MATEMATICI SPECIALE

explicaţii teoretice,

interpretări fizice, aplicaţii

tehnice, exemple, exerciţii

VOLUMUL II

VALERIU ZEVEDEI

April 10, 2005

CUPRINS

PARTEA III

ELEMENTE DE CALCUL VARIAŢIONAL

CAPITOLUL 11

ELEMENTE DE CALCUL VARIAŢIONAL

11.1 Probleme clasice de calcul variaţional

Din punct de vedere istoric, prima problemă de calcul variaţional este aşa numita problemă a lui Dido. Legenda mitologică spune că Dido, sau Didona, prinţesă a unuia din cetăţile vechii Grecii şi soră a lui Pygmalion, era măritată cu pontiful Siharbas. Pygmalion îl asasinează pe pontif şi Dido fuge cu fratele său şi cu averea soţului într-o flotilă improvizată. Debarcând pe ţărmul african, localnicii îi oferă ca loc de adăpost atâta pământ cât poate cuprinde cu o piele de taur. Dido taie pielea în fâşii înguste pe care le leagă cap la cap şi înconjoară cu ele o bucată de teren pe care va construi cetatea Cartaginei, a cărei regină devine Dido.

Incă din antichitate, latura matematică a legendei a interesat pe matematicieni: cum trebuie dispus firul alcătuit din fâşiile înguste pentru ca el să înconjoare o porţiune de arie maximă?

Problema are mai multe variante. Una dintre acestea ar fi următoarea: să presupunem că axa $x'Ox$ reprezintă ţărmul mării şi că punctele $A(a,0)$, $B(b,0)$ reprezintă capetele firului, graficul funcţiei $y = y(x)$, definită şi derivabilă pe $[a,b]$, este firul. Aria limitată de fir şi de ţărm este

$$S = \int_a^b y(x)dx,$$

în timp ce lungimea firului este

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}dx.$$

Atunci problema lui Dido revine la determinarea funcţiei $y=y(x)$, definite şi derivabile pe $[a,b]$, care satisface condiţiile

$$y\,(a)=0,\ y\,(b)=0,\ L=\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}dx$$

astfel încât integrala

$$S=\int_a^b y(x)dx$$

să aibă valoarea maximă. Din motive evidente, o asemenea problemă se numeşte *problemă izoperimetrică*. Incă din antichitate se cunoştea că forma căutată a firului este cea a unui arc de cerc, aşa cum vom arăta şi noi mai încolo.

Putem raţiona şi altfel. Fie $\widehat{AB}$ arcul graficului. In relaţia

$$S=\int_{\widehat{AB}} y(x)dx$$

considerăm pe x,y ca funcţii de abscisa curbilinie s şi integrăm prin părţi

$$S=yx|_A^B-\int_{\widehat{AB}} xdy=-\int_0^L x(s)\sqrt{1-x'(s)^2}ds.$$

Problema revine la a determina funcţia $x=x(s)$ definită pe intervalul $[0,L]$ cu proprietatea că $x(0)=a$, $x(L)=b$ şi că integrala

$$S=\int_0^L x(s)\sqrt{1-x'(s)^2}ds$$

are valoare minimă.

O altă variantă a problemei lui Dido ar fi aceea în care presupunem că firul ar reprezenta o curbă netedă închisă cu ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad t\in[t_1,t_2],$$

funcţiile $x(t), y(t)$ fiind deci derivabile pe porţiuni pe $[t_1, t_2]$. Atunci lungimea firului este

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

iar aria limitată de fir este

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[y(t)x'(t) - x(t)y'(t) \right] dt.$$

Problema revine deci la determinarea celor două funcţii $x(t), y(t)$ definite şi derivabile pe porţiuni pe intervalul $[t_1, t_2]$ astfel încât să aibă loc relaţia

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

şi ca integrala

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[y(t)x'(t) - x(t)y'(t) \right] dt$$

să fie maximă. Şi aceasta este tot o problemă izoperimetrică şi curba care dă soluţia este un cerc.

O altă problemă importantă care a dus la apariţia calculului variaţional este *problema brahistocronei.* Ea a fost propusă în 1696 de către Jean Bernoulli şi a fost rezolvată în diferite moduri de Jacob Bernoulli, Leibniz, l'Hospital, Euler. Ea constă în determinarea unei curbe care uneşte punctele $A(0, h)$ şi $B(b, 0)$ pe care se mişcă un punct material de masă m plecând din A cu viteză iniţială nulă şi ajunge în B sub influenţa greutăţii după un timp T minim. Dacă presupunem că $y = y(x)$ este ecuaţia curbei căutate şi $v(x)$ este mărimea vitezei punctului în poziţia $(x, y(x))$, atunci conform legii conservării energiei avem

$$gm(h - y) = \frac{mv(x)^2}{2},$$

de unde

$$v(x) = \sqrt{2g(h - y)}.$$

Pe de altă parte

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

şi deci timpul în care mobilul se deplasează din punctul $(x, y(x))$ în punctul $(x+dx, y(x+dx))$ este

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(h-y)}}dx.$$

Rezultă că timpul în care mobilul ajunge din A în B este

$$T = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(h-y)}}dx.$$

Deci problema brahistocronei revine la determinarea funcţiei $y = y(x)$, definite şi derivabile pe $[0, b]$ astfel încât $y(0) = h$, $y(b) = 0$ şi astfel încât integrala

$$T = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y\prime(x)^2}{2g(h-y(x))}}dx$$

să fie minimă. Este evident că şi în acest caz curba poate fi căutată ca în problema precedentă sub formă parametrică.

O problemă asemănătoare este problema opticii geometrice. Intr-un mediu izotrop neomogen lumina se propagă în fiecare punct $M(x, y, z)$ cu o viteză $v(x, y, z)$ independentă de direcţie. Timpul necesar ca lumina să ajungă din punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ în punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$ de-a lungul curbei de ecuaţii $y = y(x), z = z(x)$ este

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}}{v(x, y(x), z(x))}dx.$$

Principiul lui Fermat afirmă că lumina se propagă de-a lungul acelei curbe pentru care T este minim. Problema opticii geometrice este deci determinarea funcţiilor $y = y(x), z = z(x)$ definite pe $[x_1, x_2]$ astfel încât $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, $z(x_1) = z_1$, $z(x_2) = z_2$ şi pentru care integrala de mai sus are valoare minimă.

O altă problemă clasică a calculului variaţional este aşa numita *problemă a lui Plateau* (Plateau, Antoine Ferdinand Joseph, 1801-1883, belgian, profesor de fizică şi anatomie la Universitatea din Gand). Ea constă în determinarea formei de echilbru a unei pelicule de săpun susţinute de două inele (pentru simplitate de aceeaşi rază R) perpendiculare pe axa comună Ox în punctele de abscise $-b, b$. Neglijând greutatea peliculei, din proprietăţile tensiunii superficiale rezultă că pelicula se dispune astfel încât ea să aibă o suprafaţă minimă. Din motive de simetrie evidente, pelicula are forma unei suprafeţe de rotaţie de arie minimă. De aceea problema lui Plateau se mai numeşte şi *problema suprafeţei de rotaţie de arie minimă*. Dacă notăm cu $y = y(x),\ -b \leq x \leq b$ ecuaţia curbei de secţiune cu planul xoy, atunci aria suprafeţei de rotaţie este

$$S = 2\pi \int\limits_{-b}^{b} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}dx.$$

Deci, problema lui Plateau revine la determinarea funcţiei $y = y(x)$ definite şi derivabile pe $[-b, -b]$ astfel încât $y(-b) = R$, $y(b) = R$ şi astfel încât integrala

$$S = 2\pi \int\limits_{-b}^{b} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

să fie minimă.

Tot problemă clasică de calcul variaţional este *problema formei de echilibru a unui fir greu omogen flexibil şi inextensibil de lungime dată* l fixat la capete. Se vede uşor că la echilibru firul se află într-un plan vertical. Considerând acest plan vertical drept planul xOy, unde axa Oy este dirijată după verticala locului, curba de echilibru corespunde la acea curbă pentru care energia potenţială a firului este minimă, adică la acea curbă pentru care ordonata y_G a centrului de greutate al firului este minimă. Dacă punctele $A(a, y_a),\ B(b, y_b)$ sunt capetele firului, dacă $y = y(x),\ x \in [a, b]$ este ecuaţia explicită a curbei de echilibru, cu $y(x)$ funcţie derivabilă pe $[a, b]$, dacă ρ este densitatea lineară a firului, atunci ordonata centrului de greutate al firului este

$$y_G = \frac{\int\limits_a^b \rho y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}dx}{\int\limits_a^b \rho\sqrt{1 + y'(x)^2}dx} = \frac{1}{l}\int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

lungimea firului fiind

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}dx.$$

Deci, problema revine la determinarea funcţiei $y(x)$ definite şi derivabile pe $[a, b]$, astfel încât

$$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b, \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}dx = l$$

şi astfel încât integrala

$$\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}dx$$

să fie minimă. Şi aici curba de echilibru poate fi căutată sub formă parametrică luând ca parametru o abscisă curbilinie. Aşa cum vom vedea, curba de echilibru a firului este o porţiune din aşa-numitul *lănţişor*, un arc de curbă apropiat de un arc de parabolă.

Altă problemă clasică de calcul variaţional este *problema geodezicelor pe o suprafaţă* S, adică problema determinării pe o suprafaţă S a unei curbe care uneşte două puncte de pe acea suprafaţă şi are lungimea minimă. Dacă suprafaţa S este dată parametric prin ecuaţia vectorial parametrică

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in D_{u,v},$$

dacă

$$ds^2 = d\vec{r}^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2,$$

este prima sa formă fundamentală cu coeficienţii

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_u(u,v), \\ F(u,v) &= \vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v), \\ G(u,v) &= \vec{r}_v(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v) \end{aligned}$$

şi dacă

$$u = u(t), v = v(t),\ t \in [t_1,t_2],\ u(t_1) = u_1, v(t_1) = v_1, u(t_2) = u_2, v(t_2) = v_2$$

sunt ecuaţiile parametrice ale unei curbe care uneşte punctele $M_1(u_1,v_1),\ M_2(u_2,v_2)$, atunci lungimea acestei curbe este

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(u(t),v(t))u\prime(t)^2 + 2F(u(t),v(t))u\prime(t)v\prime(t) + G(u(t),v(t))v\prime(t)^2}dt.$$

Deci, problema determinării geodezicelor pe S revine la determinarea funcţiilor derivabile

$$u = u(t), v = v(t),\ t \in [t_1,t_2],\ u(t_1) = u_1, v(t_1) = v_1, u(t_2) = u_2, v(t_2) = v_2$$

astfel încât integrala

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(u(t),v(t))u'(t)^2 + 2F(u(t),v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t),v(t))v'(t)^2}dt$$

să fie minimă. In cazul în care suprafaţa S este planul xOy cu ecuaţia parametrică $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $(x,y) \in R^2$ cu prima formă fundamentală $ds^2 = dx^2 + dy^2$, problema geodezicei care uneşte punctele $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ revine la determinarea funcţiilor derivabile $x = x(t), y = y(t),\ t \in [t_1,t_2]$ cu $x(t_1) = x_1, y(t_1) = y_1, x(t_2) = x_2, y(t_2) = y_2$ astfel încât integrala

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

să fie minimă. Dacă alegem ca parametru coordonata x, problema revine la determinarea funcţiei derivabile $y = y(x),\ x \in [x_1,x_2]$ cu $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ astfel încât integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

să fie minimă.

11.2 Funcţionale

Toate problemele enunţate mai sus erau probleme de extremum - determinarea maximului sau minimului - pentru o anumită integrală, care depinde de o anumită curbă, deci de una sau mai multe funcţii definite pe un anumit interval. Spre deosebire de problemele de extremum pentru funcţiile de o variabilă sau mai multe variable, rezolvate cu mijloacele calculului diferenţial, unde aveam de-a face cu probleme cu unul sau mai multe grade de libertate (dar în număr finit), aici avem de-a face cu probleme cu un număr infinit de grade de libertate. In cazul extremelor funcţiilor de n variabile, cele n variabile $x_1, x_2, ..., x_n$ erau coordonatele unui element, unui punct $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ din $\mathbf{R}^n$. In $\mathbf{R}^n$ avem operaţiile de adunare a două asemenea elemente şi operaţia de înmulţire a unui element cu un număr real, $\mathbf{R}^n$ fiind astfel un spaţiu vectorial n-dimensional, de aceea spuneam că avem un *număr finit de grade de libertate*. In plus, în $\mathbf{R}^n$ puteam introduce o normă, deci o distanţă, astfel încât să putem vorbi de puncte vecine. In problemele calculului variaţional este vorba de găsirea extremului unei integrale care depinde de una sau mai multe funcţii şi de derivatele acestora. O asemenea integrală este o funcţie definită pe o mulţime de funcţii şi are valori reale. Ea se numeşte *funcţională exprimată printr-o integrală*. Deci calculul variaţional studiază extremele funcţionalelor exprimate prin integrale. In continuare, vom conveni ca funcţionalele să fie notate prin litere mari latine, marcând argumentele lor, deci funcţiile de care depind, între paranteze drepte. Vom conveni să marcăm în paranteze rotunde argumentul sau argumentele funcţiilor, deşi acestea sunt variabile “mute”, deci pot fi notate oricum.

Astfel, funcţionala din problema lui Dido este

$$I[y(x)] = \int_a^b y(x)dx$$

sau

$$I[x(s)] = \int_0^L x(s)\sqrt{1 - x'(s)^2}ds$$

sau

$$I[x(t), y(t)] = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt$$

după cum folosim reprezentarea explicită sau parametrică a curbei. In celelalte probleme enunţate funcţionalele sunt:

- în problema brahistocronei

$$I[y(x)] = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(h - y(x))}}dx;$$

- în problema suprafeţei de rotaţie minime

$$I[y(x)] = 2\pi \int_{-b}^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}dx;$$

- în problema echilibrului firului greu

$$I[y(x)] = \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}dx;$$

- în problema geodezicelor în plan

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}dx.$$

11.3 Spaţii de funcţii

Domeniul de definiţie al unei funcţionale este o mulţime de funcţii reale definite pe un interval în cazul funcţiilor de o variabilă, sau pe un domeniu în cazul funcţiilor de mai multe variabile, care satisfac anumite condiţii de netezime - derivata continuă sau continuă pe porţiuni - în interval sau domeniu şi anumite condiţii la capetele intervalului sau pe frontiera domeniului. Mulţimile de funcţii reale definite pe un interval sau domeniu cu anumite condiţii de netezime înzestrate cu operaţia de adunare a funcţiilor şi cu operaţia de înmulţire a funcţiilor cu numere reale formează spaţii vectoriale cu dimensiune infinită. Se spune că avem de-a face cu probleme cu un număr infinit de grade de libertate. Mai mult, aceste spaţii vectoriale pot fi înzestrate cu anumite norme, deci cu anumite distanţe, şi putem astfel vorbi despre funcţii vecine şi despre vecinătatea unei funcţii.

Ca peste tot în acest curs, vom nota prin $C[a,b]$ spaţiul vectorial normat al funcţiilor continue pe $[a,b]$ cu norma uniformă

$$\|y(x)\|_0 = \max_{x\in[a,b]} |y(x)| ;$$

prin $C^1[a,b]$ vom nota spaţiul vectorial normat al funcţiilor cu derivata continuă pe $[a,b]$ cu norma

$$\|y(x)\|_1 = \max_{x\in[a,b]} |y(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y'(x)| ;$$

mai general prin $C^m[a,b]$ vom nota spaţiul vectorial normat al funcţiilor cu derivata de ordinul m continuă pe $[a,b]$ cu norma

$$\|y(x)\|_m = \sum_{k=0}^{m} \max_{x\in[a,b]} \left|y^{(k)}(x)\right| .$$

Prin $C^{m*}[a,b]$ vom nota spaţiul vectorial normat al funcţiilor cu derivata de ordinul m continuă pe porţiuni pe $[a,b]$ cu aceeaşi normă

$$\|y(x)\|_m = \sum_{k=0}^{m} \max_{x\in[a,b]} \left|y^{(k)}(x)\right| .$$

Dacă $y_0(x) \in C[a,b]$ vom numi *vecinătate de ordin zero sau vecinătate tare de lărgime* 2ε a lui $y_0(x)$ mulţimea tuturor funcţiilor $y(x) \in C[a,b]$ cu proprietatea că $\|y(x) - y_0(x)\|_0 < \varepsilon$ şi o vom nota prin $V_{0\varepsilon}(y_0(x))$. Analog, vom numi *vecinătate de* *ordinul întâi sau slabă de lărgime* 2ε a lui $y_0(x) \in C^1[a,b]$ mulţimea tuturor funcţiilor $y(x) \in C^1[a,b]$ cu proprietatea că $\|y(x) - y_0(x)\|_1 < \varepsilon$ şi o vom nota prin $V_{1\varepsilon}(y_0(x))$. La fel, vom numi vecinătate slabă de funcţii cu derivată discontinuă de lărgime 2ε a lui $y_0(x) \in C^{1*}[a,b]$ mulţimea tuturor funcţiilor $y(x) \in C^{1*}[a,b]$ cu proprietatea că $\|y(x) - y_0(x)\|_1 < \varepsilon$ şi o vom nota prin $V_{1*\varepsilon}(y_0(x))$.

Este clar că o vecinătate slabă de lărgime 2ε a lui $y_0(x)$ este conţinută în vecinătatea tare de lărgime 2ε a lui $y_0(x)$.

Fie $I[y(x)]$ o funcţională definită pe o mulţime de funcţii M. Mulţimea M se numeşte şi *mulţimea funcţiilor admisibile*. Cum orice funcţie admisibilă are un grafic, mulţimea M se mai numeşte şi *mulţimea liniilor sau curbelor admisibile*. In cazul funcţionalelor care depind de funcţii de mai multe variabile vom vorbi de *mulţimea suprafeţelor admisibile*.

Fie $I[y(x)]$ o funcţională definită pe o mulţime de funcţii M şi $y_0(x) \in M$. Funcţionala $I[y(x)]$ este *continuă în* $y_0(x)$ în sensul unei anumite norme dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice funcţie $y(x) \in M$ din vecinătatea de ordin $\delta(\varepsilon)$ a lui $y_0(x)$, $||y(x) - y_0(x)|| < \delta(\varepsilon)$, are loc inegalitatea $|I[y(x)] - I[y_0(x)]| < \varepsilon$. Este evident definiţia obişnuită a continuităţii în spaţii normate. Această definiţie este echivalentă cu faptul că oricare ar fi funcţia $\eta(x)$ din vecinătatea lui 0 (funcţia nulă) are loc relaţia

$$\lim_{t \to 0} I[y_0(x) + t\eta(x)] = I[y_0(x)].$$

Dacă funcţionala $I[y(x)]$ definită pe mulţimea de funcţii M nu este continuă în $y_0(x) \in M_0$, se spune că ea este discontinuă în $y_0(x)$.

Exemplul 1. Funcţionala

$$I[y(x)] = \int_0^1 [y(x) + 2y'(x)]dx$$

definită pe $C^1[0,1]$ este continuă în funcţia $y_0(x) = x$ în sensul normei din $C^1[0,1]$ pentru că oricare ar fi funcţia $y(x) \in C^1[0,1]$ cu $|y(x) - x| < \delta$, $|y'(x) - 1| < \delta$ avem

$$\begin{aligned} |I[y(x)] - I[x]| &= |\int_0^1 [y(x) + 2y'(x) - x - 2]dx| \leq \\ &\leq \int_0^1 |y(x) - x|dx + 2\int_0^1 |y'(x) - 1|dx. \end{aligned}$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ alegând $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ avem $|I[y(x)] - I[x]| < \varepsilon$.

Exemplul 2.Fie funcţionala $I[y(x)] = y'(x_0)$ definită pe $C^1[a,b]$, x_0 fiind un punct fixat din $[a,b]$. Această funcţională este discontinuă în orice funcţie $y_0(x) \in C^1[a,b]$ în norma uniformă din $C[a,b]$. Intr-adevăr, fie $\varphi(x) \in C^1[a,b]$ astfel încât $\varphi'(x_0) = 1$ şi $|\varphi(x)| < \delta, \forall x \in [a,b]$. Funcţia $y(x) = y_0(x) + \varphi(x) \in C^1[a,b]$ şi are derivata $y'(x_0) = y_0'(x) + 1$. Deci $|I[y(x)] - I[y_0(x)]| = 1$.

Se vede uşor că aceeaşi funcţională este continuă în orice funcţie $y_0(x) \in C^1[a,b]$ în norma lui $C^1[a,b]$.

