS}{p\int_S dS}$ $\Rightarrow$ $\overline{r_C}=\frac{\int_S \overline{r}dS}{\int_S dS}=\frac{\overline{r_G}\cdot S}{S}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{r_C}=\overline{r_G} \Rightarrow C\equiv G$$

Centrul de presiune coincide deci cu centrul de greutate al suprafeței pe care acționează fluidul uşor.

Deoarece s-au dedus atât modulul forței de presiune cât şi punctul de aplicație al acesteia, problema se consideră rezolvată.

1.2.Acțiunea fluidelor grele în repaus asupra suprafețelor plane



Deoarece p_{at} acționează totodată sub suprafața solidă, se ia în considerare numai efectul presiunii date de lichid (suprapresiunea).

$p_{abs} = p_{at} + \gamma h$, suprapresiunea este $p = \gamma h$

$$\overline{F_p} = -\bar{n}\int_S \gamma h dS = -\bar{n}\gamma\int_S y \sin\alpha \cdot dS \Rightarrow \overline{F_p} = -\bar{n}\gamma \sin\alpha \int_S y dS$$

$\int_S y dS$ -este momentul static al suprafeței S față de axa Ox.

$$\left.\begin{aligned} &\int_S y dS = Y_G \cdot S \\ &\overline{F_p} = -\bar{n}\gamma \sin\alpha \int_S y dS \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{F_p} = -\bar{n}\gamma \sin\alpha \cdot Y_G \cdot S \Rightarrow \overline{F_p} = -\bar{n}\gamma h_G \cdot S$$

Modulul forței de presiune este deci $F_p = \gamma h_G S$, unde:

h_G este distanța de la planul suprafeței libere a lichidului până la centrul de greutate al suprafeței udate de lichid (sau adâncimea centrului de greutate al suprafeței udate).

S este aria suprefeței udate de lichid.

$$\overline{r_C} = \frac{\int_S \bar{r}\gamma h dS}{\int_S \gamma h dS} = \frac{\gamma\int_S \bar{r} y \sin\alpha \cdot dS}{\gamma\int_S y \sin\alpha \cdot dS} = \frac{\int_S \bar{r} y \cdot dS}{\int_S y \cdot dS} \Rightarrow \overline{r_C} = \frac{\int_S \bar{r} y \cdot dS}{Y_G \cdot S}$$

Se determină separat coordonatele carteziene ale centrului de presiune C.

$$X_G = \frac{\int_S xy dS}{Y_G \cdot S} = \frac{Ixy}{Y_G \cdot S}$$

unde Ixy este momentul de inerție centrifugal al suprafeței S față de sistemul de axe.

$$Y_G = \frac{\int_S y^2 dS}{Y_G \cdot S}$$

unde Ix este momentul de inerție centrifugal al suprafeței S față de axa Ox.

Pentru a putea exprima momentul de inertie cu formule cunoscute, se trece de la sistemul de axe xOy la sistemul $x'Gy'$ aplicând teoremele lui Steiner.

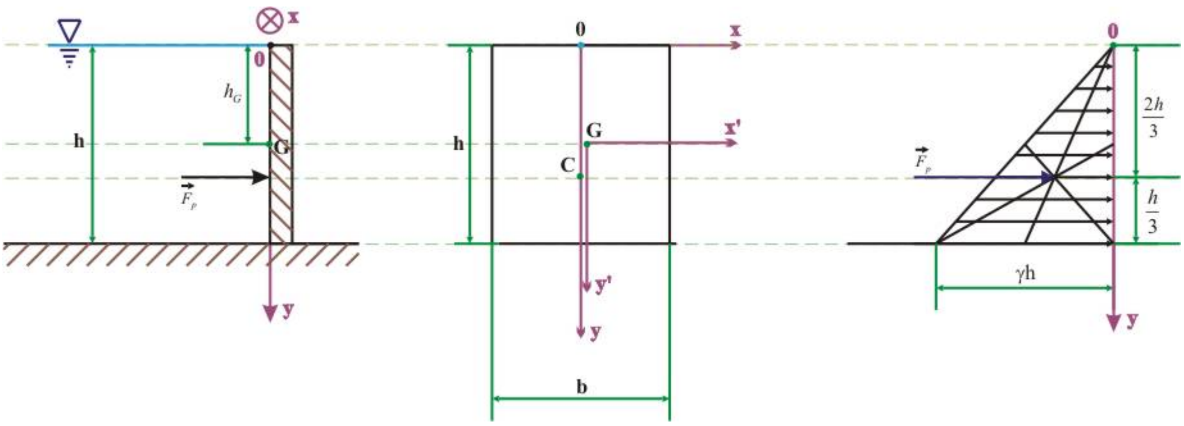
$$Ixy = X_G \cdot Y_G \cdot S + Ix'y'$$

$$Ix = Y_G^2 \cdot S + Ix'$$

$$\left.\begin{aligned} X_C &= X_G + \frac{Ix'y'}{Y_G \cdot S} \\ Y_C &= Y_G + \frac{Ix'}{Y_G \cdot S} \end{aligned}\right\}$$ sunt coordonatele centrului de presiune C, unde se aplică forța rezultantă $\overline{F_p}$.

