Inegalitatea lui Jensen pentru funcţii J-convexe în raport cu medii cvasiaritmetice

Florin POPOVICI[1]

Abstract. In this Note an elementary proof is given for Jensen′s inequality related to a (M, N)-J-convex function (Definition 3), in the case when M and N are quasi-arithmetic means (Definition 2).

Keywords: J-convex function, quasi-arithmetic mean, (M, N)-J-convex function.

MSC 2000: 52A40.

Înlocuind în definiţia funcţiilor J-convexe, cele două medii aritmetice cu două medii oarecare M şi N **G. Aumann** ([**1**], pag. 4), în anul 1933, extinde noţiunea de *funcţie J-convexă* prin noţiunea de *funcţie J-convexă în raport cu perechea ordonată de medii* (M, N). Inegalitatea lui Jensen, adaptată pentru funcţiile J-convexe în raport cu perechi ordonate de medii (M, N) are loc pentru o clasă largă de medii, care include mediile cvasiaritmetice. Demonstraţia de mai jos adaptează raţionamentul prezentat de noi în [**3**]; credem că este nouă. În particular, din inegalitatea lui Jensen astfel generalizată, se obţin diferite inegalităţi clasice.

Definiţia 1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Un şir de funcţii $M = (M_n)_{n\geq 2}$ se numeşte medie pe I dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, funcţia $M_n : I^n \to I$ satisface condiţia

$$\min\{x_i | i = \overline{1, n}\} \leq M_n(x_1, \ldots, x_n) \leq \max\{x_i | i = \overline{1, n}\}, \forall x_i \in (0, \infty), i = \overline{1, n}; \tag{1}$$

numărul $M_n(x_1, \ldots, x_n)$ se numeşte media numerelor $x_1, \ldots, x_n$.

Definiţia 2. Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ două intervale. Fie $\varphi : I \to J$ o funcţie bijectivă strict monotonă. Considerăm şirul de funcţii $M = (M_n)_{n\geq 2}$, $M_n : I^n \to I$, $\forall n \geq 2$, definit prin

$$M_n(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n)}{n}\right), \forall x_1, \ldots, x_n \in I. \tag{2}$$

Evident, M este o medie pe I. Media M se numeşte *medie cvasiaritmetică*.

Observaţii. 1) În cazul particular în care $I = J$ şi $\varphi = 1_I$, (2) este media aritmetică $A = (A_n)_{n\geq 2}$, unde $A_n(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \forall x_1, \ldots, x_n \in I$.

În cazul particular în care $I = J = (0, \infty)$ şi $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in (0, \infty)$, (2) este media armonică $H = (H_n)_{n\geq 2}$, unde $H_n(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}, \forall x_1, \ldots, x_n \in (0, \infty)$.

În cazul particular în care $I = (0, \infty)$, $J = \mathbb{R}$ şi $\varphi(x) = \ln x$, $\forall x \in (0, \infty)$, (2) este media geometrică $G = (G_n)_{n\geq 2}$, unde $G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}, \forall x_1, \ldots, x_n \in (0, \infty)$.

2) Dacă $M = (M_n)_{n\geq 2}$ este o medie cvasiaritmetică pe I, atunci media M este strict crescătoare, adică pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, funcţia M_n este strict crescătoare în raport cu fiecare din variabilele $x_1, \ldots, x_n$.

[1]Profesor dr., Colegiul Naţional de Informatică ”Gr. Moisil”, Braşov

Definiţia 3. Fie $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ două intervale date. Fie M o medie pe I_1 şi fie N o medie pe I_2. O funcţie $f : I_1 \to I_2$ se numeşte convexă în raport cu perechea ordonată de medii (M, N) (pe scurt, f este $(M, N) - J$-*convexă*), dacă

$$f(M_2(x, y)) \leq N_2(f(x), f(y)), \ \ \forall x, y \in I_1. \tag{3}$$

Observaţii. 1) În cazul particular în care M este media aritmetică pe I_1 şi N este media aritmetică pe I_2, (3) devine

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \ \ \forall x, y \in I_1;$$

deci funcţiile $(A, A) - J$-convexe sunt funcţiile J-convexe.