11.4 Clasificarea extremelor

Fie $I[y(x)]$ o funcţională definită pe o mulţime de funcţii M . Vom spune că funcţionala $I[y(x)]$ are *minim (maxim)* pe mulţimea $M_0 \subset M$ în $y_0(x) \in M_0$ dacă pentru orice $y(x) \in M_0$ are loc relaţia $I[y(x)] - I[y_0(x)] \geq 0$ (≤ 0) .

Dacă funcţionala $I[y(x)]$ are minim (maxim) pe mulţimea $M_0 \subset M$ în $y_0(x) \in M_0$ atunci ea are minim (maxim) în $y_0(x)$ pe orice mulţime mai mică $M_1 \subset M_0$, $y_0(x) \in M_1$.

Fie $I[y(x)]$ o funcţională definită pe o mulţime de funcţii M. Vom spune că funcţionala $I[y(x)]$ are un *minim (maxim) tare* în $y_0(x) \in C[a,b] \cap M$ dacă există o vecinătate tare $V_{0\varepsilon}(y_0(x))$ astfel încât funcţionala are un minim (maxim) pe $V_{0\varepsilon}(y_0(x)) \cap M$ în $y_0(x)$. Analog, vom spune că funcţionala $I[y(x)]$ are un *minim (maxim) slab* în $y_0(x) \in C^1[a,b] \cap M$ dacă există o vecinătate slabă $V_{1\varepsilon}(y_0(x))$ astfel încât funcţionala are un minim (maxim) pe $V_{1\varepsilon}(y_0(x)) \cap M$ în $y_0(x)$. La fel vom defini minimul (maximul) slab cu derivată discontinuă.

Dacă funcţionala $I[y(x)]$ definită pe mulţimea de funcţii M are un minim (maxim) pe M în $y_0(x) \in M$ vom spune că ea are un *minim (maxim) absolut* pe M în $y_0(x)$. Minimele (maximele) tari sau slabe se numesc şi *minime (maxime) relative.*

Este evident că un extremum tare este deasemenea şi un extremum slab. De asemenea, un extremum absolut este şi un extremum relativ.

Exemplul 3. Fie funcţionala

$$I[y(x)] = \int_0 \pi y(x)^2 (1 - y'(x)^2) dx$$

definită pe mulţimea M a funcţiilor cu derivata integrabilă pe $[0,\pi]$ astfel încât $y(0) = y(\pi) = 0$. Funcţia nulă pe $[0,\pi]$ realizează minimul slab al acestei funcţionale pentru că pentru $|y(x)| + |y'(x)| < \varepsilon < 1$ integrandul este pozitiv şi se anulează numai pentru $y(x) \equiv 0$. Funcţionala nu îşi atinge minimul tare pe $y(x) \equiv 0$ pentru că luând funcţiile

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$$

avem

$$I[y_n(x)] = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}$$

şi deci $I[y_n(x)] < 0$ pentru $n > 4$. In acelaşi timp $\|y_n(x)\|_0 \to 0$, adică funcţiile $y_n(x)$ sunt în vecinătatea tare a funcţiei nule.

Exemplul 4. Fie funcţionala

$$I[y(x)] = \int_{-1}^{1} x^2 y'(x)^2 dx$$

definită pe mulţimea M a funcţiilor cu derivată integrabilă pe $[-1,1]$ astfel încât $y(-1) = -1,\ y(1) = 1$. Ea este evident pozitivă pe M. Pentru funcţiile

$$y\alpha(x) = \frac{\arctan \frac{x}{\alpha}}{\arctan \frac{1}{\alpha}}, \alpha > 0,$$

avem

$$I[y\alpha(x)] = \int_{-1}^{1} x^2 y_a'(x)^2 dx < \int_{-1}^{1} (x^2 + \alpha^2) y_a'(x)^2 dx = \frac{2\alpha}{\arctan \frac{1}{\alpha}}$$

şi deci $I[y\alpha(x)] \to 0$ pentru $\alpha \to 0$. In $C^1[-1,1]$ nu se poate atinge minimul pentru că ar trebui să avem $y'(x) = 0$ şi deci $y(x) = const$, contradicţie cu condiţiile la capete. In $C^{1*}[-1,1]$ minimul se atinge pentru funcţia

$$y_0(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1,0) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0,1] \end{cases}$$

spre care tind funcţiile $y\alpha(x)$ pentru $\alpha \to 0$.

Definiţiile date mai sus se extind în mod natural atât în cazul funcţionalelor care depind de o funcţie de mai multe variabile definită pe un domeniu şi de derivatele parţiale ale acesteia cât şi în cazul funcţionalelor care depind de mai multe funcţii de o variabilă definite pe un interval şi de derivatele acestora. In ultimul caz, în locul funcţiei $y(x)$ putem considera că avem de-a face cu o funcţie vectorială $y(x)$ cu n componente funcţii de o singură variabilă.

11.5 Exerciţii

1. Să se arate că funcţia $y(x) \equiv x$ realizează minimul tare (chiar absolut) pentru funcţionala

$$I[y(x)] = \int_0^1 y'(x)dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor

$$M = \left\{y(x)|y(x) \in C^1[0,1], y(0) = 0, y(1) = 1.\right\}$$

.

2. Să se arate că funcţia $y(x) \equiv x$ realizează minimul slab, dar nu tare, pentru funcţionala

$$I[y(x)] = \int_0^1 y'(x)^3 dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor

$$M = \left\{y(x)|y(x) \in C^1[0,1], y(0) = 0, y(1) = 1.\right\}$$

şi că minimul absolut al funcţionalei este egal cu $-\infty$.

3. Să se arate că pentru funcţionala

$$I[y(x)] = \int_0^1 xy'(x)^2 dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor

$$M = \left\{y(x)|y(x) \in C^1[0,1], xy'(x)^2 \text{ integrabilă pe } [0,1],\ y(0) = 0, y(1) = 1.\right\}$$

nu există o funcţie care să realizeze minimul.

Ind. Se va observa că $I[y(x)] \geqq 0$ şi că $I[x^{\frac{1}{n}}] = \frac{1}{2n} \to 0$.

4. Să se arate că pentru funcţionala

$$I[y(x)] = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} y'(x)^2 dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor

$$M = \left\{ y(x) | y(x) \in C^1[0,1], x^{\frac{2}{3}} y'(x)^2 \ \textit{integrabilă pe}\ [0,1],\ y(0) = 0, y(1) = 1. \right\}$$

minimul absolut se atinge pentru $y(x) \equiv x^{\frac{1}{3}}$.

11.6 Extremele funcţiilor reale de mai multe variabile

Calculul variaţional clasic rezolvă problema extremelor funcţionalelor prin mijloace asemănătoare celor folosite de analiza clasică în rezolvarea problemei extremelor funcţiilor de una sau mai multe variabile. Şi în analiza clasică şi în calculul variaţional clasic, metoda esenţială este *metoda variaţiilor*: studiul extremelor este făcut prin atribuirea de mici variaţii argumentului. De aceea vom reaminti pe scurt rezultatele analizei clasice în cazul funcţiilor reale de n variabile. Notând $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, o asemenea funcţie se poate scrie sub forma $f(x)$. Funcţia $f(x)$ definită într-o vecinătate a lui a are derivată în a în direcţia vectorului h, notată$\frac{\partial f}{\partial h}$, dacă funcţia de variabilă reală t, $f(a + th)$ are derivata $\frac{\partial f}{\partial h}$ în $t = 0$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{d}{dt} f(a + th)\,|_{t=0}\ ,$$

sau altfel scris

$$f(a + th) = f(a) + t\frac{\partial f}{\partial h} + o(t), t \to 0.$$

Reamintim că am notat prin $o(t)$ un "infinit mic" neglijabil în raport cu t, adică $\lim\limits_{t\to 0} \frac{|o(t)|}{|t|} = 0$. Derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt derivatele în a în direcţia versorilor bazei canonice $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ... , $e_n = (0, ...0, 1)$.

Funcţia $f(x)$ definită într-o vecinătate a lui a are derivată de ordinul doi în a în direcţia vectorului h, notată$\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}$, dacă funcţia de variabilă reală t, $f(a+th)$ are derivata de ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}$ în $t = 0$, adică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \frac{d^2}{dt^2} f(a + th)\,|_{t=0}\ ,$$

sau altfel scris

$$f(a+th) = f(a) + t\frac{\partial f}{\partial h} + \frac{1}{2}t^2\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} + o(t^2), t \to 0.$$

Funcţia $f(x)$ definită într-o vecinătate a lui a este diferenţiabilă în a dacă creşterea sa în a: $f(a+h) - f(a)$ are o parte principală lineară în creşterea argumentului h, adică există o aplicaţie lineară de la $\mathbf{R}^n$ la $\mathbf{R}$, deci o formă lineară, derivata de primul ordin $f'(a)(h)$, numită şi diferenţiala de primul ordin notată $df(a;h)$, astfel încât

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f'(a)(h) + o(\|h\|), \|h\| \to 0 \\ &\mathit{sau} \\ f(a+h) - f(a) &= df(a;h) + o(||h||), \|h\| \to 0. \end{aligned}$$

Dacă funcţia $f(x)$ este diferenţiabilă în a, ea are în a derivate parţiale după orice vector şi componentele derivatei $f'(a)$ sunt tocmai derivatele parţiale în a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ ale lui $f(x)$. Relaţia de definiţie se poate scrie matricial sub forma

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})(h_1, h_2, ..., h_n)^t + o(\|h\|), \\ &\mathit{sau} \\ f(a+h) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n + o(\|h\|) \end{aligned}$$

unde prin exponentul t am notat operaţia de transpunere. Cum pentru funcţiile $f(x) = x_i$ avem $df(a;h) = h_i$ este normal să se noteze dx_i în loc de h_i şi dx în loc de h şi expresia diferenţialei este

$$df(a;dx) = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

O funcţie definită şi diferenţiabilă într-o vecinătate a lui a este diferenţiabilă de ordinul doi în a dacă diferenţiala sa de primul ordin $f'(x)(h)$ este diferenţiabilă în a, în raport cu x, deci există o aplicaţie lineară de la spaţiul formelor lineare pe $\mathbf{R}^n$ la $\mathbf{R}$, adică o formă bilineară $f''(a)(h,k)$ de la $\mathbf{R}^n$ la $\mathbf{R}$, astfel încât

$$f'(a+k)(h) - f'(a)(h) = f''(a)(h,k) + o(\|k\|).$$

Se arată că forma bilineară$f''(a)(h,k)$ este simetrică şi că matricea sa în baza canonică este aşa numita *matrice hessiană* a lui f, matricea derivatelor parţiale de ordinul doi ale lui f în a, adică are loc relaţia

$$f''(a)(h,k) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}h_i k_j.$$

Mai mult, se arată că definiţia de mai sus este echivalentă cu existenţa formulei lui Taylor de ordinul doi

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(h) + \frac{1}{2!}f''(a)(h,h) + o(\|h\|^2), \|h\| \to 0.$$

De obicei $f''(a)(h,h)$ este numită diferenţiala de ordinul doi şi se notează prin $d^2f(a;h)$ sau $d^2f(a;dx)$. Cu notaţiile de mai sus

$$d^2f(a;dx) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Peste tot în aceste relaţii, derivatele parţiale sunt calculate în a.

De asemenea are loc relaţia

$$f''(a)(h,h) = \frac{d^2}{dt^2} f(a+th)\,|_{t=0}\ ,$$

adică dacă funcţia este diferenţiabilă de două ori atunci ea are şi derivata de ordinul doi în direcţia oricărui vector

Pe baza celor de mai sus, se demonstrează următoarele teoreme:

T1. (*Condiţii necesare de minim*) Pentru ca punctul a să fie punct de minim local al funcţiei $f(x)$ diferenţiabilă de ordinul doi în a sunt necesare condiţiile:

- $f'(a) = 0$,
- $f''(a) \geq 0$,

  ultima condiţie însemnând că forma pătratică $f''(a)(h,h) \geq 0$ pentru orice h.

T2. (Condiţii suficiente de minim) Pentru ca punctul a să fie punct de minim local pentru funcţia $f(x)$ diferenţiabilă de ordinul doi în a sunt suficiente condiţiile:

- $f'(a) = 0$,
- $f''(a) > 0$,

ultima condiţie însemnând că $f''(a)(h,h) > 0$ pentru orice h nenul.

11.7 Variaţia de ordinul întâi a funcţionalelor

Având în vedere cele de mai sus, suntem conduşi să introducem următoarele definiţii:

Definiţia 1. Fie $I[y(x)]$ o funcţională definită pe mulţimea M a funcţiilor admisibile $y(x)$. Vom numi *derivată de ordinul întâi a funcţionalei* $I[y(x)]$ în punctul $y_0(x) \in M$ corespunzătoare funcţiei $\eta(x)$, derivata de ordinul întâi în $t = 0$ a funcţiei $I[y_0(x)+t\eta(x)]$, adică aplicaţia $\eta(x) \to \delta I[y_0(x); \eta(x)]$ definită prin relaţia

$$\delta I[y_0(x); \eta(x)] = \frac{\partial}{\partial t} I[y_0(x) + t\eta(x)] \,|_{t=0} \,,$$

dacă aceasta există pentru $y_0(x) + t\eta(x) \in M$, pentru t într-o vecinătate V_0 a lui 0.

Din această definiţie, rezultă că derivata de ordinul întâi $\delta I[y_0(x); \eta(x)]$ este o funcţională definită pe o submulţime

$$M_0 = \{\eta(x) | y_0(x) + t\eta(x) \in M, t \in V_0\}$$

a mulţimii funcţiilor admisibile M. Ea depinde atât de funcţia dată $y_0(x)$ cât şi de funcţia $\eta(x)$. Dacă adoptăm un limbaj geometric, putem spune că mulţimea funcţiilor

$$\{y_0(x) + t\eta(x) | t \in V_0\}$$

alcătuiesc *direcţia* $\eta(x)$ şi putem vorbi de *derivata întâia a funcţionalei în direcţia* $\eta(x)$.

Definiţia 2. O funcţională $L[y(x)]$ definită pe un spaţiu vectorial real normat de funcţii M se numeşte *omogenă* dacă oricare ar fi constanta reală λ şi oricare ar fi funcţia $y(x) \in M$ are loc relaţia

$$L[\lambda y(x)] = \lambda L[y(x)].$$

O funcţională $L[y(x)]$ definită pe un spaţiu vectorial real normat de funcţii M se numeşte *aditivă* dacă oricare ar fi funcţiile $y_1(x), y_2(x) \in M$ are loc relaţia

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)].$$

O funcţională $L[y(x)]$ definită pe un spaţiu vectorial real normat de funcţii M se numeşte *lineară* dacă este omogenă şi aditivă.

Se verifică uşor că o funcţională definită pe un spaţiu vectorial real normat de funcţii M este lineară dacă este continuă şi aditivă.

Vom observa că derivata de ordinul întâi $\delta I[y_0(x);\eta(x)]$ este o funcţională omogenă în raport cu $\eta(x)$ cum rezultă din relaţiile

$$\begin{aligned}\delta I[y_0(x);\lambda\eta(x)] &= \frac{\partial}{\partial t}I[y_0(x)+\lambda t\eta(x)]\,|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial(\lambda t)}I[y_0(x)+\lambda t\eta(x)]\,|_{\lambda t=0}\,\frac{\partial(\lambda t)}{\partial t} = \\ &= \lambda\frac{\partial}{\partial(\lambda t)}I[y_0(x)+\lambda t\eta(x)]\,|_{\lambda t=0} = \lambda\delta I[y_0(x);\eta(x)].\end{aligned}$$

Derivata de ordinul întâi fiind funcţională omogenă în raport cu direcţia $\delta I[y_0(x);t\eta(x)] = t\delta I[y_0(x);\eta(x)]$, cum $t\eta(x)$ reprezintă variaţia efectivă a funcţiei $y_0(x)$ este natural să o numim pe aceasta *variaţia funcţiei* $y_0(x)$, să o notăm cu $\delta y(x)$, iar ca *variaţie de ordinul întâi a funcţionalei* să considerăm pe $t\delta I[y_0(x);\eta(x)] = \delta I[y_0(x);\delta y(x)]$.

Observaţie. Dacă $y_0(x) : [a,b] \to R$ este o funcţie reală, uneori funcţia $y(x,t) : [a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to R$ cu proprietatea că $y(x,0) = y_0(x)$ se numeşte variata lui $y_0(x)$. Funcţia $\delta y(x) = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} t$ se numeşte variaţia lui $y_0(x)$. Se verifică uşor că $(\delta y(x))' = \delta y'(x)$. Se defineşte variaţia de ordinul întâi a funcţionalei $I[y(x)]$ în $y_0(x)$ ca fiind $\delta I[y_0(x),\delta y(x)] = \left.\frac{\partial I[y(x,t)]}{\partial t}\right|_{t=0} t$. Toate relaţiile de mai sus sau care vor urma rămân valabile cu aceste definiţii.

Exemplul 5. Să considerăm funcţionala

$$I[y(x)] = \int\limits_{-1}^{1} y(x)^2 y'(x)dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \left\{y(x)|y(x)\in C^1[-1,1], y(-1)=1, y(1)=1\right\}.$$

Cum funcţia $y_0(x) = x^2 \in M$, funcţia $y_0(x)+t\eta(x) \in M$ dacă şi numai dacă $\eta(x) \in C^1[-1,1]$ şi $\eta(-1)=\eta(1)=0$. In aceste condiţii avem

$$I[y_0(x)+t\eta(x)] = \int\limits_{-1}^{1}[x^2+t\eta(x)]^2[2x+t\eta'(x)]dx.$$

Sub integrală având un polinom în t, putem deriva sub integrală şi avem

$$\delta I[y_0(x);\eta(x)] = \frac{\partial}{\partial t}I[y_0(x)+t\eta(x)]\,|_{t=0} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\int_{-1}^{1} [2x + t\eta'(x)][2x^2\eta(x) + 2t\eta(x)^2] + \eta'(x)[x^2 + t\eta(x)]^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} [4x^3\eta(x) + x^4\eta'(x)]dx.$$

Din expresia obţinută se vede că derivata de ordinul întâi este în acest caz chiar o funcţională lineară pe mulţimea

$$M_0 = \left\{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[-1,1], \eta(-1) = 0, \eta(1) = 0\right\}.$$

Exemplul 6. Fie acum funcţionala

$$I[y(x)] = \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{y(x)^3 + y'(x)^3}dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^1[-1,1], y(-1) = 0, y(1) = 0\}.$$

Cum funcţia $y_0(x) = 0 \in M$ pentru ca $y_0(x)+t\eta(x) = t\eta(x) \in M$ este necesar şi suficient ca

$$\eta(x) \in M_0 = \left\{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[-1,1], \eta(-1) = 0, \eta(1) = 0\right\}.$$

Cum

$$I[y_0(x) + t\eta(x)] = I[t\eta(x)] = \int_{-1}^{1} t\sqrt[3]{\eta(x)^3 + \eta'(x)^3}dx$$

rezultă că derivata de ordinul întâi a acestei funcţionale este

$$\delta I[y_0(x); \eta(x)] = \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{\eta(x)^3 + \eta'(x)^3}dx.$$

Observăm că în acest caz derivata de ordinul întâi este o funcţională nelineară în raport cu $\eta(x)$, dar ea este o funcţională omogenă în raport cu $\eta(x)$. Nelinearitatea variaţiei de ordinul întâi se explică prin faptul că funcţia de sub integrala funcţionalei, $f(y, y') = y^3+y'^3$, nu admite derivate parţiale de ordinul întâi în punctul $(0, 0)$, unde $y = 0$, $y' = 0$.

Exemplul 7. Fie acum cazul mai general al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_{a}^{b} F(x, y(x), y'(x))dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_1, y(b) = y_2\}.$$

In ce priveşte *lagrangeianul funcţionalei*, funcţia de trei variabile $F(x, y, y')$, vom admite că ea este definită într-un domeniu $D_3 \subset \mathbf{R}^3$ şi că în acest domeniu ea este o funcţie cu derivate parţiale de ordinul întâi F_x, F_y, $F_{y'}$ continue în raport cu cele trei variabile. Fie $y_0(x) \in M$ o funcţie admisibilă. Pentru ca $y_0(x) + t\eta(x) \in M, \forall t \in V_0$, este necesar şi suficient ca

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}.$$

Pentru o asemenea funcţie avem

$$I[y_0(x) + t\eta(x)] = \int_a^b F(x, y_0(x) + t\eta(x), y_0'(x) + t\eta'(x))dx.$$

Cum funcţia F este de clasă C, putem deriva în raport cu t sub integrală conform cu regulile de derivare în lanţ (derivarea funcţiilor compuse):

$$\frac{\partial}{\partial t} I[y_0 + t\eta] = \int_a^b \left[F_y(x, y_0 + t\eta, y_0' + t\eta')\eta + F_{y'}(x, y_0 + t\eta, y_0' + t\eta')\eta'\right] dx$$

şi deci obţinem derivata de ordinul întâi a funcţionalei

$$\delta I[y_0(x); \eta(x)] = \int_a^b \left[F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x) + F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\eta'(x)\right] dx.$$

Se vede că în acest caz, derivata de ordinul întâi este o funcţională lineară şi continuă în raport cu funcţia $\eta(x)$.