__Aplicație:__

Acțiunea apei asupra suprafeței solide plane verticale și dreptunghiulare a unei stavile.



Forța de presiune se poate calcula cu ajutorul presiunii medii cu care lichidul acționează asupra stavilei:

$$F_p = p_m \cdot S = \frac{\gamma h + 0}{2} bh \quad , \qquad F_p = \frac{\gamma h^2 b}{2}$$

Coordonata verticală a centrului de presiune se determină cu ajutorul diagramei triunghiulare de suprapresiuni din desenul anterior ce are rezultanta situată la două treimi din adâncime față de suprafața liberă a lichidului şi evident la o treime de bază:

$$Y_C = \frac{2h}{3}$$

Metoda a II-a:

Se aplică formule deduse în curs şi rezultă:

$$F_p = \gamma h_G \cdot S \ , \ F_p = \frac{\gamma h^2 b}{2}$$

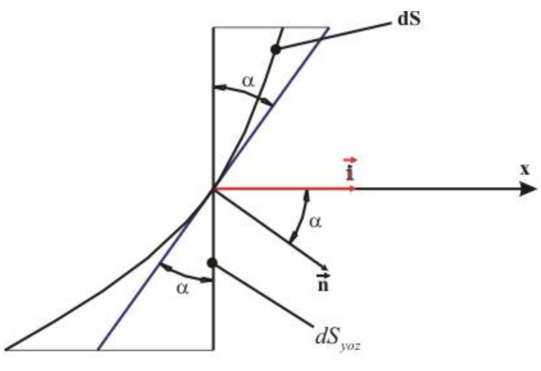
$$X_C = 0 \quad , \qquad Y_C = Y_G + \frac{Ix'}{Y_G \cdot S} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2} bh} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2h}{3}$$

2.Acțiunea fluidelor în repaus asupra suprafețelor curbe deschise

2.1.Acțiunea fluidelor uşoare în repaus asupra suprafețelor curbe deschise

Deoarece curbura unei suprafețe poate sa fie oarecare în spațiu, este de preferat să se determine separat componentele dupa cele 3 axe ale forței de presiune şi să se determine ulterior rezultanta .

Componentele forței elementare sunt:



$$dF_{px} = dF_p \cdot \bar{i} = -p \cdot \bar{n} \cdot \bar{i} dS$$

$$\bar{n} \cdot \bar{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha$$

$$dF_{px} = -pdS\cos\alpha$$

$dF_{px} = -pS_{yOz}$ Rezultă forțele:

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{px} = -\int\limits_{S_{yOz}} pdS_{yOz} \\ F_{py} = -\int\limits_{S_{xOz}} pdS_{xOz} \\ F_{pz} = -\int\limits_{S_{xOy}} pdS_{xOy} \end{cases}$$

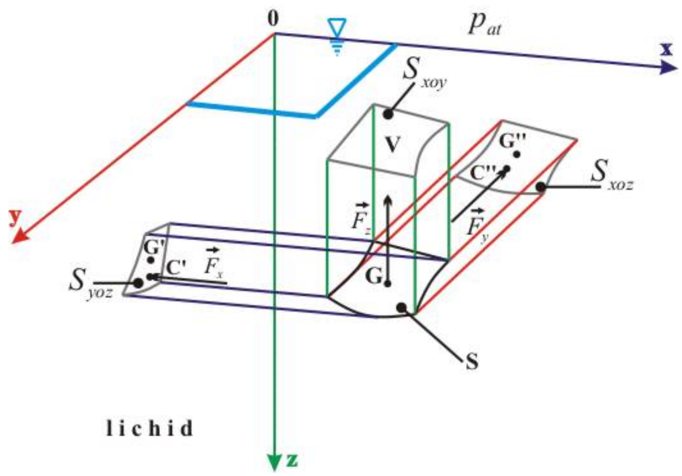
Vectorii de poziție se calculează în mod similar cu cazul suprafeței plane, cu precizarea că integralele se efectuează pe proiecțiile suprafeței curbe deschise în cele 3 plane de coordonate x, y şi z.

$$p = ct \qquad F_{px} = -\int_{S_{yOz}} p\,dS_{yOz} \qquad \begin{cases} \left|F_{px}\right| = pS_{yOz} \\ \left|F_{py}\right| = pS_{xOz} \\ \left|F_{pz}\right| = pS_{xOy} \end{cases}$$

S_{yOz} este de exemplu aria proiecției suprafeței curbe udate în planul yOz.