2) Dacă M şi N sunt medii cvasiaritmetice, atunci condiţia (3) devine

$$f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right)\right) \leq \psi^{-1}\left(\frac{\psi(f(x))+\psi(f(y))}{2}\right), \ \ \forall x, y \in I_1. \tag{4}$$

Teorema 1. *Fie $I_1, I_2, J_1, J_2 \subset R$ patru intervale date. Fie $\varphi : I_1 \to J_1$ şi $\psi : I_2 \to J_2$ două bijecţii strict crescătoare. Fie $M = (M_n)_{n\geq 2}$ media cvasiaritmetică determinată de funcţia φ, şi fie $N = (N_n)_{n\geq 2}$ media cvasiaritmetică determinată de funcţia ψ. Dacă $f : I_1 \to I_2$ este o funcţie $(M, N) - J$-convexă, atunci, pentru orice $n \in N$, $n \geq 2$, şi orice $x_1, \ldots, x_n$ are loc inegalitatea lui Jensen generalizată*

$$f(M_n(x_1, \ldots, x_n)) \leq N_n(f(x_1), \ldots, f(x_n)). \tag{5}$$

Demonstraţie. Stabilim (5) prin inducţie. Pentru $n = 2$, (5) are loc conform ipotezei. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, o valoare pentru care are loc (5). Fie $a, b \in I_1$. Notăm $c = M_{n+1}(\underbrace{a, \ldots, a}_{n}, b)$ şi $d = M_{n+1}(a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n})$. Avem

$$c = \varphi^{-1}\left(\frac{n\varphi(a)+\varphi(b)}{n+1}\right) = \varphi^{-1}\left(\frac{(n^2-1)\varphi(a)+\varphi(a)+n\varphi(b)}{n(n+1)}\right) =$$
$$= \varphi^{-1}\left(\frac{(n-1)\varphi(a)+\varphi(\varphi^{-1}(\frac{\varphi(a)+n\varphi(b)}{n+1}))}{n}\right) = M_n(\underbrace{a, \ldots, a}_{n-1}, d),$$

deci $c = M_n(\underbrace{a, \ldots, a}_{n-1}, d)$. În mod analog, obţinem $d = M_n(c, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-1})$. Rezultă că avem $c = M_n(\underbrace{a, \ldots, a}_{n-1}, M_n(c, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-1}))$.

Ţinând cont de monotonia mediei N şi de ipoteza inductivă, obţinem

$$f(c) = f(M_n(\underbrace{a, \ldots, a}_{n-1}, M_n(c, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-1})) \leq N_n(\underbrace{f(a), \ldots, f(a)}_{n-1}, N_n(f(c), \underbrace{f(b), \ldots, f(b)}_{n-1}))) =$$
$$\psi^{-1}\left(\frac{(n-1)\psi(f(a)) + \frac{\psi(f(c))+(n-1)\psi(f(b))}{n}}{n}\right).$$

De aici, obţinem succesiv

$$n\psi(f(c)) \leq (n-1)\psi(f(a)) + \frac{\psi(f(c)) + (n-1)\psi(f(b))}{n} \iff$$

$$\iff (n+1)\psi(f(c)) \leq n\psi(f(a)) + \psi(f(b)) \iff$$

$$f(c) \leq \psi^{-1}\left(\frac{n\psi(f(a)) + \psi(f(b))}{n+1}\right) \iff$$

$$f(M_{n+1}(\underbrace{a,\ldots,a}_{n},b)) \leq N_{n+1}(\underbrace{f(a),\ldots,f(a)}_{n},f(b)). \tag{6}$$

Pentru orice $x_1,\ldots,x_{n+1} \in I_1$ avem

$$M_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \varphi^{-1}\left(\frac{n\frac{\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_n)}{n} + \varphi(x_{n+1})}{n+1}\right) =$$

$$= \varphi^{-1}\left(\frac{n\varphi(M_n(x_1,\ldots,x_n)) + \varphi(x_{n+1})}{n+1}\right),$$

deci

$$M_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = M_{n+1}(\underbrace{M_n(x_1,\ldots,x_n),\ldots,M_n(x_1,\ldots,x_n)}_{n},x_{n+1}). \tag{7}$$