Dacă presupunem că funcţia $F(x, y, y')$ are derivate de ordinul doi continue şi că funcţiile admisibile sunt cu derivate de ordinul doi continue, ultimului termen al derivatei de ordinul întâi i se poate aplica integrarea prin părţi şi putem scrie derivata de ordinul întâi sub forma

$$\delta I[y_0(x); \eta(x)] = \int_a^b \left[F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\right] \eta(x)dx.$$

Dacă derivata de ordinul întâi $\delta I[y_0(x);\eta(x)]$ a funcţionalei $I[y(x)]$ este o funcţională lineară şi continuă în raport cu funcţia $\eta(x)$, se mai spune că aceasta reprezintă *derivata sau diferenţiala în sensul lui Gateaux* în $y_0(x)$ a funcţionalei $I[y(x)]$ în direcţia lui $\eta(x)$.

Dacă folosim variaţiile $\delta y(x), \delta y'(x)$ atunci putem scrie

$$\delta I[y_0(x);\delta y(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y'(x)\right] dx,$$

adică, formal variaţia de ordinul întâi se obţine prin "diferenţiere" sub semnul integrală şi înlocuirea simbolului de diferenţiere "*d*" prin " δ ".

Definiţia 3. Dacă pentru funcţionala $I[y(x)]$ definită pe mulţimea funcţiilor admisibile M dintr-un spaţiu vectorial normat există o funcţională $L[y_0(x);\eta(x)]$ lineară şi continuă în raport cu funcţia $\eta(x)$ definită pe mulţimea funcţiilor

$$M_0 = \{\eta(x)|y_0(x) + \eta(x) \in M\}$$

astfel încât

$$I[y_0(x) + \eta(x)] - I[y_0(x)] = L[y_0(x);\eta(x)] + o(\|\eta(x)\|), \|\eta(x)\| \to 0,$$

pentru orice funcţie $\eta(x) \in M_0$, atunci spunem că funcţionala $I[y(x)]$ este *diferenţiabilă Frechet* în $y_0(x)$ şi funcţionala lineară $L[y_0(x);\eta(x)]$ se numeşte *derivata sau diferenţiala în sensul lui Frechet* a funcţionalei $I[y(x)]$ în $y_0(x)$ şi o vom nota tot prin $\delta I[y_0(x);\eta(x)]$.

Exemplul 8. Fie acum cazul funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

din Exemplul 7. definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^1[a, b], y(a) = y_1, y(b) = y_2\}.$$

In ce priveşte lagrangeianul funcţionalei, funcţia de trei variabile $F(x, y, y\prime)$, vom admite, ca şi acolo, că ea este definită într-un domeniu mărginit $D_3 \subset R^3$ şi că în acest domeniu ea este o funcţie cu derivate parţiale de ordinul doi în raport cu cele trei variabile continue. Fie $y_0(x) \in M$ o funcţie admisibilă. Pentru ca $y_0(x) + \eta(x) \in M$, este necesar şi suficient ca

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a, b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}$$

şi ca norma lui $\eta(x)$ să fie suficient de mică. Pentru o asemenea funcţie avem

$$I[y_0(x) + \eta(x)] = \int_a^b F(x, y_0(x) + \eta(x), y_0'(x) + \eta'(x))dx$$

şi ţinând cont de formula lui Taylor

$$F(x, y_0 + \eta, y_0' + \eta') = F(x, y_0, y_0') + F_y(x, y_0, y_0')\eta + F_{y'}(x, y_0, y_0')\eta' + o(\|\eta\|_1)$$

putem scrie

$$I[y_0(x) + \eta(x)] = I[y_0(x)] + \int_a^b [F_y(x, y_0, y_0')\eta + F_{y'}(x, y_0, y_0')\eta']dx + o(\|\eta\|_1),$$

adică funcţionala este diferenţiabilă în sensul lui Frechet şi diferenţiala sa în sensul lui Frechet coincide cu derivata sa în sensul lui Gateaux, adică cu derivata sa de ordinul întâi. De altfel, acest lucru este general: dacă funcţionala este diferenţiabilă în sensul lui Frechet atunci ea este şi diferenţiabilă în sensul lui Gateaux şi cele două diferenţiale coincid. In cele ce urmează, vom avea de-a face numai cu funcţionale care vor fi diferenţiabile Frechet şi datorită tradiţiei vom vorbi despre variaţia de ordinul întâi în loc de diferenţiala în sensul lui Frechet..

Mai mult, să observăm că dacă ţinem cont că funcţia creştere $\eta(x)$ este variaţia funcţiei $y_0(x)$ şi deci o notăm cu $\delta y(x)$, $\eta'(x)$ este variaţia derivatei $y_0'(x)$ şi deci o notăm cu $\delta y'(x)$, variaţia de ordinul întâi a funcţionalei, şi deci diferenţiala sa Frechet, se scrie sub forma

$$\delta I[y_0(x); \delta y(x)] = \int_a^b [F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x) + F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y'(x)]dx,$$

adică, şi acum formal variaţia de ordinul întâi se obţine prin "diferenţiere" sub semnul integrală şi înlocuirea simbolului de diferenţiere "d" prin " δ ".

Exemplul 9. Să considerăm acum funcţionala

$$I[y(x), b] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea funcţiilor

$$M = \{y(x) | y(x) \in C^1[a, B], y(a) = y_1, b \leq B\}$$

adică pe mulţimea funcţiilor al căror grafic are capătul din stânga fixat, iar capătul din dreapta se poate deplasa liber în semiplanul $x \leq B$. In calculul primei variaţii trebuie să ţinem cont de faptul că extremitatea dreaptă se mişcă liber. Vom considera că abscisa capătului din dreapta devine $b + t\beta$, iar ordonata devine $y(b + t\beta) + t\eta(b + t\beta)$. Vom avea deci

$$\Phi(t) = I[y(x) + t\eta(x), b + t\beta] = \int_a^{b+t\beta} F(x, y(x) + t\eta(x), y'(x) + t\eta'(x))dx$$

şi deci

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \int_a^{b+t\beta} \{F_y(x, y_0 + t\eta, y_0' + t\eta')\eta + F_{y'}(x, y_0 + t\eta, y_0' + t\eta')\eta'\}\, dx + \\ &+F(b + t\beta, y_0(b + t\beta) + t\eta(b + t\beta), y_0'(b + t\beta) + t\eta'(b + t\beta))\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi'(0) &= \delta I[y_0; \eta] = \int_a^b \left\{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0, y_0')\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0, y_0')\eta'\right\} dx + \\ &+F(b, y_0(b), y_0'(b))\beta\end{aligned}$$

integrând prin părţi

$$\begin{aligned}\Phi'(0) &= \delta I[y_0; \eta] = \int_a^b \left\{F_y(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y_0, y_0')\right\} \eta(x)dx + \\ &+F_{y'}(b, y_0(b), y_0'(b))\eta(b) + F(b, y_0(b), y_0'(b))\beta\end{aligned}$$

sau în scrierea cu $\delta y(x)$

$$\begin{aligned}\delta I[y_0; \delta y] &= \int_a^b \left\{F_y(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y_0, y_0')\right\} \delta y(x)dx + \\ &+F_{y'}(b, y_0(b), y_0'(b))\delta y(b) + \\ &+ \left(F(b, y_0(b), y_0'(b)) - y_0'(b)F_{y'}(b, y_0(b), y_0'(b))\right) \delta b.\end{aligned}$$

Am notat prin $\delta y(b)$ variaţia efectivă a ordonatei capătului din b :

$$\delta y(b) = \eta(b)t + y_0'(b)\delta b.$$

Dacă şi capătul din stânga ar fi variabil ar apărea cu semnul minus expresiile corespunzătoare lui.

Este de reţinut această formă generală a variaţiei de ordinul întâi pe care o putem scrie sub forma

$$\delta I[y_0;\delta y]=\int_a^b\left\{F_y(x,y_0,y_0')-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y_0,y_0')\right\}\delta y(x)dx+$$

$$+\left[F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\delta y(x)-H(x,y_0(x),y_0'(x))\delta x\right]_a^b$$

unde am notat

$$H(x,y,y')=y'F_{y'}(x,y,y')-F(x,y,y')$$

aşa numita *funcţie a lui Hamilton*.

Exemplul 10. Fie funcţionala

$$I[y(x)]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x),...,y^{(m)}(x))dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M=\{y(x)|y(x)\in C^m[a,b],y^{(i)}(a)=y_{ia},y^{(i)}(b)=y_{ib},i=0,1,...,m-1\}$$

şi unde presupunem că funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi în raport cu toate argumentele continue într-un domeniu din $\mathbf{R}^{m+2}$. Dacă $y_0(x)\in M$, $y_0(x)+\eta(x)\in M$ dacă şi numai dacă

$$\eta(x)\in M_0=\{\eta(x)|\eta(x)\in C^m[a,b],\eta^{(i)}(a)=0,\eta^{(i)}(b)=0,i=0,1,...,m-1\}$$

şi norma sa este suficient de mică. In aceste condiţii, funcţionala are derivata Frechet în $y_0(x)$ dată de relaţia

$$\delta I[y_0(x);\eta(x)]=\int_a^b[F_y\eta(x)+F_{y'}\eta'(x)+...+F_{y^{(m)}}\eta^{(m)}(x)]dx$$

toate derivatele parţiale fiind calculate în punctul corespunzător lui $y_0(x)$. Dacă presupunem că funcţia F are derivate de ordin $2m$ în raport cu toate argumentele continue şi că funcţiile admisibile au derivate de ordinul $2m$ continue pe $[a,b]$, atunci integrând prin părţi şi ţinând cont de relaţiile verificate în capete de variaţia $t\eta(x) = \delta y(x)$ se poate scrie variaţia de ordinul întâi sub forma

$$\delta I[y_0(x); \delta y(x)] = \int\limits_a^b [F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + ... + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{y^{(m)}}] \delta y(x) dx.$$

Exemplul 11. Fie cazul unei funcţionale

$$I[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] = \int\limits_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), ..., y_n'(x)) dx,$$

definite pe o mulţime de n funcţii de o variabilă derivabile pe intervalul $[a, b]$:

$$M = \left\{ y_i(x), i = 1, 2, ..., n | y_i(x) \in C^1[a, b], y_i(a) = y_{ia}, y_i(b) = y_{ib} \right\},$$

funcţia F fiind definită într-un domeniu şi cu derivatele parţiale de ordinul întâi continue în acel domeniu.

In aceste condiţii funcţionala are derivată Frechet în $(y_{10}(x), y_{20}(x), ..., y_{n0}(x))$

$$\delta I(y_{i0}(x), \eta_i(x)) = \int\limits_a^b \left\{ \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i}(y_{i0}(x), y_{i0}'(x)) \eta_i(x) + F_{y_i'}(y_{i0}(x), y_{i0}'(x)) \eta_i'(x) \right) \right\} dx.$$

Dacă funcţia F are derivate de ordinul doi continue şi dacă funcţiile admisibile au derivate de ordin doi atunci se poate scrie

$$\delta I(y_{i0}(x), \eta_i(x)) = \int\limits_a^b \left\{ \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i}(y_{i0}(x), y_{i0}'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y_i'}(y_{i0}(x), y_{i0}'(x)) \right) \eta_i(x) \right\} dx.$$

sau

$$\delta I(y_{i0}(x), \delta y_i(x)) = \int\limits_a^b \left\{ \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i}(y_{i0}(x), y_{i0}'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y_i'}(y_{i0}(x), y_{i0}'(x)) \right) \delta y_i(x) \right\} dx.$$

Exemplul 12. Considerăm acum cazul unei funcţionale al cărui argument este o funcţie de două variabile definită pe un domeniu D din planul xOy

$$I[z(x, y)] = \iint\limits_D F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) dx dy,$$

$z_x(x, y), z_y(x, y)$ fiind derivatele parţiale ale funcţiei $z(x, y)$, funcţională definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{z(x, y) | z(x, y) \in C^1(D), z(x, y)|_{\partial D} = dat\}.$$

Presupunând că funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue în raport cu toate argumentele sale într-un domeniu mărginit rezultă imediat că funcţionala are diferenţială Frechet şi că aceasta este

$$\delta I[z(x,y);\eta(x,y)] = \iint\limits_D [F_z\eta(x,y) + F_{z_x}\eta_x(x,y) + F_{z_y}\eta_y(x,y)]dxdy$$

definită pe mulţimea funcţiilor

$$M_0 = \{\eta(x,y)|\eta(x,y) \in C^1(D), \eta(x,y)|_{\partial D} = 0\}.$$

Aici dacă admitem că funcţia F are derivate parţiale continue în raport cu toate argumentele şi că funcţiile admisibile au derivate parţiale de ordinul doi continue pe D, integrând prin părţi găsim expresia variaţiei de ordinul întâi sub forma

$$\delta I[z(x,y);\eta(x,y)] = \iint\limits_D [F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}]\eta(x,y)dxdy$$

11.8 Variaţia de ordinul doi a funcţionalelor

Definiţia 4. Fie $I[y(x)]$ o funcţională definită pe mulţimea M a funcţiilor admisibile $y(x)$. Vom numi *derivată de ordinul doi a funcţionalei* $I[y(x)]$ în punctul $y_0(x) \in M$ corespunzătoare funcţiei $\eta(x)$, derivata de ordinul doi în $t = 0$ a funcţiei $I[y_0(x)+t\eta(x)]$, adică aplicaţia $\eta(x) \to \delta^2 I[y_0(x);\eta(x)]$ definită prin relaţia

$$\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} I[y_0(x) + t\eta(x)]\,|_{t=0}\ ,$$

dacă aceasta există pentru $y_0(x) + t\eta(x) \in M$, pentru t într-o vecinătate V_0 a lui 0.

Şi aici, rezultă că derivata de ordinul doi $\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)]$ este o funcţională omogenă de ordinul doi $\delta^2 I[y_0(x);t\eta(x)] = t^2\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)]$ definită pe o submulţime

$$M_0 = \{\eta(x)|y_0(x) + t\eta(x) \in M, t \in V_0\}$$

a mulţimii funcţiilor admisibile M. Introducând variaţia $\delta y(x) = t\eta(x)$ vom considera variaţia de ordinul doi ca fiind $\delta^2 I[y_0(x);\delta y(x)] = t^2\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)]$.

Exemplul 13. Fie acum cazul funcţionalei

$$I[y(x)] = \int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x) | y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_1, y(b) = y_2\}.$$

In ce priveşte lagrangeianul funcţionalei, funcţia de trei variabile $F(x, y, y')$, vom admite că ea este definită într-un domeniu $D_3 \subset \mathbf{R}^3$ şi că în acest domeniu ea este o funcţie cu derivate parţiale de ordinul doi continue în raport cu cele trei variabile. Fie $y_0(x) \in M$ o funcţie admisibilă.Cum avem

$$\frac{\partial}{\partial t} I[y_0 + t\eta] = \int\limits_a^b [F_y(x, y_0 + t\eta, y_0' + t\eta')\eta + F_{y'}(x, y_0 + t\eta, y_0' + t\eta')\eta']\, dx$$

rezultă

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} I[y_0 + t\eta] = \int\limits_a^b \Big[F_{yy}(x, y_0 + t\eta, y_0' + t\eta')\eta^2 +$$

$$+2F_{yy'}(x, y_0 + t\eta, y_0' + t\eta')\eta\eta' + F_{y'y'}(x, y_0 + t\eta, y_0' + t\eta')\eta'^2\Big]\, dx$$

şi deci derivata de ordinul doi este

$$\delta^2 I[y_0; \eta] = \int_a^b \left\{F_{yy}(x, y_0, y_0')\eta^2 + 2F_{yy'}(x, y_0, y_0')\eta\eta' + F_{y'y'}(x, y_0, y_0')\eta'^2\right\} dx$$

sau înlocuind $t\eta(x)$ cu $\delta y(x)$ şi $t\eta'(x)$ cu $\delta y'(x)$

$$\delta^2 I[y_0; \delta y(x)] = \int_a^b \left\{F_{yy}(x, y_0, y_0')\delta y^2 + 2F_{yy'}(x, y_0, y_0')\delta y \delta y' + F_{y'y'}(x, y_0, y_0')\delta y'^2\right\} dx$$

Şi aici observăm că formal variaţia de ordinul doi se obţine diferenţiind formal cu operatorul δ variaţia de ordinul întâi.

Definiţia 5. O funcţională $B[y(x), z(x)]$ definită pe $M \times M$, M fiind un spaţiu vectorial real normat, se numeşte *bilineară pe* M dacă ea este lineară în fiecare din cele două argumente ale sale. Dacă $B[y(x), z(x)]$ este o funcţională bilineară pe M, funcţionala $B[y(x), y(x)]$ se numeşte funcţională *pătratică* pe M. O funcţională patratică $B[y(x), y(x)]$ de numeşte *pozitiv definită* dacă $B[y(x), y(x)] > 0$ oricare ar fi funcţia nenulă $y(x)$.

Vom observa că variaţia de ordinul doi a funcţionalei din exemplul ultim este o formă pătratică.

Definiţia 6. O funcţională $I[y(x)]$ are o *derivată de ordinul doi în sensul lui Frechet* dacă creşterea sa

$$\Delta I = I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)]$$

se poate scrie sub forma

$$\Delta I = L_1[\delta y(x)] + \frac{1}{2}L_2[\delta y(x)] + \beta \left\|\delta y(x)\right\|^2,$$

unde $L_1[\delta y(x)]$ este o funcţională lineară, $L_2[\delta y(x)]$ este o funcţională pătratică şi $\beta \to 0$ când $\|\delta y(x)\| \to 0$. Vom spune atunci că $L_2[\delta y(x)]$ este derivata de ordinul doi a funcţionalei $I[y(x)]$ şi o vom nota prin $d^2I[\delta y(x)]$.

Exemplul 14. Fie cazul funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

în cazul în care funcţia F are derivate parţiale de ordinul trei continue într-un domeniu mărginit. Folosind de această dată formula lui Taylor de ordinul doi se vede imediat că această funcţională admite diferenţială de ordinul doi în sensul lui Frechet şi aceasta coincide cu variaţia de ordinul doi calculată mai sus.

Exemplul 15. Fie funcţionala

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(m)}(x))dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^m[a,b], y^{(i)}(a) = y_{ia}, y^{(i)}(b) = y_{ib}, i = 0, 1, ..., m-1\}$$

şi unde presupunem că funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi în raport cu toate argumentele continue într-un domeniu din $\mathbf{R}^{m+2}$. Dacă $y_0(x) \in M$, $y_0(x) + \eta(x) \in M$ dacă şi numai dacă

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^m[a,b], \eta^{(i)}(a) = 0, \eta^{(i)}(b) = 0, i = 0, 1, ..., m-1\}$$

şi norma sa este suficient de mică. In aceste condiţii, funcţionala are variaţia de ordinul doi în $y_0(x)$ dată de relaţia

$$\delta^2 I[y_0(x); \eta(x)] = \int_a^b \sum_{k,l=0}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(k)} \partial y^{(l)}} \eta(x)^{(k)} \eta(x)^{(l)} dx$$

sau altfel scris

$$\delta^2 I[y_0(x);\delta y(x)] = \int_a^b \sum_{k,l=0}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(k)} \partial y^{(l)}} \delta y(x)^{(k)} \delta y(x)^{(l)} dx.$$

Dacă funcţia F are are derivate parţiale de ordinul trei continue, atunci funcţionala are diferenţială de ordinul doi în sensul lui Frechet a cărei expresie coincide cu cea de sus.