2.2. Acțiunea fluidelor grele în repaus asupra suprafețelor curbe deschise

În mod similar cu procedeul aplicat în cazul acțiunii lichidelor asupra suprafețelor plane se deduc expresiile componentelor de forță după cele trei direcții ale sistemului triortogonal:



$$\begin{cases} F_x = \gamma \cdot Z_G^{\prime} \cdot S_{yOz} \\ F_y = \gamma \cdot Z_G^{\prime\prime} \cdot S_{xOz} \\ F_z = \gamma V \quad , \quad r_C^{\prime\prime\prime} = r_G \end{cases}$$

unde $Z_G^{\prime}$ este adâncimea centrului de greutate a suprafeței curbe udate în planul yOz iar V estevolumul cuprins între suprafața curbă udată şi proiecția ei în planul suprafeței libere a lichidului (planul xoy).

Componentele orizontale de forță acționează în proiecțiile centrului de greutate al suprafeței udate în planele verticale.

Componenta verticală de forță orientată după axa Oz acționează în centrul de greutate al volumului de lichid V.

3.Acțiunea fluidelor în repaus asupra suprafețelor curbe închise

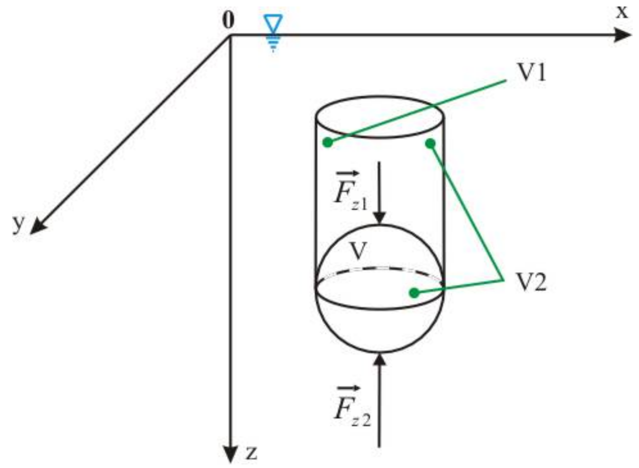
3.1.Acțiunea fluidelor uşoare în repaus asupra suprafețelor curbe închise

Rezultanta forțelor de presiune dată de fluidul uşor este nulă. (exemplu: o minge aflată pe o suprafata plană în interiorul unui gaz se menține în repaus).

Aceasta este totuşi o aproximație inginerească deoarece pe verticală asupra mingii acționează o forță verticală extrem de mică, datorită faptului că mingea dislocuieşte un anumit volum de gaz.

3.2.Acțiunea fluidelor grele în repaus asupra suprafețelor curbe închise

Principiul lui Arhimede



Forțele ce acționează asupra corpului sferic cufundat în lichid sunt:

$$F_{z1} = \gamma V_1$$

$$F_{z2} = \gamma V_2 = \gamma (V + V_1)$$

iar rezultanta lor este:

$$F_z = F_{z1} - F_{z2} = -\gamma V$$

$F_z = -\gamma V$ din care rezultă principiul lui Arhimede:

"Un corp cufundat într-un lichid este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de lichid dislocuit."

Se poate face demonstrația matematic şi în următorul mod, plecând de la formula generală a forței de presiune:

$$\overline{F_p} = -\int_S \bar{n} p dS \qquad p = p_{at} + \gamma z \qquad \overline{F_p} = -\int_V grad p \cdot dV$$

$$grad\overline{p}=\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}\overline{k}=\gamma\overline{k}$$

$$\overline{F_p}=-\int_S \gamma\overline{k}\cdot dV \quad \Rightarrow \quad \overline{F_p}=-\gamma\overline{k}\int_S dV \quad \Rightarrow \quad \overline{F_p}=-\gamma\overline{k}\cdot V$$

şi deci modulul forței de presiune ce acționează asupra corpului cufundat în lichid este:

$$F_p=-\gamma V$$

Semnul minus semnifică faptul că forța acționează în sens invers axei verticale, deci are tendința de a scoate corpul din lichid.