În mod analog, pentru orice $y_1,\ldots,y_{n+1} \in I_2$ avem

$$N_{n+1}(y_1,\ldots,y_{n+1}) = N_{n+1}(\underbrace{N_n(y_1,\ldots,y_n),\ldots,N_n(y_1,\ldots,y_n)}_{n},y_{n+1}). \tag{8}$$

Ţinând cont de (6), (7) şi (8), de ipoteza inductivă şi de monotonia mediei N, rezultă că pentru orice $x_1,\ldots,x_{n+1} \in I_1$ avem

$$f(M_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})) \overset{(7)}{=} f(M_{n+1}(\underbrace{M_n(x_1,\ldots,x_n),\ldots,M_n(x_1,\ldots,x_n)}_{n}),x_{n+1}) \overset{(6)}{\leq}$$

$$N_{n+1}(f(M_n(x_1,\ldots,x_n)),\ldots,f(M_n(x_1,\ldots,x_n)),f(x_{n+1})) \leq$$

$$\leq N_{n+1}(N_n(f(x_1),\ldots,f(x_n)),\ldots,N_n(f(x_1),\ldots,f(x_n)),f(x_{n+1})) \overset{(8)}{=}$$

$$= N_{n+1}(f(x_1),\ldots,f(x_{n+1})),$$

deci $f(M_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})) \leq N_{n+1}(f(x_1),\ldots,f(x_{n+1}))$. Conform principiului inducţiei matematice rezultă că (5) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Observaţii. 1) Evident, inegalitatea (5) generalizează inegalitatea lui Jensen pentru funcţii J-convexe.

2) Deoarece $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$, $\forall x,y \in (0,\infty)$, rezultă că funcţia $f = 1_{(0,\infty)}$ este $(G,A)-J$-convexă; conform Teoremei 1, obţinem inegalitatea mediilor

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},\ \forall x_1,\ldots,x_n \in (0,\infty), \forall n \geq 2.$$

3) Considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, definită prin $f(x)=1+x$, $\forall x\in(0,\infty)$. Avem

$$f(\sqrt{xy})=1+\sqrt{xy}\leq\sqrt{(1+x)(1+y)}=\sqrt{f(x)f(y)},\ \forall x,y\in(0,\infty),$$

deci funcţia f este $(G,G)-J$-convexă; rezultă că are loc inegalitatea lui Huygens

$$1+\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\leq\sqrt[n]{(1+x_1)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)},\forall x_1,\ldots,x_n\in(0,\infty),\forall n\geq 2.$$

4) În [**2**], inegalitatea lui Jensen generalizată este stabilită pentru funcţii $(M,N)-J$-convexe, corespunzător unor clase largi de medii, care includ mediile cvasiaritmetice.

5) În [**3**], prin aplicarea directă a metodei din demonstraţia Teoremei 1, am prezentat demonstraţii simple pentru inegalitatea mediilor şi pentru inegalitatea lui Huygens.

6) Inegalitatea (5) poate fi stabilită şi pe baza raţionamentului lui Cauchy pentru dovedirea inegalităţii între mediile aritmetică şi geometrică. Propunem acest exerciţiu cititorului.

Bibliografie

1. **C.P. Niculescu, L.E. Persson** - *Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach*, CMS Books in Mathematics, vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.
2. **C.P. Niculescu, F. Popovici** - *Inegalitatea lui Jensen pentru funcţii* $(M,N)-J$*-convexe în condiţii generale*, va apare.
3. **F. Popovici** - *Asupra inegalităţii Jensen*, Recreaţii Matematice, 1/2009, 12-14.

Recreaţii ... matematice

Răspuns la întrebarea de la pag. 20.

Notând cu x durata vieţii lui Diofant, din problemă rezultă următoarele: $\frac{x}{6}$ – perioada copilăriei; $\frac{x}{12}$ – adolescenţa; $\frac{x}{7}$ – perioada de dinainte de căsătorie; 5 ani mai târziu i s-a născut fiul; $\frac{x}{2}$ – durata vieţii fiului; 4 ani au mai trecut până la moartea sa. Ca urmare, pentru aflarea necunoscutei x trebuie să rezolvăm ecuaţia

$$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4.$$

Cum ecuaţia se scrie $\frac{3}{28}x=9$, rezultă că Diofant a trăit 84 de ani.