Exemplul 16. Fie cazul unei funcţionale

$$I[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), ..., y_n'(x))dx,$$

definite pe o mulţime de n funcţii de o variabilă derivabile pe intervalul $[a, b]$:

$$M = \left\{ y_i(x), i = 1, 2, ..., n | y_i(x) \in C^1[a, b], y_i(a) = y_{ia}, y_i(b) = y_{ib} \right\},$$

funcţia F fiind definită într-un domeniu şi cu derivatele parţiale de ordinul doi continue în acel domeniu. In aceste condiţii funcţionala are variaţia de ordinul doi în $(y_{10}(x), y_{20}(x), ..., y_{n0}(x))$ dată de

$$\delta^2 I[y_{10}, ..., y_{n0}; \delta y_1, ..., \delta y_n] =$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{i,j=1}^{n} F''_{y_i y_j} \delta y_i \delta y_j + \sum_{i,j=1}^{n} F''_{y_i y_j'} \delta y_i \delta y_j' + \sum_{i,j=1}^{n} F''_{y_i' y_j'} \delta y_i' \delta y_j' \right] dx$$

unde derivatele parţiale ale funcţiei F sunt calculate în $(y_{10}(x), y_{20}(x), ..., y_{n0}(x))$. Dacă funcţia F are derivate parţiale de ordinul trei continue, atunci funcţionala are diferenţială de ordinul doi în sensul lui Frechet a cărei expresie coincide cu cea de sus.

Exemplul 17. Considerăm acum cazul unei funcţionale al cărui argument este o funcţie de două variabile definită pe un domeniu D din planul xOy

$$I[z(x, y)] = \iint_D F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y))dxdy$$

definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{z(x, y) | z(x, y) \in C^1(D), z(x, y)|_{\partial D} = dat\}.$$

Presupunând că funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue în raport cu toate argumentele sale într-un domeniu mărginit rezultă imediat că funcţionala are variaţia de ordinul doi dată de relaţia

$$\delta^2 I[z(x,y);\delta z(x,y)] = \iint\limits_D \left[F_{zz}(\delta z)^2 + F_{zz_x}\delta z \delta z_x + ... + F_{z_y z_y}(\delta z_y)^2\right] dxdy.$$

Dacă funcţia F are derivate parţiale de ordinul trei continue, atunci funcţionala are diferenţială de ordinul doi în sensul lui Frechet a cărei expresie coincide cu cea de sus.

11.9 Condiţii necesare de extremum

Cum orice extremum absolut este şi un extremum tare şi deci şi un extremum slab, rezultă că orice condiţie necesară de extremum slab va fi şi o condiţie necesară pentru extremum tare şi totodată condiţie necesară pentru extremum absolut. Exact ca în cazul extremelor funcţiilor de mai multe variabile avem următoarele teoreme:

Teorema 3. Dacă funcţia $y_0(x)$ realizează extremul funcţionalei $I[y(x)]$ atunci derivata sa de ordinul întâi $\delta I[y_0(x);\eta(x)]$ este nulă.

Teorema 4. Dacă funcţia $y_0(x)$ realizează minimul (maximul) funcţionalei $I[y(x)]$ atunci derivata sa de ordinul doi este pozitivă (negativă).

Avem şi o teoremă care dă condiţii suficiente de extremum.

Teorema 5. Dacă funcţia $y_0(x)$ este o extremală a funcţionalei $I[y(x)]$ şi dacă există constanta C astfel încât

$$\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)] > C||\eta(x)||_1^2$$

pentru orice

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\},$$

atunci funcţia $y_0(x)$ realizează minimul funcţionalei.

In adevăr, cum

$$I[y(x)+\eta(x)] - I[y(x)] = \frac{1}{2}\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)] + o(||\eta(x)||_1^2)$$

rezultă că fiind dat $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon)$ astfel încât pentru $||\eta(x)||_1 < \delta(\varepsilon)$ avem

$$I[y(x)+\eta(x)] - I[y(x)] = \frac{1}{2}\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)] + \theta\varepsilon||\eta(x)||_1^2 \quad cu \quad \theta \in [-1,1].$$

Atunci pentru $\varepsilon < \frac{C}{2}$ avem

$$I[y(x) + \eta(x)] - I[y(x)] \geq ||\eta(x)||_1^2 \left(\frac{C}{2} + \theta\varepsilon\right) > 0$$

pentru $\eta(x) \neq 0$.

Condiţia nu poate fi înlocuită cu condiţia mai slabă $\delta^2 I[y_0(x); \eta(x)] \geq 0$ cum se vede în cazul funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_0^1 y^2(x)(x - y(x))dx$$

pentru care funcţia identic nulă exte extremală, $\delta^2 I[0; \eta(x)] = \int_0^1 x\eta(x)^2 dx \geq 0$, dar funcţionala nu are extremum pentru că pentru o funcţie

$$y\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon - x & \textit{pentru} \quad x < \varepsilon \\ 0 & \textit{pentru} \quad x \geq \varepsilon \end{cases}$$

ia valori negative $I[y\varepsilon(x)] = -\frac{\varepsilon^4}{6}$. Din acest motiv această teoremă este greu de aplicat în practică.

In particular vom avea:

Teorema 6. Dacă funcţia $y_0(x)$ realizează extremul slab al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x) | y(x) \in C^1[a, b], y(a) = y_1, y(b) = y_2\}$$

atunci variaţia întâia a funcţionalei este nulă $\delta I[y_0(x); \eta(x)]$ pentru orice funcţie

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x) | \eta(x) \in C^1[a, b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}.$$

Altfel spus, dacă funcţia F are derivate parţiale de ordinul întâi continue atunci are loc relaţia

$$\delta I[y_0(x); \eta(x)] = \int_a^b [F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x) + F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\eta'(x)]dx = 0,$$

pentru orice funcţie

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x) | \eta(x) \in C^1[a, b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}.$$

Dacă funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue şi dacă funcţiile admisibile sunt cu derivată de ordinul doi atunci are loc relaţia

$$\delta I[y_0(x);\eta(x)] = \int\limits_a^b \left[F_y(x,y_0(x),y_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\right]\eta(x)dx = 0$$

pentru orice funcţie

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}.$$

Această condiţie este numai necesară pentru realizarea extremului, nu şi suficientă.

Definiţia 7. Dacă pentru funcţia $y_0(x)$ prima derivată a funcţionalei este nulă $\delta I[y_0(x);\eta(x)] = 0$ pentru orice variaţie

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}$$

se spune că *funcţionala este staţionară de-a lungul lui* $y_0(x)$.

Teorema 7. Dacă funcţia $y_0(x)$ realizează minimul (maximul) slab al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_1, y(b) = y_2\}$$

atunci derivata a doua a funcţionalei este pozitivă (negativă)

$$\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)] \geq 0 (\leq 0)$$

pentru orice funcţie

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}.$$

Deci dacă funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue, atunci

$$\delta^2 I[y_0;\eta] = \int_a^b \left\{F_{yy}(x,y_0,y_0')\eta^2 + 2F_{yy'}(x,y_0,y_0')\eta\eta' + F_{y'y'}(x,y_0,y_0')\eta'^2\right\} dx \geq 0 (\leq 0)$$

pentru orice funcţie

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}.$$

Teoreme de genul celor de mai sus au loc evident şi în cazul celorlalte funcţionale din exemplele de mai sus.

11.10 Lemele fundamentale ale calculului variaţional

Condiţiile necesare de extremum slab stabilite mai sus conţin în enunţul lor funcţiile arbitrare $\eta(x)$ sau $\delta y(x)$. Pentru a stabili condiţii necesare de extremum slab care să conţină numai funcţiile care realizează extremul vom da în prealabil câteva propoziţii ajutătoare, cunoscute sub numele de *lemele fundamentale ale calculului variaţional.*

Lema 1. (*lema lui Lagrange, prima lemă fundamentală*) Fie funcţia continuă $f(x) \in C^0[a,b]$. Dacă $\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$ pentru orice funcţie $\eta(x) \in C^1[a,b]$ care verifică condiţiile $\eta(a) = \eta(b) = 0$, atunci $f(x) = 0$ pentru orice $x \in [a,b]$.(In loc de $C^1[a,b]$ poate fi $C^k[a,b]$, $k = 0,1,2,...)$.

Dacă f nu ar fi identic nulă în $[a,b]$ atunci ar exista un punct $c \in [a,b]$ unde $f(c) \neq 0$. In virtutea continuităţii lui f putem presupune că punctul c este punct interior intervalului. Dar atunci, tot în virtutea continuităţii, există un întreg interval (α,β) care îl conţine pe c şi unde funcţia nu se anulează, este de exemplu strict pozitivă. Dacă considerăm funcţia

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^2(x-\beta)^2, & x \in (\alpha,\beta), \\ 0, & x \notin (\alpha,\beta) \end{cases}$$

ea satisface condiţiile lemei şi avem

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = \int \alpha\beta f(x)(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx > 0$$

şi ajungem la o contradicţie cu ipoteza lemei.

O lemă asemănătoare avem în cazul funcţiilor de mai multe variabile:

Lema 2. (*lema lui Lagrange pentru funcţii de mai multe variabile*) Fie funcţia $f(x) \in C^0(\bar{D})$ unde D este un domeniu mărginit din R^n şi $\bar{D} = D \cup \partial D$ este închiderea sa. Dacă $\int\limits_D f(x)\eta(x)dx = 0$ pentru orice funcţie $\eta(x) \in C^1(\bar{D})$ care verifică condiţia $\eta(x)_{|\partial D} = 0$, atunci funcţia f este nulă în D.

Aici am notat prin x punctul $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ din R^n şi $dx = dx_1dx_2...dx_n$. Demonstraţia este identică celei de sus, în locul intervalului (α,β) luându-se vecinătatea $V_c = \{x|\, \|x-c\| < \alpha\}$ şi în locul funcţiei η funcţia

$$\eta(x) = \begin{cases} (\|x\|^2 - \alpha)^2, & x \in V_c \\ 0, & x \notin V_c \end{cases} .$$

Lema 3. (*lema lui Paul Du Bois Raymond*) Fie funcţia $g(x) \in C^0[a,b]$. Dacă $\int\limits_a^b g(x)\eta'(x)dx = 0$ pentru orice funcţie $\eta(x) \in C^1[a,b]$ care verifică condiţiile $\eta(a) = \eta(b) = 0$, atunci $g(x) =$*constant* în $[a,b]$.

Intr-adevăr, funcţia

$$\eta(x) = \int\limits_a^x g(t)dt - C(x-a)$$

aparţine lui $C^1[a,b]$, este nulă în a şi putem determina constanta

$$C = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(x)dx$$

astfel încât şi $\eta(b) = 0$. Dar atunci avem

$$\int\limits_a^b g(x)\eta'(x)dx = \int\limits_a^b g(x)(g(x)-C)dx =$$

$$= \int\limits_a^b [g(x)(g(x)-C) - C(g(x)-C)]dx =$$

$$= \int\limits_a^b (g(x)-C)^2 dx = 0$$

şi deci $g(x) = C \quad \forall x \in [a,b]$.

Lema 4. (*a doua lemă fundamentală*) Fie funcţiile $f(x), g(x) \in C^0[a,b]$. Dacă

$$\int\limits_a^b [f(x)\eta(x) + g(x)\eta'(x)]dx = 0$$

pentru orice funcţie $\eta(x) \in C^1[a,b]$ care verifică relaţiile $\eta(a) = \eta(b) = 0$, atunci funcţia g este derivabilă pe $[a,b]$ şi verifică relaţia $g'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Intr-adevăr, considerând funcţia $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \quad F'(x) = f(x)$, integrând prin părţi putem scrie

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = F(x)\eta(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b F(x)\eta'(x)dx = -\int\limits_a^b F(x)\eta'(x)dx.$$

Relaţia din lemă devine $\int\limits_a^b [g(x) - F(x)]\eta'(x)dx = 0$ şi după lema 3. rezultă că $g(x) = F(x) + C$. Cum membrul al doilea este o funcţie derivabilă, rezultă că şi membrul întâi este derivabil şi $g'(x) = f(x)$.

11.11 Ecuaţiile lui Euler-Lagrange

Fie $y_0(x)$ funcţia care realizează extremul slab al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_1, y(b) = y_2\}.$$

Atunci conform teoremei 6., dacă funcţia F are derivate parţiale de ordinul întâi continue, atunci are loc relaţia

$$\delta I[y_0(x); \eta(x)] = \int_a^b [F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x) + F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\eta'(x)]dx = 0,$$

pentru orice funcţie

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}.$$

Conform celei de a doua leme a calculului variaţional funcţia $F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ este derivabilă pe $[a,b]$ şi are derivata $F_y(x, y_0(x), y_0'(x))$, altfel spus are loc *ecuaţia lui Euler-Lagrange*:

$$\begin{aligned} &oricare \quad ar \quad fi \quad x \in [a,b] \\ &\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = F_y(x, y_0(x), y_0'(x)), \end{aligned}$$

sau *ecuaţia lui Euler-Lagrange sub formă integrală*

$$\begin{aligned} &există \quad C \quad astfel \quad încât \quad oricare \quad ar \quad fi \quad x \in [a,b] \\ &F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \int_a^x F_y(t, y_0(t), y_0'(t))dt + C \end{aligned}$$

Definiţia . Orice funcţie $y_0(x)$ care verifică ecuaţia lui Euler-Lagrange se numeşte *extremală* a funcţionalei $I[y(x)]$.

Teorema 8. Dacă $y_0(x)$ este funcţia care realizează extremul slab al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_1, y(b) = y_2\}$$

şi dacă funcţia F are derivate parţiale de ordinul întâi continue atunci ea este o extremală a funcţionalei care verifică la capetele intervalului condiţiile date.

Vom observa că dacă funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi şi dacă funcţia $y_0(x)$ are derivată de ordinul doi, prima din ecuaţiile lui Euler-Lagrange rezultă din a doua formă a variaţiei de ordinul întâi şi din lema fundamentală a calculului variaţional (lema lui Lagrange). In aceste condiţii, prima ecuaţie a lui Euler-Lagrange este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi:

$$F_{xy'}(x, y_0, y_0') + F_{yy'}(x, y_0, y_0')y_0' + F_{y'y'}(x, y_0, y_0')y_0'' - F_y(x, y_0, y_0') = 0.$$

Dacă funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue, folosind teorema funcţiilor implicite se poate arăta că în toate punctele în care $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \neq 0$ funcţia $y_0(x)$ admite derivate de ordinul doi şi verifică ecuaţia diferenţială de ordinul doi de mai sus.

Teorema 9. Dacă $y_0(x)$ este o extremală a funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_1, y(b) = y_2\}$$

şi dacă funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue, atunci în toate punctele în care $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \neq 0$ funcţia $y_0(x)$ are derivată de ordinul doi şi verifică ecuaţia lui Euler-Lagrange de ordinul doi:

$$F_{xy'}(x, y_0, y_0') + F_{yy'}(x, y_0, y_0')y_0' + F_{y'y'}(x, y_0, y_0')y_0'' - F_y(x, y_0, y_0') = 0.$$

Vom observa că la fel ca în cazul extremelor funcţiilor de mai multe variabile, ecuaţiile lui Euler-Lagrange reprezintă numai condiţii necesare pentru funcţia care realizează extremul funcţionalei. Cu alte cuvinte, funcţia care realizează extremul trebuie căutată printre funcţiile care verifică ecuaţiile lui Euler-Lagrange.

Repetăm, funcţiile care realizează extremul funcţionalei se caută printre extremalele funcţionalei; nu orice extremală realizează extremul funcţionalei, o extremală poate fi numai bănuită că ar putea realiza extremul.

De-a lungul unei extremale putem scrie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x,y_0(x),y_0'(x)) &= F_x(x,y_0,y_0')+F_y(x,y_0,y_0')y_0'+F_{y'}(x,y_0,y_0')y_0''= \\ &= F_x(x,y_0,y_0')+\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y_0,y_0')y_0'+F_{y'}(x,y_0,y_0')y_0''= \\ &= F_x(x,y_0,y_0')+\frac{d}{dx}\left(F_{y'}(x,y_0,y_0')y_0'\right)\end{aligned}$$

adică ecuaţiile lui Euler-Lagrange sunt echivalente şi cu ecuaţiile

$$oricare \quad fi \quad x\in[a,b]$$

$$\frac{d}{dx}\left(F(x,y_0(x),y_0'(x))-F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))y_0'(x)\right)=F_x(x,y_0(x),y_0'(x));$$

$$există \quad C \quad astfel \quad încât \quad oricare \quad ar \quad fi \quad x\in[a,b]$$

$$F(x,y_0(x),y_0'(x))-F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))y_0'(x)=\int\limits_a^x F_x(t,y_0(t),y_0'(t))dt+C.$$

Observăm că există situaţii când ordinul ecuaţiilor lui Euler-Lagrange se reduce cu o unitate, adică există *integrale prime*:

Teorema 10. Dacă funcţia F nu depinde de y, $F_y=0$, atunci ecuaţia lui Euler-Lagrange admite o integrala primă

$$există \quad C \quad astfel \quad încât \quad oricare \quad ar \quad fi \quad x\in[a,b]$$

$$F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))=C.$$

.Teorema 11. Dacă funcţia F nu depinde de x, $F_x=0$, atunci ecuaţia lui Euler-Lagrange admite o integrală primă

$$există \quad C \quad astfel \quad încât \quad oricare \quad ar \quad fi \quad x\in[a,b]$$

$$F(x, y_0(x), y_0'(x)) - F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))y_0'(x) = C.$$

Exemplul 17. Fie funcţionala

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

din problema geodezicelor în plan definită pe mulţimea

$$M = \left\{y(x) : [a, b] \to R | y(x) \in C^2[a, b], y(a) = y_a, y(b) = y_b\right\}.$$

Funcţia de sub integrală $F = \sqrt{1 + y'^2}$ nu depinde de y, deci vom avea integrala primă $F_{y'} = C$, adică $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$, sau renotând constanta, $y' = C$, de unde $y = Cx + C_1$. Constantele C, C_1 se determină din condiţiile $y(a) = y_a, y(b) = y_b$, adică extremala este segmentul de dreaptă care uneşte cele două puncte. In acest caz, ştim din geometrie că extremala chiar realizează minimul funcţionalei.

Exemplul 18. Fie funcţionala

$$I[y(x)] = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(h - y(x))}}dx$$

din problema brahistocronei definită pe mulţimea

$$M = \left\{y(x) : [0, b] \to R | y(x) \in C^2[0, b], y(0) = h, y(b) = 0\right\}.$$

Funcţia de sub integrală $F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(h-y)}}$ nu depinde de x deci vom avea integrala primă $F - y'F_{y'} = C$, adică, lăsând la o parte factorul constant $\sqrt{\frac{1}{2g}}$, $\sqrt{\frac{1+y'^2}{h-y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{(h-y)(1+y'^2)}} = C$, de unde $y = h - \frac{C}{1+y'^2}$. Punând $y' = \tan u$, avem $y = h - C\cos^2 u$. Din relaţia $dy = \tan u dx$ găsim $dx = 2C\cos^2 u = C(1 + \cos 2u)$ şi obţinem ecuaţiile parametrice ale extremalei

$$\begin{aligned} x &= C(u + \frac{1}{2}\sin 2u) + C_1 \\ y &= h - \frac{C}{2}(1 + \cos 2u) \end{aligned}$$

Extremala este un arc de cicloidă. Constantele C, C_1 se determină din condiţiile la capete $y(0) = h, y(b) = 0$.

Fie funcţionala

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(m)}(x))dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^{2m}[a,b], y^{(i)}(a) = y_{ia}, y^{(i)}(b) = y_{ib}, i = 0,1,...,m-1\}$$

şi unde presupunem că funcţia F are derivate parţiale de ordinul $2m$ în raport cu toate argumentele continue într-un domeniu din $\mathbf{R}^{m+2}$. Funcţia $y_0(x)$ este extremală a acestei funcţionale dacă satisface *ecuaţia lui Euler-Poisson*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + ... + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}F_{y^{(m)}} = 0.$$

Fie cazul unei funcţionale

$$I[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), ..., y_n'(x))dx,$$

definite pe o mulţime de n funcţii de o variabilă derivabile pe intervalul $[a,b]$:

$$M = \left\{y_i(x), i = 1,2,...,n|y_i(x) \in C^1[a,b], y_i(a) = y_{ia}, y_i(b) = y_{ib}\right\},$$

funcţia F fiind definită într-un domeniu şi cu derivatele parţiale de ordinul doi continue în acel domeniu. Funcţiile $y_{10}(x), y_{20}(x), ..., y_{n0}(x)$ constituie extremala acestei funcţionale dacă satisfac sistemul de ecuaţii ale lui Euler

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y_{i0}(x), y_{i0}'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'}(y_{i0}(x), y_{i0}'(x)) = 0, i = 1,2,...,n.$$

Dacă se introduc operatorii diferenţiali

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{pmatrix}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1'} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial y_n'} \end{pmatrix}$$

atunci acest sistem se scrie exact ca ecuaţia lui Euler pentru funcţionala $I[\mathbf{y}(x)] = \int_a^b F(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x))dx$:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0(x), \mathbf{y}_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}'}(\mathbf{y}_0(x), \mathbf{y}_0'(x)) = 0.$$

In cazul unei funcţionale al cărui argument este o funcţie de două variabile definită pe un domeniu D din planul xOy

$$I[z(x,y)] = \iint\limits_D F(x,y,z(x,y),z_x(x,y),z_y(x,y))dxdy$$

definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{z(x,y)|z(x,y) \in C^2(D), z(x,y)|_{\partial D} = dat\}$$

presupunând că funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue în raport cu toate argumentele sale într-un domeniu mărginit din expresia variaţiei de ordinul întâi rezultă că funcţia $z_0(x,y)$ este extremală a funcţionalei dacă ea verifică *ecuaţia lui Euler-Ostrogradski*

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_y} = 0.$$

11.12 Exerciţii

1. Să se determine extremalele următoarelor funcţionale cu condiţiile la capete date:

a) $I[y(x)] = \int\limits_1^2 (y'^2 - 2xy)dx; y(1) = 0, y(2) = -1.$

R. $y = \frac{x}{6}(1 - x^2).$

b) $I[y(x)] = \int\limits_1^3 (3x - y)ydx; y(1) = 1, y(3) = \frac{9}{2}.$

R. nu există extremală.

c) $I[y(x)] = \int\limits_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)dx; y(0) = 1, y(2\pi) = 1.$

R. o infinitate de extremale $y = \cos x + C\sin x$.

d) $I[y(x)] = \int\limits_{-1}^0 (12xy - y'^2)dx; y(-1) = 1, y(0) = 0.$

R. $y = -x^3.$

e) $I[y(x)] = \int\limits_0^1 yy'^2dx; y(0) = 1, y(1) = 4^{1/3}.$

R. două extremale $y = (x+1)^{2/3}, y = (3x-1)^{2/3}$.

f) $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x}dx; y(0) = 0, y(1) = e^{-1}.$

R. $y = \frac{1}{2}\left[e^{-x} + (1+e)xe^{-x} - 1\right].$

g) $I[y(x)] = \int\limits_{-1}^1 (y'^2 - 2xy)dx; y(-1) = -1, y(1) = 1.$

R. $y = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^3.$

h) $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 + 4y^2)dx; y(0) = e^2, y(1) = 1.$

R. $y = e^{2(1-x)}.$

i) $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (360x^2y - y''^2)dx; y(0) = 0, y'(0) = 1, y(1) = 0, y'(1) = 2.5.$

R. $y = \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + x.$

j) $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2)dx; y(0) = 0, y(1) = 0, y'(0) = 1, y'(1) = -\sinh 1.$

R. $y = (1 - x)\sinh x.$

k) $I[y(x)] = \int\limits_{-1}^0 (240y - y'''^2)dx; y(-1) = 1, y(0) = 0, y'(-1) = -4.5, y'(0) = 0,$
$y''(-1) = 16, y''(0) = 0.$

R. $y = \frac{x^3}{6}(x^3 + 6x + 1).$

l) $I[y(x)] = \frac{1}{2}\int_0^1 y''^2dx, y(0) = 0, y'(0) = 0, y'(1) = 1.$

R. $y = \frac{1}{2}x^2.$

m) $I[y(x), z(x)] = \int\limits_1^2 (y'^2 + z^2 + z'^2)dx; y(1) = 1, y(2) = 2, z(1) = 0, z(2) = 1.$

R. $y = x, z = \frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1}.$

n) $I[y(x), z(x)] = \int\limits_0 \pi(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)dx; y(0) = 0, y(\pi) = 1,$
$z(0) = 0, z(\pi) = -1.$

R. $y = C\sin x - \frac{x}{\pi}\cos x, z = C\sin x + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x), C$ *arbitrar*.

o) $I[y(x), z(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 - 2yz)dx; y(0) = 0, y(\pi/2) = 1,$
$z(0) = 0, z(\pi/2) = 1.$

R. $y = \sin x, z = \sin x.$

p) $I[y(x), z(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 + z'^2 + 2y)dx; y(0) = 1, y(1) = 3/2, z(0) = 1, z(1) = 1.$

R. $y = \frac{x^2}{2}, z = 1.$

2. Să se găsească extremala funcţionalei $I[z(x, y)] = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 e^{z_y}\sin z_y dxdy$ cu condiţiile $z(x, 0) = 0, z(x, 1) = 1.$

R. $z = y.$

11.13 Condiţii naturale, condiţii de transversalitate

Fie $y_0(x)$ funcţia care realizează extremul slab al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_1\},$$

adică numai capătul din stânga este fixat, capătul din dreapta putându-se mişca pe verticala $x = b$. Relativ la funcţia F, presupunem că are derivate parţiale de ordinul doi continue. Funcţia $y_0(x)$ este evident o extremală a funcţionalei $I[y(x)]$ pentru că ea realizează minimul acestei funcţionale pe mulţimea funcţiilor care au aceleaşi capete cu ea. Ea verifică deci ecuaţia lui Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0.$$

Vom avea prima variaţie

$$\begin{aligned} \delta I[y_0;\eta] &= \int\limits_a^b \left[F_y(x,y_0,y_0') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y_0,y_0')\right]\eta dx + \\ &+F_{y'}(x,y_0(b),y_0'(b))\eta(b). \end{aligned}$$

Cum $y_0(x)$ realizează extremul, trebuie să avem $\delta I[y_0;\eta] = 0$ pentru orice funcţie

$$\eta(x) \in M_0 = \left\{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) \quad arbitrar\right\}.$$

Cum primul termen este nul pentru că $y_0(x)$ este extremală, rezultă că în capătul mobil în mod necesar trebuie să aibă loc aşa numita *condiţie naturală*

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0.$$

Exemplu 18. Fie funcţionala care dă cea mai mică distanţă între punctul $A(a, y_a)$ şi dreapta $x = b$:

$$I[y(x)\} = \int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}dx.$$

Ştim că extremala este un segment de dreaptă $y = C_1x + C_2$. Condiţia naturală în capătul $x = b$ se scrie acum $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$, sau $y' = 0$,segmentul de dreaptă este perpendicular pe dreapta $x = b$.

Dacă în locul funcţionalei de mai sus am fi avut funcţionala

$$I[y(x)] = \int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx + \psi(y(b)),$$

ψ fiind o funcţie oarecare, atunci variaţia de ordinul întâi ar fi fost

$$\begin{aligned}\delta I[y_0;\eta] &= \int_a^b \left[F_y(x,y_0,y_0') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y_0,y_0')\right]\eta dx + \\ &+F_{y'}(x,y_0(b),y_0'(b))\eta(b) + \psi'(y_0(b)\eta(b)\end{aligned}$$

şi condiţia naturală ar fi fost

$$F_{y'}(b,y_0(b),y_0'(b)) + \psi'(y_0(b)) = 0.$$

Dacă luăm $\psi(y_0(b)) = K(y_0(b) - y_2)^2$ avem

$$F_{y'}(b,y_0(b),y_0'(b)) + K(y_0(b) - y_2) = 0$$

şi pentru $K \to \infty$ obţinem condiţia de capăt fix $y_0(b) = y_2$. Evident, putem vorbi şi de condiţii naturale în capătul din a.

Condiţiile naturale sunt importante în rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale sau cu derivate parţiale considerate ca ecuaţii Euler-Lagrange a unei anumite funcţionale. In acest caz nu trebuie să se ţină seamă în mod special de condiţiile naturale pentru că ele se realizează automat dacă se rezolvă direct problema de extremum.

Să considerăm acum problema mai generală a extremului slab al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

pe mulţimea funcţiilor

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^1[a,B], y(a) = y_1, y_c(b) = y(b), b \le B\}$$

adică pe mulţimea funcţiilor al căror grafic are capătul din stânga fixat, iar capătul din dreapta se poate deplasa pe o curbă cu ecuaţia explicită $y = y_c(x)$, $a \le x \le B$. Dacă $y_0(x)$ realizează acest extremum, evident ea este o extremală a funcţionalei, adică verifică ecuaţia Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0.$$

Ţinând cont că $y_0(x)$ este extremală rezultă

$$\delta I[y_0(x);\delta y(x)\} = \frac{\partial F}{\partial y'}(b,y_0(b),y_0'(b))\delta y(b) +$$

$$+\left(F(b,y_0(b),y_0'(b))-y_0'(b)\frac{\partial F}{\partial y'}(b,y_0(b),y_0'(b))\right)\delta b=0$$

Punctul $(b,y(b))$ aflându-se pe curba $y=y_c(x)$ avem $\delta y(b)=y_c'(b)\delta b$ şi deci vom avea condiţia

$$F(b,y_0(b),y_0'(b))-(y_0'(b)-y_c'(b))\,\frac{\partial F}{\partial y'}(b,y_0(b),y_0'(b))=0.$$

Dacă punctul $(b,y(b))$ se deplasează pe curba cu ecuaţia explicită $\tau(x,y)=0$ având în vedere relaţia

$$\frac{\delta y(b)}{\delta x(b)}=-\frac{\frac{\partial\tau}{\partial x}(b,y_0(b))}{\frac{\partial\tau}{\partial y}(b,y_0(b))}$$

vom avea condiţia

$$\frac{F(b,y_0(b),y_0'(b))-\frac{\partial F}{\partial y'}(b,y_0(b),y_0'(b))y_0'(b)}{\frac{\partial\tau}{\partial x}(b,y_0(b))}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y'}(b,y_0(b),y_0'(b))}{\frac{\partial\tau}{\partial y}(b,y_0(b))}.$$

Aceste condiţii se numesc *condiţii de transversalitate.* Ele trebuie verificate în capătul mobil. In cazul în care curba pe care se mişcă capătul din dreapta este $x=b$ regăsim condiţia naturală.

Exemplul 19. Fie funcţionala opticii geometrice în plan

$$I[y(x)]=\int_b^b\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{v(x,y(x))}dx.$$

Cum

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v},\quad F_{y'}=\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}},\quad F-y'F_{y'}=\frac{1}{v\sqrt{1+y'^2}}$$

condiţia de transversalitate devine

$$\frac{1}{v\sqrt{1+y'^2}\frac{\partial\tau}{\partial x}}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\frac{\partial\tau}{\partial y}}\quad sau\quad \frac{1}{\frac{\partial\tau}{\partial x}}=\frac{y'}{\frac{\partial\tau}{\partial y}},$$

adică extremalele şi curba $\tau(x,y)=0$ se taie ortogonal.

Să considerăm acum funcţionala

$$I[z(x,y)]=\iint_D F(x,y,z(x,y),p(x,y),q(x,y))dxdy+\int_{\partial_2 D}\psi(x,y,z)ds$$

funcţia F având derivate de ordinul doi continue, $p(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}, q(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}$. Funcţionala este definită pe mulţimea funcţiilor admisibile

$$M=\{z(x,y)|z(x,y)\in C^2(D),z(x,y)|_{\partial_1 D}=\varphi(x,y)|_{\partial_1 D}=dat\},$$

$\partial_1 D$ şi $\partial_2 D$ fiind două porţiuni complementare ale frontierei ∂D. Vom găsi după integrarea prin părţi şi aplicarea formulei flux divergenţă pentru variaţia de ordinul întâi expresia

$$\begin{aligned}\delta I[z;\delta z] &= \iint\limits_D [\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q}]\delta z dx dy + \\ &+ \int\limits_{\partial_2 D} [F_p n_x + F_q n_y]\,\delta z ds + \int\limits_{\partial_2 D} \psi_z \delta z ds.\end{aligned}$$

Variaţia $\delta z(x,y)$ fiind arbitrară, rezultă ecuaţia Euler-Ostrogradski

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

şi condiţia naturală

$$F_p n_x + F_q n_y + \psi_z(x,y,z) = 0 \quad pe \quad \partial_2 D.$$

Exemplu 20. In cazul funcţionalei

$$I[z(x,y)] = \frac{1}{2}\iint\limits_D \left(p^2 + q^2\right) dx dy - \int\limits_{\partial_2 D} \psi(x,y) z ds$$

definită pe mulţimea

$$M = \{z(x,y) | z(x,y) \in C^2(D), z(x,y)|_{\partial_1 D} = \varphi(x,y)|_{\partial_1 D} = dat\},$$

condiţia naturală este

$$p n_x + q n_y = \psi(x,y) \quad pe \quad \partial_2 D,$$

cu alte cuvinte, dacă vom rezolva (chiar aproximativ) problema de extremum pentru funcţionala de mai sus, vom avea soluţia (chiar aproximativă) pentru problema mixtă pentru funcţii armonice

$$\begin{aligned}\Delta z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \\ z(x,y)|_{\partial_1 D} &= \varphi(x,y)|_{\partial_1 D} = dat, \\ \frac{\partial z}{\partial n} &= p n_x + q n_y = \psi(x,y) = dat \quad pe \quad \partial_2 D.\end{aligned}$$

Aceasta este de fapt una din ideile de bază ale metodei elementelor finite pentru problema mixtă de mai sus: domeniul D se împarte în domenii mici numite elemente, se aproximează funcţia necunoscută pe fiecare element prin funcţii simple, de exemplu polinoame de grad mic în x, y, căutând să fie verificată condiţia pe porţiunea de frontieră $\partial_1 D$, funcţionala de mai sus devine o funcţie de mai multe variabile, pentru care găsirea extremului revine la rezolvarea unui sistem de ecuaţii lineare. Aproximarea funcţiei pe fiecare element se face în aşa fel încât matricea acestui sistem să fie cât mai rară.

11.14 Exerciţii

1. Să se găsească distanţa cea mai scurtă între parabola $y = x^2$ şi dreapta $x - y - 5 = 0$.

Ind. Problema revine la a găsi minimul funcţionalei $I[y(x)] = \int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$ cu condiţiile $y(a) = a^2$, $y(b) = b - 5$. Extremalele sunt dreptele $y = C_1 x + C_2$. Condiţiile la capete dau $C_1 a + C_2 = a^2, C_1 b + C_2 = b - 5$. Condiţiile de transversalitate dau

$$\begin{aligned} \sqrt{1+C_1^2} + (2a - C_1)\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} &= 0 \\ \sqrt{1+C_1^2} + (1 - C_1)\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Rezultă $C_1 = -1, C_2 = 3/4, a = 1/2, b = 23/8$. Deci extremala este $y = -x + 3/4$ şi distanţa este $\int\limits_{1/2}^{23/8} \sqrt{1+(-1)^2}dx = \frac{19\sqrt{2}}{8}$.

2. Să se găsească distanţa cea mai scurtă dintre punctul $A(1, 0)$ şi elipsa $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

R. $4/\sqrt{5}$.

3. Să se găsească distanţa cea mai scurtă de la punctul $A(1, 1, 1)$ la sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

R. $\sqrt{3} - 1$.

4. Să se găsească distanţa cea mai scurtă între suprafeţele $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 1$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

11.15 Variabile canonice, sistem canonic

Considerăm funcţionala

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))dx.$$

Ecuaţia lui Euler a extremalelor

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi care se poate reduce la un sistem de 2 ecuaţii de ordinul întâi în diferite moduri, cel mai simplu în y şi y'. Amintindu-ne forma generală a variaţiei de ordinul întâi

$$\delta I[y(x); \delta y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') \right\} \delta y(x) dx +$$

$$+ \left[\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\delta y(x) - H(x, y_0(x), y_0'(x)\delta x \right]_{x_1}^{x_2}$$

să notăm

$$p = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}$$

şi să presupunem că

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} \neq 0,$$

deci se poate explicita y' în funcţie de x, y, p:

$$y' = y'(x, y, p).$$

Funcţia lui Hamilton devine funcţie numai de x, y, p

$$H(x, y, p) = y'(x, y, p)p - F(x, y, p).$$

Putem scrie

$$\frac{\partial H}{\partial y} = p\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = y' + p\frac{\partial y'}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial p} = y'$$

De-a lungul extremalelor p este o funcţie de x pentru care putem scrie

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

In locul ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi a lui Euler am obţinut un sistem de 2 ecuaţii de ordinul întâi în variabilele y, p numite *variabile canonice*. Sistemul obţinut

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned}$$

se numeşte *sistemul canonic al lui Hamilton al extremalelor*. Vom observa că putem considera că lagrangeanul funcţionalei devine funcţie de x, y, y', p dat de relaţia $F = y'p - H(x, y, p)$ şi că sistemul canonic poate fi considerat ca sistem de ecuaţii ale lui Euler pentru funcţionala

$$I[y(x), p(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (y'p - H(x, y, p))dx.$$

Pe de altă parte de-a lungul extremalelor avem $F = p\frac{\partial H}{\partial p} - H$.

11.16 Exerciţii

Să se scrie sistemul canonic al extremalelor pentru funcţionalele:

a) $I[y(x)] = \int_a^b xyy'^3 dx$.

Ind. Cum $F = xyy'^3$, $F_{y'} = 3xyy'^2$ punând $p = 3xyy'^2$ rezultă $y' = \pm\sqrt{\frac{p}{3xy}}$

şi $H = [-F + y'F_{y'}]_{y'=\pm\sqrt{\frac{p}{3xy}}} = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{p^3}{xy}}$ şi se obţin două sisteme

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{p}{3xy}} \\ \frac{dp}{dx} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{p^3}{3xy^3}} \end{cases}$$

semnele corespunzându-se.

b) $I[y(x)] = \int_a^b xy\sqrt{y'}dx$.

R. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{4p^2}, \frac{dp}{dx} = \frac{x^2y}{2p}$.

c) $I[y(x)] = \int_a^b xyy'^2 dx$.

R. $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2xy}, \frac{dp}{dx} = \frac{p^2}{4xy^2}$.

d) $I[y(x)] = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}dx$.

R. $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}, \frac{dp}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}$.

e) $I[y_1(x), y_2(x)] = \int\limits_0 \pi(2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2)dx.$

Ind. $F = 2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2$, $F_{y_1'} = p_1 = 2y_1'$, $F_{y_2'} = p_2 = -2y_2'$, $H = -F + y_1'F_{y_1'} + y_2'F_{y_2'} = 2y_1^2 - 2y_1y_2 + \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_2^2}{4}$. Rezultă sistemul canonic

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{p_1}{2}, \frac{dy_2}{dx} = -\frac{p_2}{2}, \\ \frac{dp_1}{dx} &= -4y_1 + 2y_2, \frac{dp_2}{dx} = 2y_1. \end{aligned}$$

f) $I[y_1(x), y_2(x)] = \int\limits_1^2 (y_1'^2 + y_2^2 + y_2'^2)dx.$

R. $\frac{dy_1}{dx} = \frac{p_1}{2}, \frac{dp_1}{dx} = 0, \frac{dy_2}{dx} = \frac{p_2}{2}, \frac{dp_2}{dx} = 2y_2.$

11.17 Ecuaţia lui Hamilton-Iacobi

Soluţia generală a sistemului canonic va depinde de 2 constante arbitrare. Prin fiecare punct al domeniului plan în care este definită funcţia F şi în care are loc teorema de existenţă şi unicitate pentru sistemul canonic, putem duce un fascicul de extremale atribuind derivatei y' valori arbitrare. Un astfel de fascicul reprezintă o familie de curbe depinzând de o constantă arbitrară, valoarea derivatei y'. In general, vom numi *familie de extremale* o mulţime de soluţii ale ecuaţiei lui Euler care depind de o constantă arbitrară şi care umplu fără intersecţii o porţiune din plan în aşa fel încât prin fiecare punct al acestei porţiuni să treacă o extremală şi numai una. In prezenţa unei asemenea familii de extremale în fiecare punct de coordonate (x, y) al porţiunii de plan obţinem pentru y' şi deci şi pentru p valori determinate $m(x, y)$, respectiv $p(x, y)$. Funcţia $m(x, y)$ este *panta* familiei de extremale, iar $p(x, y)$ se numeşte *funcţia impuls a familiei de extremale.* Motivaţia celei de a doua denumiri va reieşi mai târziu. Cum funcţiile $y(x)$, $p(x, y(x))$ trebuie să verifice sistemul canonic vom avea

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}y' = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Cum $y' = \frac{\partial H}{\partial p}$ rezultă că funcţia impuls a familiei de extremale $p(x, y)$ verifică ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Invers, dacă o funcţie oarecare $p(x, y)$ verifică această ecuaţie, atunci există o familie de extremale pentru care ea este funcţia impuls a familiei. In adevăr dacă $p(x, y)$ verifică această ecuaţie, înlocuind-o în membrul drept al primei ecuaţii a sistemului canonic obţinem o ecuaţie diferenţială din care scoatem pe y ca funcţie de x şi de o constantă $y = y(x, C)$. Prin fiecare punct al domeniului trece una din curbe şi numai una. Inlocuind aceasta în p obţinem funcţia $p(x, C) = p(x, y(x, C))$ depinzând şi ea de constanta C. Avem

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} y' = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Deci $y = y(x, C)$ reprezintă o familie de extremale, adică umplu fără intersecţii o porţiune a planului, $p(x, y)$ reprezintă funcţia impuls a acestei familii.

Dacă notăm prin C graficul unei funcţii $y = y(x), x_1 \leq x \leq x_2$ vom numi *I-lungime a lui* C valoarea funcţionalei $I(C) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))dx$. In problema de optică geometrică $I(C)$ reprezintă timpul în care lumina parcurge graficul C. Sa considerăm fascicolul de extremale ieşind dintr-un punct dat $M_1(x_1, y_1)$ şi să presupunem că acest fascicol formează o familie într-o vecinătate a lui M_1. Pe fiecare extremală considerăm punctul $M(x, y)$ astfel încât I-lungimea arcului M_1M să aibă o valoare dată ρ. Locul geometric al punctelor $M(x, y)$ va fi o curbă pe care o vom numi *I-cercul de centru* $M_1(x, y)$ şi de rază ρ. In cazul problemei de optică geometrică extremalele sunt curbele după care se deplasează lumina, deci razele în cazul mediului omogen, iar I-cercul reprezintă frontul de undă la momentul ρ al sursei din punctul M_1, chiar un cerc cu centrul în M_1 de rază ρ în cazul mediului omogen.

Funcţionala rămânând constantă ρ când punctul M se deplasează pe I-cercul de rază ρ vom avea

$$\delta I = 0 = [-H\delta x + p\delta y]_{x_1}^{x} = -H\delta x + p\delta y$$

$\delta x, \delta y$ fiind deplasările lui M pe I-cerc. Asta înseamnă că extremalele familiei taie I-cercul transversal. In cazul problemei de optică geometrică transversalitatea este tot una cu ortogonalitatea.

Dacă $M(x, y)$ este un punct dintr-o vecinătate a lui M_1 avem o extremală care uneşte pe M_1 cu M. Valoarea integralei de-a lungul arcului de extremală M_1M este o funcţie de punctul M deci de x, y, $S(x, y)$. I-cercul cu centrul în M_1 de rază ρ are ecuaţia $S(x, y) = \rho$. In mod tradiţional, se spune că familia de extremale ieşind din M_1 formează un *câmp central de extremale*, I-cercurile sunt *curbele transversale* ale acestui câmp, iar funcţia $S(x, y)$ este *funcţia fundamentală* a câmpului.

Fie acum o curbă oarecare C_0 în plan. In fiecare punct al acestei curbe, condiţia de transversalitate determină valori unice pentru derivata y' şi deci pentru p. Luând aceste valori ca iniţiale putem face ca din fiecare punct al lui C_0 să plece o extremală care să taie transversal curba C_0. Dacă luăm pe fiecare extremală care pleacă din punctul M_0 al curbei C_0 un punct $M(x, y)$ astfel ca valoarea integralei pe arcul M_0M $S(x, y)$să fie egală cu o valoare ρ obţinem o curbă C, locul geometric al punctelor M. Se verifică uşor că şi această curbă este tăiată transversal de extremale. Evident curba C are ecuaţia $S(x, y) = \rho$, în timp ce curba C_0 are ecuaţia $S(x, y) = 0$. Curba C şi I-cercul de rază ρ al punctului M_0 sunt tangente în punctul corespunzător $M(x, y)$ în virtutea unicităţii extremalei care pleacă transvesal la C_0 din M_0. Deci curba C este înfăşurătoarea I-cercurilor de rază ρ ale punctelor curbei C_0. In cazul problemei opticii geometrice acesta este *principiul lui Huygens*: frontul de undă la momentul ρ al unor surse de pe C_0 este înfăşurătoarea fronturilor de undă la momentul ρ ale surselor de pe C_0.

In fiecare punct al curbei transvesale C coeficienţii de pe lângă $\delta x, \delta y$ din condiţia de transversalitate sunt proporţionali cu componentele normalei la curbă, deci cu derivatele parţiale ale lui $S(x, y)$. Este important că avem nu numai o proporţionalitate, ci chiar egalităţi

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -H(x, y, p), \frac{\partial S}{\partial y} = p$$

cum rezultă din expresia generală a variaţiei de ordinul întâi a funcţionalei: la o deplasare $\delta x, \delta y$ oarecare a punctului $M(x, y)$ în plan

$$\delta S = -H(x, y, p)\delta x + p\delta y.$$

Rezultă că funcţia fundamentală a câmpului de extremale verifică ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}) = 0$$

numită *ecuaţia lui Hamilton-Iacobi.*

Să arătăm că şi orice soluţie $S^{(0)}(x, y)$ a ecuaţiei Hamilton-Iacobi este funcţia fundamentală a unui câmp. In adevăr, definim funcţia

$$p^{(0)}(x, y) = \frac{\partial S^{(0)}}{\partial y}.$$

Dacă derivăm în raport cu y relaţia

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial S^{(0)}}{\partial y}) = 0$$

obţinem

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial y} = 0$$

Dar atunci, aşa cum am văzut, $p^{(0)}(x, y)$ este funcţia impuls a unei familii de extremale. In virtutea relaţiilor

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial x} = -H, \frac{\partial S^{(0)}}{\partial y} = p^{(0)}$$

rezultă că $-Hdx+p^{(0)}dy$ este diferenţiala totală a funcţiei $S^{(0)}$, adică curbele $S^{(0)}(x, y) = C$ reprezintă o familie de curbe transversale pentru extremale şi deci familia formează un câmp pentru care $S^{(0)}(x, y)$ este funcţia fundamentală.

In cele de mai sus am exprimat derivatele parţiale şi diferenţiala funcţiei S prin funcţia lui Hamilton $H(x, y, p(x, y))$ şi prin funcţia impuls $p(x, y)$ a câmpului. Le putem exprima prin funcţia $F(x, y, m(x, y))$ şi prin panta câmpului $m(x, y)$:

$$dS = [F(x, y, m(x, y)) - m(x, y)F_{y'}(x, y, m(x, y))]\, dx + F_{y'}(x, y, m(x, y))dy.$$

Vom folosi mai târziu această expresie.

Exemplul 21. In cazul opticii geometrice în plan funcţionala este

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx$$

Variabila canonică p şi funcţia lui Hamilton se determină din relaţiile

$$\begin{aligned} p &= \frac{y'}{v\sqrt{1 + y'^2}} \\ H &= \frac{y'^2}{v\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} = -\frac{1}{v\sqrt{1 + y'^2}} = -\sqrt{\frac{1}{v^2} - p^2} \end{aligned}$$

Ecuaţiile canonice sunt

$$\begin{aligned} y' &= \frac{p}{\sqrt{\frac{1}{v^2} - p^2}} \\ p' &= 0. \end{aligned}$$

Ecuaţia Hamilton-Iacobi este

$$\frac{\partial S}{\partial x} - \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{\partial S}{\partial y}^2} = 0$$

sau

$$\frac{\partial S}{\partial x}^2 + \frac{\partial S}{\partial y}^2 = \frac{1}{v^2}.$$

Când planul este omogen, $v = k$, şi extremalele sunt linii drepte. Ele formează un câmp dacă şi numai dacă sunt normale la curba C_0. Celelalte curbe transversale C se obţin luând de-a lungul normalelor segmente egale, adică se confirmă principiul lui Huygens.

11.18 Teorema lui Iacobi

Dacă integrăm sistemul canonic, putem construi diferite câmpuri corespunzătoare unei probleme variaţionale date şi prin acestea putem găsi orice soluţie a ecuaţiei Hamilton-Iacobi. Invers, dacă cunoaştem aşa numita *integrală completă* a ecuaţiei Hamilton-Iacobi putem integra sistemul canonic.

Numim *integrală completă* a ecuaţiei Hamilton-Iacobi o soluţie a sa care în afara unei constante aditive a mai conţine o constantă arbitrară $C_1 : S = S(x, y, C_1) + a$ cu condiţia ca $\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial C_1} \neq 0$.

Are loc

Teorema 11. *(Teorema lui Iacobi)*: Dacă $S = S(x, y, C_1)+a$ este o integrală completă a ecuaţiei Hamilton-Iacobi, atunci prin relaţiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial C_1} &= C_2, \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= p, \end{aligned}$$

unde C_1, C_2 sunt constante arbitrare, obţinem soluţia generală a sistemului canonic.

Cum $\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial C_1} \neq 0$, din ecuaţia $\frac{\partial S}{\partial C_1} = C_2$ putem exprima pe y ca funcţie de x, C_1, C_2 : $y = y(x, C_1, C_2)$. Inlocuind în $\frac{\partial S}{\partial y} = p$ obţinem $p = p(x, C_1, C_2)$. Derivând $\frac{\partial S}{\partial C_1} = C_2$ în raport cu x avem

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial C_1} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial C_1} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Derivând relaţia

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}) = 0$$

în raport cu C_1 avem

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial C_1} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial C_1} = 0.$$

Prin scădere avem

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial C_1}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\partial H}{\partial p}\right) = 0,$$

adică prima ecuaţie a sistemului canonic.Derivând $\frac{\partial S}{\partial y} = p$ în raport cu x şi $\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}) = 0$ în raport cu y avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} y' &= \frac{dp}{dx}, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Prin scădere avem

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} y' - \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Cum

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p}$$

rezultă

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

adică a doua ecuaţie a sistemului canonic.

Vedem că orice câmp al unei probleme de extremale poate fi descris fie prin extremalele propriu-zise, fie prin curbele transversale ale câmpului.

Exemplul 22. In cazul mediului omogen în problema opticii geometrice ecuaţia Hamilton-Iacobi este

$$\frac{\partial S}{\partial x}^2 + \frac{\partial S}{\partial y}^2 = \frac{1}{v^2}$$

cu $v = \textit{constant}$. Căutăm soluţia cu variabile separate

$$S = f(x) + f(y).$$

Obţinem

$$f'(x)^2 + f'(y)^2 = \frac{1}{v^2}$$

de unde

$$f'(x) = \frac{1}{v}\cos C_1, f'(y) = \frac{1}{v}\sin C_1$$

şi obţinem soluţia completă

$$S = \frac{1}{v} x \cos C_1 + \frac{1}{v} y \sin C_1.$$

Pentru obţinerea extremalelor scriem

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial C_1} &= C_2, \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= p, \end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned} -\frac{1}{v} x \sin C_1 + \frac{1}{v} y \cos C_1 &= C_2 \\ \frac{1}{v} \sin C_1 &= p. \end{aligned}$$

Curbele transversale şi extremalele sunt două familii de drepte ortogonale între ele.

Pentru cazul funcţionalelor depinzând de n funcţii $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ şi de derivatele lor modificările sunt evidente.

11.19 Exerciţii

Folosind integrala completă a ecuaţiei Hamilton-Iacobi să se determine extremalele funcţionalelor:

a) $I[y(x)] = \int\limits_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2} dx.$

Ind. Funcţia lui Hamilton este $H = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}$. Ecuaţia lui Hamilton-Iacobi este

$$\frac{\partial S}{\partial x} - \sqrt{x^2 + y^2 - \frac{\partial S}{\partial y}^2} = 0$$

sau

$$\frac{\partial S}{\partial x}^2 + \frac{\partial S}{\partial y}^2 = x^2 + y^2$$

Prin metoda separării variabilelor se găseşte

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - C} - \frac{C}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - C} \right| + \frac{1}{2} y \sqrt{y^2 + C} + \\ &\quad + \frac{C}{2} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + C} \right| + a \end{aligned}$$

Prin teorema lui Iacobi trebuie să scriem $\frac{\partial S}{\partial C} = C_1$ adică după reduceri

$$\ln\left|\frac{y+\sqrt{y^2+C}}{x+\sqrt{x^2-C}}\right| = 2C_2$$

sau antilogaritmând si renotând constanta

$$x^2 - \frac{1-C_2}{C_2}xy - y^2 = C\left(\frac{A^2+1}{2A}\right)^2$$

adică o familie de hiperbole.

b) $I[y(x)] = \int\limits_a^b xy\sqrt{y'}dx.$

R. $y = C_1x^3 + C_2.$

c) $I[y(x)] = \int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx.$

R. $x = C_1 \ln\left|y + \sqrt{y^2 - C_1^2}\right| + C_2.$

11.20 Extreme pentru funcţii netede pe porţiuni

Considerăm funcţionala

$$I[y(x)] = \int_{-1}^{1} y^2(1-y')^2dx$$

cu condiţiile la capete $y(-1) = 0, y(1) = 1$. Observăm că oricare ar fi funcţiile admisibile $I[y(x)] \geqq 0$, egalitatea atingându-se numai pentru funcţia $y(x) \equiv 0$ peste tot nulă; atunci nu mai pot fi satisfăcute condiţiile la capete. Deci problema minimizării funcţionalei în clasa funcţiilor netede nu are soluţie. Vom observa că totuşi pentru funcţia

$$y(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in [-1,0] \\ x & pentru \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

avem $I[y(x)] = 0$, adică minimul este atins pentru o funcţie netedă pe porţiuni. In unele situaţii va trebui să căutăm extremele unei funcţionale pe o mulţime de funcţii netede pe porţiuni. Cum pentru orice funcţie netedă pe porţiuni $f(x)$ funcţionează formula lui Leibniz-Newton $f(x) - f(a) = \int\limits_a^x f'(t)dt$ şi $\int\limits_a^b f'(t)^2dt = 0$ implică $f(t) = const$ pe $[a, b]$, aplicarea celei de a doua leme a calculului variaţional conduce la faptul că din anularea primei variaţii a funcţionalei pentru orice direcţie prin $y_0(x)$ netedă pe porţiuni, rezultă că au loc ecuaţiile lui Euler-Lagrange sub forma

$$există \quad C \quad astfel \quad încât \quad oricare \quad ar \quad fi \quad x \in [a,b]$$

$$F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))=\int\limits_a^x F_y(t,y_0(t),y_0'(t))dt+C;$$

$$exist\breve{a} \quad C \quad astfel \quad \hat{i}nc\hat{a}t \quad oricare \quad ar \quad fi \quad x\in[a,b]$$

$$F(x,y_0(x),y_0'(x))-F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))y_0'(x)=\int\limits_a^x F_x(t,y_0(t),y_0'(t))dt+C.$$

Cum orice funcţie de forma $\int\limits_a^x \varphi(t)dt$ cu $\varphi(t)$ continuă pe porţiuni este continuă rezultă că în orice punct unghiular x_0 al lui $y_0(x)$ funcţiile

$$F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x)),F(x,y_0(x),y_0'(x))-F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))y_0'(x)$$

sunt continue, adică saltul lor în x_0 este nul:

$$\left[F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\right]_{x_0}=0$$

$$\left[F(x,y_0(x),y_0'(x))-F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))y_0'(x)\right]_{x_0}=0$$

Acestea sunt *condiţiile necesare ale lui Weirstrass-Erdman în punctele unghiulare ale extremalelor continue pe porţiuni.* Vom reţine că în membrii stângi al acestor relaţii apar aceleaşi expresii din forma generală a variaţiei funcţionalei. De altfel puteam deduce aceste relaţii despărţind integrala prin punctul x_0 în două integrale şi scriind că variaţia este nulă. Să mai notăm că puncte unghiulare pot fi numai punctele x_0 în care $F_{y'y'}(x_0,y_0(x_0),y_0'(x_0))=0$ pentru că în punctele în care $F_{y'y'}(x_0,y_0(x_0),y_0'(x_0))\neq 0$, $y_0(x)$ are neapărat derivată continuă.

In exemplul cu care am început $F_{y'y'}=-2y^2$, deci puncte unghiulare pentru extremale pot fi numai cele unde $y(x)$ se anulează.

11.21 Exerciţii

Să se determine extremalele cu un punct de discontinuitate pentru prima derivată pentru funcţionalele:

a) $I[y(x)]=\int\limits_0^2(y'^4-6y'^2)dx, y(0)=0, y(2)=0.$

Ind. Cum $F_{y'y'} = 12y'^2 - 12$ se poate anula există extremale cu puncte de discontinuitaate pentru prima derivată. Extremalele fiind de forma $y = C_1x + C_2$ căutăm extremala cu un punct c de discontinuitate sub forma

$$y = \begin{cases} m_-x + n_- & pentru \quad 0 \leq x \leq c \\ m_+x + n_+ & pentru \quad c \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Din condiţiile la capete găsim

$$y = \begin{cases} m_-x & pentru \quad 0 \leq x \leq c \\ m_+(x-2) & pentru \quad c \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Condiţia de continuitate dă $m_-c = m_+(c-2)$. Condiţiile Weirstrass-Erdman dau

$$\begin{aligned} [F_{y'}]_c &= 4m_-^3 - 12m_- - 12m_+^3 + 12m_+ = 0 \\ [F - y'F_{y'}]_c &= -3m_-^4 + 6m_-^2 + 3m_+^4 - 6m_+^2 = 0 \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} (m_- - m_+)(m_-^2 + m_-m_+ + m_+^2 - 3) &= 0 \\ (m_-^2 - m_+^2)(m_-^2 + m_+^2 - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Rămând de rezolvat sistemele

$$\begin{aligned} m_- + m_+ &= 0 \\ m_-^2 + m_-m_+ + m_+^2 &= 3 \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} m_-^2 + m_+^2 &= 2 \\ m_-^2 + m_-m_+ + m_+^2 &= 3 \end{aligned}$$

care au soluţile$m_- = \sqrt{3}, m_+ = -\sqrt{3}$ şi $m_- = -\sqrt{3}, m_+ = \sqrt{3}$. In ambele cazuri rezultă $c = 1$. Există deci două extremale care au un punct de discontinuitate pentru prima derivată

$$y = \begin{cases} \sqrt{3}x & pentru \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{3}(x-2) & pentru \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

şi

$$y = \begin{cases} -\sqrt{3}x & pentru \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{3}(x-2) & pentru \quad 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

b) $I[y(x)] = \int\limits_0^4 (y'-1)^2(y'+1)^2 dx, y(0) = 0, y(4) = 2.$

R. $y = \begin{cases} -x & pentru \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & pentru \quad 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ şi $y = \begin{cases} x & pentru \quad 0 \leq x \leq 3 \\ -x+6 & pentru \quad 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$

c) $I[y(x)] = \int\limits_{x_1}^{x_2} (y'^2 + 2xy - y^2) dx, y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2.$

R. nu există extremale cu prima derivată discontinuă.

11.22 Condiţiile necesare ale lui Legendre şi Iacobi

Fie $y_0(x)$ funcţia care realizează minimul slab al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

pe mulţimea

$$M = \{y(x) | y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$$

în ipoteza că funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue. Oricare ar fi funcţia direcţie

$$\eta(x) \in M_0 = \{\eta(x) | \eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\},$$

funcţia $\Phi(t) = I[y(x) + t\eta(x)]$ are un minim pentru $t = 0$ şi avem condiţiile necesare

$$\Phi'(0) = \delta I[y_0(x); \eta(x)] = 0, \Phi''(0) = \delta^2 I[y_0(x); \eta(x) \geq 0.$$

Să ne ocupăm de a doua condiţie. O putem scrie sub forma

$$\delta^2 I[y_0(x); \eta(x)] =$$

$$= \int_a^b \left\{ F_{yy}(x, y_0, y_0')\eta^2 + 2F_{yy'}(x, y_0, y_0')\eta\eta' + F_{y'y'}(x, y_0, y_0')\eta'^2 \right\} \geq 0,$$

$$oricare \quad ar \quad fi \quad \eta(x) \in M_0 = \{\eta(x) | \eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}.$$

Integrând al doilea termen prin părţi, putem scrie

$$\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)] =$$
$$= \int_a^b \left\{ \left[F_{yy}(x,y_0,y_0') - \frac{d}{dx}F_{yy'}(x,y_0,y_0') \right] \eta^2 + F_{y'y'}(x,y_0,y_0')\eta'^2 \right\} \geq 0,$$
$$oricare \quad ar \quad fi \quad \eta(x) \in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}.$$

sau cu notaţii evidente

$$\begin{aligned} \delta^2 I[y_0(x);\eta(x)] &= \int_a^b P(x)\eta(x)^2 + Q(x)\eta'(x)^2 \geq 0, \\ oricare \quad ar \quad fi \quad \eta(x) &\in M_0 = \{\eta(x)|\eta(x) \in C^1[a,b], \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\}. \end{aligned}$$

Să presupunem că există un punct $x_0 \in (a,b)$ astfel încât $Q(x_0) = -2q < 0$. Atunci există o întreagă vecinătate (α,β) a lui x_0 pe care $Q(x) < -q$. Atunci luând direcţia

$$\eta(x) = \begin{cases} \sin^2 \pi\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \quad pentru \quad x \in (\alpha,\beta) \\ 0 \quad pentru \quad x \notin (\alpha,\beta) \end{cases}$$

avem cu notaţii evidente

$$\begin{aligned} \delta^2 I[y_0(x);\eta(x)] &\leq M \int \alpha\beta \sin^4 \pi\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}dx - q\frac{\pi^2}{(\beta-\alpha)^2} \int \alpha\beta \sin^2 2\pi\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}dx = \\ &= M\frac{\beta-\alpha}{\pi} \int_0^1 \sin^4 tdt - q\frac{\pi}{\beta-\alpha} \int_0^1 \sin^2 2tdt \end{aligned}$$

Ori se vede că dacă $\beta - \alpha \to 0$, ultimul termen tinde către minus infinit, contradicţie cu ipoteza. Am demonstrat

Teorema 13. *(Condiţia lui Legendre)* Dacă $y_0(x)$ este funcţia care realizează minimul (maximul) funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

pe mulţimea

$$M = \{y(x)|y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$$

în ipoteza că funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue, atunci

$$oricare \quad ar \quad fi \quad x \in [a,b] \quad F_{y'y'}(x,y_0(x),y_0'(x)) \geq 0 (\leq 0).$$

Direcţia $\eta(x)$ pentru care variaţia de ordinul doi se anulează când $y_0(x)$ realizează minimul funcţionalei $I[y(x)]$ este extremală a variaţiei de ordinul al doilea $\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)]$ considerată ca funcţională de $\eta(x)$. Ea verifică ecuaţia Euler-Lagrange a acestei funcţionale:

$$\frac{d}{dx}\left\{F_{yy'}(x,y_0,y_0')\eta + F_{y'y'}(x,y_0,y_0')\eta'\right\} -$$

$$-\left\{F_{yy}(x,y_0,y_0')\eta + F_{yy'}(x,y_0,y_0')\eta'\right\} = 0$$

Definiţia 8. Ecuaţia Euler-Lagrange a variaţiei de ordinul doi ca funcţională de direcţie se numeşte *ecuaţia lui Iacobi pentru funcţionala iniţială.*

Vom observa că ecuaţia lui Iacobi este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi lineară şi omogenă şi dacă o direcţie $\eta(x)$ satisface ecuaţia lui Iacobi şi dacă $\eta(a) = \eta'(a) = 0$, atunci ea este identic nulă pe tot intervalul.

Definiţia 9. Două puncte $x_1 < x_2$ de pe o extremală a funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

se numesc *conjugate* dacă ecuaţia lui Iacobi admite o soluţie $\eta(x)$ astfel încât $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, dar $\eta(x)$ nu este identic nulă pe (x_1, x_2).

Teoremă 12. *(Condiţia lui Iacobi)* Dacă $y_0(x)$ este funcţia care realizează minimul (maximul) funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea

$$M = \left\{y(x) | y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_a, y(b) = y_b\right\}$$

în ipoteza că funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue, atunci pe ea nu există nici o pereche de puncte conjugate.

Dacă ar exista două puncte conjugate $x_1 < x_2$ există o direcţie $\eta(x)$ cu $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, dar $\eta(x)$ nu este identic nulă pe (x_1, x_2). Atunci direcţia

$$\overset{\frown}{\eta}(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \notin (x_1, x_2) \\ \eta(x) & pentru \quad x \in (x_1, x_2) \end{cases}$$

ar fi o extremală netedă pe porţiuni pentru $\delta^2 I[y_0(x);\eta(x)]$. Condiţiile Weirstrass-Erdman implică $\eta'(x_1) = 0$, şi deci $\eta(x)$ este identic nulă, contradicţie cu ipoteza.

Fie acum $y_0(x)$ o extremală a funcţionalei $I[y(x)]$ şi $\eta(x)$ o funcţie astfel încât pătratul ei şi al derivatei să fie neglijabile faţă de $\eta(x)$, respectiv $\eta'(x)$. Funcţia $y_0(x)+\eta(x)$ va fi o extremală numai dacă verifică ecuaţia Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y_0(x)+\eta(x), y_0'(x)+\eta'(x)) = F_y(x, y_0(x)+\eta(x), y_0'(x)+\eta'(x))$$

de unde rezultă

$$\frac{d}{dx}\left\{F_{yy'}(x, y_0, y_0')\eta + F_{y'y'}(x, y_0, y_0')\eta'\right\} -$$
$$-\left\{F_{yy}(x, y_0, y_0')\eta + F_{yy'}(x, y_0, y_0')\eta'\right\} = 0$$

adică tocmai ecuaţia lui Iacobi. Rezultă că punctul x_2 este conjugat cu punctul x_1 dacă există o extremală $y = y_0(x)+\eta(x)$ infinit vecină cu extremala $y = y_0(x)$, adică x_2 este punctul de tangenţă intre extremala $y = y_0(x)$ şi înfăşurătoarea unei familii de extremale. Din această interpretare geometrică rezultă teorema:

Teorema *(Condiţia suficientă de scufundare).*Dacă $y = y_0(x)$ este o extremală a funcţionalei $I[y(x)]$ şi dacă de-a lungul ei $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \neq 0$ şi pe intervalul $[a, b]$ nu există puncte conjugate atunci extremala $y = y_0(x)$ poate fi scufundată într-o familie de extremale, adică există o familie de extremale $y = y(x, \alpha)$ prin fiecare punct din vecinătatea lui $y = y_0(x)$ trecând numai câte o asemenea extremală şi există o valoare α_0 astfel că $y_0(x) = y(x, \alpha_0)$.

11.23 Condiţia lui Weirstrass de extremum tare

Fie $y_0(x)$ funcţia care realizează minimul tare al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea

$$M = \left\{y(x) | y(x) \in C^1[a, b], y(a) = y_a, y(b) = y_b\right\}$$

în ipoteza că funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue. Ştim că $y_0(x)$ este o extremală a funcţionalei $I[y(x)]$. Presupunem pentru simplitate că graficul funcţiei $y_0(x)$ trece prin originea $O(0, 0)$. Să dăm în vecinătatea acestui punct o variaţie funcţiei în aşa fel încât variaţia graficului în vecinătatea originii să fie în vârf de ac, cu alte cuvinte pentru $h > 0$ mic considerăm funcţia

$$y(x,h,m) = \begin{cases} y_0(x) & \textit{pentru} \quad x \leq 0 \\ mx & \textit{pentru} \quad 0 \leq x \leq h \\ y_0(x) + \frac{mh - y_0(h)}{h-b}(x-b) & \textit{pentru} \quad h \leq x \leq b \end{cases}$$

Pentru h mic funcţia $y(x,h,m)$, cu derivată continuă pe porţiuni, este în vecinătatea tare a lui $y_0(x)$ (cele două funcţii diferă foarte puţin ca valori, dar nu şi ca derivate). Vom avea

$$\begin{aligned} \varphi(h,m) &= I[y(x,h,m)] - I[y_0(x)] = \int_0^h F(x,mx,m)dx + \\ &+ \int_h^b F(x, y(x,h,m), \frac{\partial y(x,h,m)}{\partial x})dx. \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(h,m)}{\partial h} &= F(h,mh,m) - F(h, y(h,h,m), \frac{\partial y(h,h,m)}{\partial x}) + \\ &+ \int_h^b \left[F_y \frac{\partial y(x,h,m)}{\partial h} + F_{y'} \frac{\partial^2 y(x,h,m)}{\partial x \partial h} \right] dx. \end{aligned}$$

La limită pentru $h \to 0+0$ vom avea

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(0+0,m)}{\partial h} &= F(0,0,m) - F(0,0,y'(0)) + \\ & \int_0^b \left[F_y \frac{\partial y(x,0,m)}{\partial h} + F_{y'} \frac{\partial^2 y(x,0,m)}{\partial x \partial h} \right] dx \end{aligned}$$

unde $F_y, F_{y'}$ sunt calculate în punctele $(x, y_0(x), y_0'(x))$. Cum $y_0(x)$ este extremală rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(0+0,m)}{\partial h} &= F(0,0,m) - F(0,0,y'(0)) + \\ & F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \frac{\partial y(x,0,m)}{\partial h} \Big|_0^b . \end{aligned}$$

Dar

$$\frac{\partial y(x,h,m)}{\partial h} = \frac{(m - y'(h))(h-b) - mh + y(h)}{(h-b)^2}(x-b)$$

$$\frac{\partial y(x,0,m)}{\partial h} = \frac{m - y'(0)}{-b}(x-b)$$

şi obţinem

$$\frac{\partial\varphi(0+0,m)}{\partial h} = F(0,0,m) - F(0,0,y'(0)) - F_{y'}(0,0,y_0'(0))(m - y'(0))$$

Dacă ar exista o valoare m_0 pentru care $\frac{\partial\varphi(0+0,m_0)}{\partial h} < 0$ atunci pentru că

$$\varphi(h,m_0) = \frac{\partial\varphi(0+0,m_0)}{\partial h}h + o(h), h > 0$$

rezultă că ar exista o valoare h_0 suficient de mică şi funcţia $y(x,h_0,m_0)$ astfel încât

$$\varphi(h_0,m_0) = I[y(x,h_0,m_0)] - I[y_0(x)] < 0.$$

Putem înlocui funcţia netedă pe porţiuni $y(x,h_0,m_0)$ cu o funcţie netedă peste tot $y^*(x,h_0,m_0)$ astfel încât $I[y^*(x,h_0,m_0)]$ să difere puţin de $I[y(x,h_0,m_0)]$ şi deci ca inegalitatea $I[y^*(x,h_0,m_0)] - I[y_0(x)] < 0$ să se menţină. Va rezulta că extremala $y_0(x)$ nu realizează minimul tare al funcţionalei. Deci oricare ar fi $x \in [a,b]$, oricare ar fi $m \in R$ trebuie să avem

$$F(x,y_0(x),m) - F(x,y_0(x),y'(x)) - F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))(m - y_0'(x)) \geq 0.$$

Definiţia 10. Funcţia

$$E(x,y,y',m) = F(x,y,m) - F(x,y,y') - F_{y'}(x,y,y')(m - y')$$

se numeşte *funcţia lui Weirstrass.*

Rezultă următoarea teoremă:

Teorema 13 *(Condiţia lui Weirstrass).* Dacă funcţia $y_0(x)$ realizează minumul tare al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

pe mulţimea

$$M = \left\{y(x)|y(x) \in C^1[a,b], y(a) = y_a, y(b) = y_b\right\}$$

atunci de-a lungul ei funcţia lui Weirstrass este pozitivă

$$E(x,y_0(x),y_0'(x),m) =$$

$$= F(x,y_0(x),m) - F(x,y_0(x),y_0'(x)) - F_{y'}(x,y_0(x),y_0'(x))(m - y_0'(x)) \geq 0$$

oricare ar fi m pentru care $F(x, y, m)$ are sens.

Din punct de vedere geometric condiţia lui Weirstrass revine la faptul că funcţia $F(x, y, y')$ de-a lungul extremalei care realizează minimul funcţionalei este convexă considerată ca funcţie de y'.

Cum

$$\varphi(p) - \varphi(q) - \varphi'(p)(p - q) = \int\limits_p^q dr \int\limits_p^r \varphi''(s)ds$$

rezultă că dacă

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), m) \geq 0, \forall m \in R,$$

atunci condiţia lui Weirstrass este îndeplinită.

11.24 Condiţii suficiente de extremum

Fie $y_0(x)$ funcţia care realizează minimul tare al funcţionalei

$$I[y(x)] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea

$$M = \left\{y(x)|y(x) \in C^1[a, b], y(a) = y_a, y(b) = y_b\right\}$$

în ipoteza că funcţia F are derivate parţiale de ordinul doi continue. Ştim că $y_0(x)$ este o extremală a funcţionalei $I[y(x)]$. Să presupunem că această extremală poate fi scufundată într-un câmp central de extremale cu vârful în $(a, y_0(a))$. Fie $m(x, y)$ funcţia de pantă a câmpului şi fie $y = y(x), x \in [a, b]$ o funcţie din vecinătatea tare a extremalei $y_0(x)$. Prin fiecare punct $(x, y(x))$ trece o extremală din câmpul central cu ecuaţia de forma $y = \psi(t, x)$, $t \in [a, b]$ astfel încât $\psi(a, x) = y_0(a)$, $\psi(x, x) = y(x)$, $\frac{\partial \psi(x,x)}{\partial t} = m(x, y(x))$. Să considerăm funcţia

$$\sigma(x) = -\int\limits_a^x F(t, \psi(t, x), \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t})dt - \int\limits_x^b F(t, y(t), y'(t))dt.$$

Vom avea

$$\sigma(a) = -\int\limits_a^b F(t, y(t), y'(t))dt = -I[y(t)],$$

$$\sigma(b) = -\int_a^b F(t, \psi(t,x), \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t})dt = -\int_a^b F(t, y_0(t), y_0'(t))dt = -I[y_0(t)]$$

şi deci

$$\sigma(b) - \sigma(a) = I[y(t)] - I[y_0(t)] = \int_a^b \sigma'(x)dx.$$

Dar

$$\sigma'(x) = F(x, y(x), y'(x)) - F(x, y'(x), m(x, y(x))) - \int_a^x \left[F_y \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x} + F_{y'} \frac{\partial^2 \psi(t,x)}{\partial t \partial x} \right] dt$$

sau ţinând cont că $\psi(t,x)$ este extremală

$$\sigma'(x) = F(x, y(x), y'(x)) - F(x, y'(x), m(x, y(x))) - F_{y'} \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x}\bigg|_a^x.$$

Avem $\frac{\partial \psi(a,x)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \psi(x,x)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(x,x)}{\partial x} = y'(x)$ de unde $\frac{\partial \psi(x,x)}{\partial x} = y'(x) - m(x, y(x))$ şi deci

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &= F(x, y(x), y'(x)) - F(x, y'(x), m(x, y(x))) - \\ &\quad - F_{y'}(x, y(x), m(x, y(x)))(y'(x) - m(x, y(x))). \end{aligned}$$

A reapărut funcţia lui Weirstrass şi putem scrie

$$I[y(t)] - I[y_0(t)] = \int_a^b E(x, y(x), m(x, y(x)), y'(x))dx.$$

Puteam stabili această relaţie pentru cazul mai general în care extremala $y_0(x)$ poate fi scufundată într-un câmp de extremale oarecare. In adevăr dacă luăm funcţia fundamentală a câmpului $S(x, y)$ avem

$$dS = [F(x, y, m(x, y)) - m(x, y)F_{y'}(x, y, m(x, y))]\, dx + F_{y'}(x, y, m(x, y))dy$$

şi deci integrala curbilinie

$$\int_C [F(x, y, m(x, y)) - m(x, y)F_{y'}(x, y, m(x, y))]\, dx + F_{y'}(x, y, m(x, y))dy$$

nu depinde decât de capetele curbei. Dacă luăm odată curba graficul extremalei $y = y_0(x)$ şi altă dată graficul unei funcţii oarecare $y = y(x)$ cu aceleaşi capete vom avea

$$I[y_0(x)] =$$

$$\int_a^b \{[F(x,y,m(x,y(x))) - m(x,y(x))F_{y'}(x,y,m(x,y(x)))] + F_{y'}(x,y,m(x,y))y'(x)\}\,dx$$

şi regăsim relaţia

$$I[y(x)] - I[y_0(x)] = \int_a^b E(x,y(x),m(x,y(x)),y'(x))dx.$$

Am obţinut teorema

Teorema . (*Condiţia necesară si suficientă de minim tare a lui Weirstrass*) Extremala $y_0(x)$ care poate fi scufundată într-un câmp de extremale realizează minimul tare al funcţionalei $I[y(x)]$ dacă şi numai dacă pentru orice funcţie $y(x)$ dintr-o vecinătate tare a lui $y_0(x)$ are loc relaţia

$$\int_a^b E(x,y(x),m(x,y(x)),y'(x))dx \geq 0.$$

Această teoremă greu de aplicat în practică poate fi înlocuită evident cu următoarea teoremă mai practică:

Teorema . (*Condiţia suficientă a lui Weirstrass de minim tare*) Extremala $y_0(x)$ care poate fi scufundată într-un câmp de extremale realizează minimul tare al funcţionalei $I[y(x)]$ dacă există o vecinătate tare a lui $y_0(x)$ astfel încât în orice punct (x,y) al acestei vecinătăţi are loc relaţia

$$E(x,y,m(x,y),m') \geq 0$$

oricare ar fi numărul m'.

Cum $E(x,y,m(x,y),m') = \frac{1}{2}F_{y'y'}(x,y,m'')(m'-m(x,y))^2$ cu m'' cuprins între m' şi $m(x,y)$ putem enunţa teorema şi mai simplă:

Teorema . (*Condiţia suficientă simplificată de minim tare a lui Weirstrass*) Extremala $y_0(x)$ care poate fi scufundată într-un câmp de extremale realizează minimul tare al funcţionalei $I[y(x)]$ dacă există o vecinătate tare a lui $y_0(x)$ astfel încât în orice punct (x,y) al acestei vecinătăţi are loc relaţia

$$F_{y'y'}(x,y,m'') \geq 0$$

oricare ar fi numărul m''.

Pentru minimul slab are loc teorema:

Teorema .(*Condiţiile suficiente de minim slab ale lui Iacobi*) Funcţia $y_0(x)$ realizează minimul slab al funcţionalei $I[y(x)]$ dacă sunt satisfăcute condiţiile:

- $y_0(x)$ este o extremală;
- de-a lungul său are loc condiţia lui Legendre întărită $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0$;
- de-a lungul său are loc condiţia lui Iacobi întărită, adică pe intervalul $[a, b]$ nu există puncte conjugate cu a.

In adevăr ultimele două condiţii asigură că extremala $y_0(x)$ poate fi scufundată într-un câmp de extremale. Din condiţia a doua rezultă că există o vecinătate slabă a lui $y_0(x)$ astfel că în punctele acestei vecinătăţi vom avea $F_{y'y'}(x, y, y') > 0$. Atunci pentru o funcţie $y(x)$ din această vecinătate vom avea

$$\begin{aligned} I[y(x)] - I[y_0(x)] &= \int_a^b E(x, y(x), m(x, y(x)), y'(x))dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (y'(x) - m(x, y(x))^2 F_{y'y'}(x, y(x), m'(x))dx > 0 \end{aligned}$$

$m'(x)$ fiind cuprins între $m(x, y(x))$ şi $y'(x)$.

Condiţiile suficiente ale lui Iacobi se cer îndeplinite numai de-a lungul extremalei.

In cazul maximelor se schimbă semnul inegalităţilor în toate condiţiile.

11.25 Exerciţii

Să se studieze extremalele funcţionalelor:

1. $I[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - 2xy)dx, y(0) = y(1) = 0.$

Ind. $F = y'^2 - 2xy$, $F_{y'} = 2y'$, $F_y = -2x$, $F_{y'y'} = 2$, $F_{yy'} = 0$, $F_{yy} = 0$. Ecuaţia lui Euler $2y'' + 2x = 0$ are extremalele $y = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$. Cea care satisface condiţiile la capete este $y = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}$, ea poate fi scufundată în câmpul central cu centrul în $O(0, 0)$. De altfel ecuaţia lui Iacobi este $\eta'' = 0$ cu soluţia care verifică condiţiile $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = 1$, $\eta = x$ care nu se anulează pe $(0, 1]$. Cum $F_{y'y'} = 2 > 0$ peste tot, rezultă că extremala realizează minimul tare. De altfel funcţia lui Weirstrass este

$$\begin{aligned} E(x,y,m,y') &= F(x,y,y') - F(x,y,m) - F_{y'}(x,y,m)(y'-m) = \\ &= y'^2 - 2xy - m^2 + 2xy - 2m(y'-m) = \\ &= (y'-m)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

2. $I[y(x)] = \int\limits_0^1 e^x(y^2 + \frac{1}{2}y'^2)dx,\ y(0) = 1, y(1) = e.$

Ind. $F = e^x(y^2+\frac{1}{2}y'^2)$, $F_{y'} = e^x y'$, $F_y = 2e^x y$, $F_{y'y'} = e^x$, $F_{yy'} = 0$, $F_{yy} = 2e^x$. Ecuaţia lui Euler $y'' + y' - 2y = 0$ are extremalele $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, iar cea care satisface condiţiile este $y = e^x$. Ecuaţia lui Iacobi este $\eta'' + \eta' - 2\eta = 0$ cu soluţia necesară $\eta = \frac{1}{3}e^x(1 - e^{-3x}) \neq 0$ pentru $x \in (0, 1]$. Funcţia lui Weirstrass este $E(x, y, m, y') = \frac{1}{2}e^x(y' - u)^2 \geq 0$, deci extremala realizează minimul tare.

3. $I[y(x)] = \int\limits_0^1 e^y y'^2 dx, y(0) = 0, y(1) = \ln 4.$

R. Pe extremala $y = 2\ln(x + 1)$ se realizează un minim tare.

4. $I[y(x)] = \int\limits_1^2 \frac{x^3}{y'^2}dx, y(1) = 1, y(2) = 4.$

R. Pe extremala $y = x^2$ se realizează un minim slab pentru că se găseşte funcţia lui Weirstrass $E(x, y, m, y') = 2\frac{x^3}{m^2}(y'-m)^2(y' + \frac{p}{2})$ pozitivă numai pentru y' în vecinătatea lui m.

5. $I[y(x)] = \int\limits_0^a \frac{dx}{y'},\ y(0) = 0,\ y(a) = b,\ a > 0,\ b > 0.$

R. Pe extremala $y = \frac{b}{a}x$ se realizează un minim slab pentru că funcţia lui Weirstrass este $E(x, y, m, y') = \frac{(y'-p)^2}{p^2y'}$ pozitivă numai în vecinătatea extremalei.

6. $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (1 + x)y'^2 dx, y(0) = 0, y(1) = 1.$

R. Pe extremala $y = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$ se realizează un minim tare.

7. $I[y(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2)dx, y(0) = 1, y(\pi/2) = 1.$

R. Pe extremala $y = \sin x + \cos x$ se realizează un maxim tare.

8. $I[y(x)] = \int\limits_{-1}^2 y'(1 + x^2y')dx, y(-1) = 1, y(2) = 4.$

R Nu există extremum pe funcţii continue.

9. $I[y(x)] = \int\limits_{-1}^1 (y'^3 + y'^2)dx, y(-1) = -1, y(1) = 3.$

R. Pe extremala $y = 2x + 1$ se realizează minim slab.

10. $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'^3 - \alpha y')dx, y(0) = 0, y(1) = -2, \alpha \in R.$

R. Pe extremala $y = -2x$ se realizează un minim slab.

11. $I[y(x)] = \int_0^2 (e^{y'} + 3)dx, y(0) = 0, y(2) = 1.$

R. Pe extremala $y = \frac{x}{2}$ se realizează un minim tare.

12. $I[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2)dx, y(0) = -1, y(1) = 1.$

R. Pe extremala $y = 2x - 1$ se realizează un minim tare.

13. $I[y(x)] = \int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3)dx, y(1) = 0, y(2) = 1.$

R. Pe extremala $y = x - 1$ se realizează un minim slab.

14. $I[y(x)] = \int_0^a y'^2 dx, y(0) = 0, y(a) = b, a > 0, b > 0.$

R. Pe extremala $y = \frac{b}{a}x$ se realizează un minim tare.

15. $I[y(x)] = \int_0^a y'^3 dx, y(0) = 0, y(a) = b, a > 0, b > 0.$

R. Pe extremala $y = \frac{b}{a}x$ se realizează un minim slab.

11.26 Extreme cu legături

Fie $y_0(x)$ funcţia care realizează extremul funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea funcţiilor

$$M = \left\{ y(x) | y(x) \in C^1[a, b], y(a) = y_a, y(b) = y_b, J[y(x)] = c \right\},$$

unde $J[y(x)]$ este funcţionala

$$J[y(x)] = \int_a^b G(x, y(x), y'(x))dx.$$

Presupunem că funcţiile F, G au derivate parţiale de ordinul doi continue în raport cu argumentele lor. Fie două funcţii direcţie $\eta(x), \xi(x)$ nule în a, b $\eta(a) = \eta(b) = 0, \xi(a) = \xi(b) = 0$. Funcţia de două variabile

$$\Phi(t, s) = I[y_0(x) + t\eta(x) + s\xi(x)]$$

cu condiţia

$$\Psi(t, s) = J[y_0(x) + t\eta(x) + s\xi(x)] = c$$

îşi atinge extremul în punctul $(t = 0, s = 0)$. Atunci există multiplicatorul lui Lagrange $\lambda \in R$ astfel încât să avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi + \lambda\Psi)|_{t=0,s=0} &= 0\\ \frac{\partial}{\partial s}(\Phi + \lambda\Psi)|_{t=0,s=0} &= 0\end{aligned}$$

ceea ce implică

$$\begin{aligned}\delta I[y_0(x); \eta(x)] + \lambda\delta J[y_0(x); \eta(x)] &= 0, \forall\eta(x),\\ \delta I[y_0(x); \xi(x)] + \lambda\delta J[y_0(x); \xi(x)] &= 0, \forall\xi(x).\end{aligned}$$

Am demonstrat teorema

Teorema 12. Dacă funcţia $y_0(x)$ realizează extremul funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

pe mulţimea funcţiilor

$$M = \left\{y(x)|y(x) \in C^1[a, b], y(a) = y_a, y(b) = y_b, J[y(x)] = c\right\},$$

unde $J[y(x)]$ este funcţionala

$$J[y(x)] = \int_a^b G(x, y(x), y'(x))dx,$$

dacă funcţiile F, G au derivate parţiale de ordinul doi continue în raport cu argumentele lor, atunci există *multiplicatorul lui Lagrange* $\lambda \in R$ asfel că $y_0(x)$ este extremala funcţionalei $I[y(x)] + \lambda J[y(x)]$.

Exemplul 23. In problema lănţişorului, problema echilibrului unui fir greu, trebuia găsit minimul funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

cunoscând lungimea firului

$$J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx = L.$$

Vom căuta extremala funcţionalei $I[y(x)] + \lambda J[y(x)]$ cu integrandul

$$f = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2(x)} = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}.$$

Acesta ne-depinzând de x avem integrala primă $f - y' f_{y'} = C$ adică $\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C$. Punând $y' = \sinh u$ avem

$$y + \lambda = C\sqrt{1+\sinh^2 u} = C\cosh u, y = Ccoshu - \lambda.$$

Din $y' = \frac{dy}{dx} = \sinh u$ rezultă $dx = Cdu$ şi

$$du = \frac{1}{C}dx, u = \frac{x}{C} + C_1, y = C\cosh(\frac{x}{C} + C_1) - \lambda.$$

Constantele C, C_1, λ se determină din condiţiile la capete $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ şi din condiţia $J[y(x)] = L$.

Fie cazul unei funcţionale

$$I[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] = \int_a^b F(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), ..., y_n'(x))dx,$$

definite pe o mulţime de n funcţii de o variabilă derivabile pe intervalul $[a, b]$:

$$M = \left\{ \begin{array}{c} y_i(x), i = 1, 2, ..., n | y_i(x) \in C^1[a, b], y_i(a) = y_{ia}, y_i(b) = y_{ib}, \\ G_j(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), ..., y_n'(x)) = c_j, j = 1, 2, ..., r \end{array} \right\},$$

funcţia F fiind definită într-un domeniu şi cu derivatele parţiale de ordinul întâi continue în acel domeniu, funcţiile $G_j(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), ..., y_n'(x))$ fiind date. In acest caz se poate arăta că există r *funcţii multiplicatori ai lui Lagrange* $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_r(x)$ astfel încât funcţiile care realizează extremul funcţionalei I anulează variaţia de ordinul întâi al funcţionalei $J = I + \lambda_1 G_1 + ... + \lambda_r G_r$.

11.27 Exerciţii

1. Să se găsească minimul integralei $I[y(x)] = \int\limits_0 \pi y'^2 dx$ cu condiţiile $J[y(x)] = \int\limits_0 \pi y^2 dx = 1, y(0) = 0, y(\pi) = 0.$

Ind. Pentru integrala cu integrandul $H = y'^2 + \lambda y^2$ ecuaţia lui Euler este $y'' - \lambda y = 0$. Pentru a putea verifica condiţiile trebuie ca $\lambda = -k^2$, $k \in N^*$ şi găsim extremalele $y = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$. Dintre acestea numai $y = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$ satisfac condiţia lui Iacobi. Pe ele $I[y(x)]$ ia valoarea minimă 1.

2. Să se găsească extremalele funcţionalei $I[y(x)] = \int\limits_0^1 y'^2 dx$ cu condiţiile $J[y(x)] = \int\limits_0^1 y dx = 3$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$.

R. $y = 3x^2 + 2x + 1$.

3. Să se găsească extremalele funcţionalei $I[y(x)] = \int\limits_0^1 y'^2 dx$ cu condiţia $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (y - y'^2) dx = 1/12$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1/4$.

R. $y = \frac{1}{4}(2x - x^2)$.

4. Să se găsească extremalele funcţionalei $I[y(x), z(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx$ cu condiţiile $J[y(x), z(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $y(1) = 1$, $z(1) = 1$.

R. $y = \frac{7x - 5x^2}{2}$, $z = x$.

5 Să se găsească cea mai scurtă lungime a curbei de pe suprafaţa $15x - 7y + z - 22 = 0$ care uneşte punctele $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, -1)$..

Ind. Se caută extremala funcţionalei

$$I[y(x), z(x)] = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22) \right)$$

unde $\lambda(x)$ este funcţia multiplicator.

R. $y = 2x - 3$, $z = 1 - x$, $L = \sqrt{6}$.

11.28 Metode variaţionale pentru valori proprii

Fie $\mathbf{E}$ un spaţiu euclidian n-dimensional ale cărui elemente le notăm cu litere latine mici $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, ...$şi o formă pătratică $p(\mathbf{x})$ pozitiv definită pe $\mathbf{E}$. De la algebră lineară se ştie că există un endomorfism autoadjunct $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ astfel încât $p(\mathbf{x}) = < A(\mathbf{x}), \mathbf{x} >$ şi că există o bază ortonormată $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ formată din vectori proprii ai endomorfismului A asfel încât dacă

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n$$

atunci

$$p(x) = \lambda_1(x_1)^2 + \lambda_2(x_2)^2 + ... + \lambda_n(x_n)^2,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt valorile proprii ale endomorfismului A. Suprafaţa de nivel constant 1 a formei pătratice $\lambda_1(x_1)^2 + \lambda_2(x_2)^2 + ... + \lambda_n(x_n)^2 = 1$ reprezintă un elipsoid ale cărui semiaxe sunt legate de valorile proprii. De exemplu, cea mai mare semiaxă este egală cu $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ dacă λ_1 este cea mai mică valoare proprie. Cum $\lambda_1 = p(\mathbf{e}_1) =< A(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1 >$ această interpretare geometrică duce la a defini cea mai mică valoare proprie λ_1şi vectorul ei propriu prin relaţia

$$\lambda_1 = \min_{<\mathbf{x},\mathbf{x}>=1} p(\mathbf{x}) = \min_{<\mathbf{x},\mathbf{x}>=1} < A(\mathbf{x}), \mathbf{x} >= \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{E}} \frac{p(\mathbf{x})}{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >} = \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{E}} \frac{< A(\mathbf{x}), \mathbf{x} >}{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >}.$$

In adevăr, sfera unitate $< \mathbf{x}, \mathbf{x} >= 1$ fiind compactă minimul $\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{E}} \frac{<A(\mathbf{x}),\mathbf{x}>}{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}$ se atinge pe un vector $\mathbf{x}_1$şi fie valoarea sa λ_1. Atunci $< A(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1 > -\lambda_1 < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 >= 0$ şi $< A(\mathbf{x}), \mathbf{x} > -\lambda_1 < \mathbf{x}, \mathbf{x} >\geq 0$ pentru orice vector $\mathbf{x}$ din $\mathbf{E}$. Să notăm $J(\mathbf{x}) =< A(\mathbf{x}), \mathbf{x} > -\lambda_1 < \mathbf{x}, \mathbf{x} >$. Atunci $J(\mathbf{x}_1) = 0$ şi pentru orice t real şi orice vector $\mathbf{v}$ funcţia $\Phi(t) = J(x + tv) = 2t < A(\mathbf{x}_1) - \lambda_1\mathbf{x}_1, v > +t^2 J(v) \geq 0$. Atunci $\Phi'(0) = 2 < A(\mathbf{x}_1) - \lambda_1\mathbf{x}_1, v >= 0$ pentru orice vector $\mathbf{v}$. Rezultă $A(\mathbf{x}_1) - \lambda_1\mathbf{x}_1 = 0$, adică $\mathbf{x}_1$ este vector propriu corespunzător valorii proprii λ_1. Se observă analogia perfectă cu problemele calculului variaţional: $2 < A(\mathbf{x}_1) - \lambda_1\mathbf{x}_1, v >$ poate fi considerată variaţia întâi a funcţonalei $\frac{<A(\mathbf{x}),\mathbf{x}>}{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}$, numită *câtul lui Rayleigh*, iar ecuaţia $A(\mathbf{x}_1) - \lambda_1\mathbf{x}_1 = 0$ poate fi considerată ecuaţia lui Euler-Lagrange pentru aceeaşi funcţională.

Să considerăm funcţionala pătratică

$$I[y(x)] = \int_a^b \left[P(x)y'(x)^2 + Q(x)y(x)^2\right] dx$$

definită pe mulţimea funcţiilor

$$M_1 = \left\{ y(x) \middle| y(x) \in C^2[a, b], y(a) = y(b) = 0, \int_a^b y(x)dx = 1 \right\}$$

cu coeficienţii $P(x), Q(x)$ funcţii continui pe $[a, b]$ astfel încât $P(x) > 0$ pentru $a \leq x \leq b$. Valorile funcţionalei $I[y(x)]$ sunt mărginite inferior pentru că

$$I[y(x)] \geq \int_a^b Q(x)y(x)^2 dx \geq \min_{a\leq x\leq b} Q(x) \int_a^b y(x)^2 dx = \min_{a\leq x\leq b} Q(x).$$

Să presupunem că am demonstrat că există o funcţie $y_1(x)$ pentru care funcţionala este minimă. Atunci după teoria extremelor condiţionate funcţia $y_1(x)$ satisface ecuaţia

$$(P(x)y_1'(x))' - [Q(x)y_1(x) - \lambda_1 y_1(x)] = 0.$$

Problema găsirii soluţie acestei ecuaţii care să verifice condiţiile la limită se numeşte *problemă Sturm-Liouville.*

Dacă introducem operatorul diferenţial

$$L[y(x)] = -\left(P(x)y'(x)\right)' + Q(x)y(x)$$

atunci relaţia precedentă se scrie sub forma

$$L[y_1(x)] = \lambda_1 y_1(x),$$

adică putem spune că funcţia $y_1(x)$ este vector propriu, se numeşte *funcţie proprie*, pentru operatorul L corespunzătoare *valorii proprii* λ_1.

Odată găsită funcţia $y_1(x)$, să găsim minimul funcţionalei $I[y(x)]$ pe submulţimea lui M_1

$$M_2 = \left\{ y(x) \middle| y(x) \in M_1, \int_a^b y_1(x)y(x)dx = 0. \right\}$$

Funcţia $y_2(x)$ care realizează acest minim va trebui să verifice relaţia

$$L[y_2(x)] = \lambda_2 y_2(x) + \mu_2 y_1(x).$$

Dar se verifică imediat că operatorul L este autoadjunct, adică are loc relaţia

$$\int_a^b L[u(x)]v(x)dx = \int_a^b u(x)L[v(x)]dx, \quad \forall u(x), v(x) \in M_1.$$

Inmulţind relaţia de mai înainte cu $y_1(x)$ şi integrând de la a la b obţinem că $\mu_2 = 0$, adică funcţia $y_2(x)$ este valoarea proprie a operatorului L corespunzătoare valorii proprii λ_2.

A treia funcţie proprie $y_3(x)$ corespunzătoare valorii proprii λ_3 realizează minimul funcţionalei $I[y(x)]$ pe submulţimea lui M_2

$$M_3 = \left\{ y(x) \middle| y(x) \in M_2, \int_a^b y_2(x)y(x)dx = 0. \right\}$$

şi putem continua. Obţinem în acest fel un şir de funcţii proprii ale operatorului diferenţial L

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), ..., y_n(x), ...$$

care prin construcţie sunt ortogonale două câte două şi sunt normate (aparţin lui M_1). Din construcţie rezultă că

$$I[y_1(x)] \leq I[y_2(x)] \leq I[y_3(x)] \leq ... \leq I[y_n(x)] \leq ....$$

Mai mult se poate arăta că acest şir de valori tinde către infinit. Dacă aplicăm integrarea prin părţi primului termen al funcţionalei $I[y(x)]$ obţinem

$$I[y(x)] = \int\limits_a^b L[y(x)y(x)dx + P(x)y(x)y'(x)|_a^b$$

şi deci

$$I[y_n(x)] = \int\limits_a^b L[y_n(x)y_n(x)dx = \int\limits_a^b \lambda_n y_n(x)y_n(x)dx = \lambda_n.$$

Mulţimea valorilor proprii λ_n constituie spectrul operatorului L pe mulţimea M_1.

In cazul endomorfismului autoadjunct vectorii proprii constituiau o bază a spaţiului, adică orice vector din spaţiu se descompune în mod unic după vectorii proprii. Dacă considerăm o partiţie $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, şi considerăm valorile $y_0, y_1, ..., y_n$ ale funcţiei $y(x)$ în nodurile partiţiei, putem exprima integrala din funcţionala $I[y(x)]$ printr-o formulă de cuadratură şi obţinem în locul funcţionalei un endomorfisn autoadjunct pe subspaţiul vectorial definit de $y_0 = y_n = 0$. Orice element din acest subspaţiu se va exprima în funcţie de vectorii proprii ai endomorfismului. La limită pentru $n \to \infty$ rezultă că orice funcţie de două ori derivabilă pe $[a, b]$ nulă în capetele intervalului se va descompune într-o serie uniform convergentă după funcţiile proprii. Aceasta este proprietatea de completitudine a mulţimii funcţiilor proprii.

11.29 Exerciţii

Să se găsească valorile proprii şi funcţiile proprii normate ale funcţionalelor pătratice:

1. $I[y(x)] = \int\limits_0^3 [(2x+3)^2 y'^2 - y^2]dx, y(0) = 0, y(3) = 0.$

Ind. Ţinând cont de condiţia de normare $\int_0^3 y^2 dx = 1$ ecuaţia lui Euler este

$$(2x+3)^2 y'' + 4(2x+3)y' + (\lambda+1)y = 0.$$

Făcând schimbarea de variabilă $2x+3 = e^t$ aceasta se scrie

$$4y''(t) + 4y'(t) + (\lambda+1)y(t) = 0.$$

Condiţiile la capete nu pot fi satisfăcute decât pentru valorile proprii

$$\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{\ln^2 3}, n = 1, 2, 3, ...$$

pentru care se găsesc funcţiile proprii

$$y_n(x) = \pm\frac{2}{\sqrt{\ln 3}} \frac{\sin \frac{n\pi \ln(2x+3)}{\ln 3}}{\sqrt{2x+3}}, n = 1, 2, 3, ...$$

2. $I[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2)dx, y(0) = y(1) = 0.$

R. $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2, y_n(x) = \pm\sqrt{2}\sin n\pi x, n = 1, 2, ...$

3. $I[y(x)] = \int_1^2 x^2 y'^2 dx, y(1) = y(2) = 0.$

R. $\lambda_n = \frac{\ln^2 2 + 4n^2\pi^2}{4\ln^2 2}, y_n(x) = \pm\frac{\sin\frac{n\pi \ln x}{\ln 2}}{\sqrt{\ln\sqrt{2}}\sqrt{x}}, n = 1, 2, 3, ...$

4. Să se arate că pentru orice funcţie $y(x) : [0, \pi] \to R$, $y(0) = y(\pi) = 0$ are loc inegalitatea $\int_0 \pi y'^2 dx \geq \int_0 \pi y^2 dx.$

R. Se găseşte că egalitatea se atinge pentru $y(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}.$

11.30 Principiul lui Hamilton, principii variaţionale

Considerăm un sistem de n puncte materiale cu masele $m_1, m_2, ..., m_n$. Notăm cu x_j, y_j, z_j coordonatele punctului j. Mişcarea sistemului este descrisă de ecuaţiile lui Newton

$$m_j \ddot{x}_j = F_{jx}, m_j \ddot{y}_j = F_{jy}, m_j \ddot{z}_j = F_{jz}, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

unde cele două puncte deasupra literei înseamnă derivarea în raport cu timpul, iar F_{jx}, F_{jy}, F_{jz} sunt componentele forţei $\overrightarrow{F_j}$ care acţionează asupra punctului j. Presupunem că forţele $\overrightarrow{F_j}$ admit o *funcţie de potenţial* $U = U(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$, adică au loc egalităţile

$$F_{jx} = -\frac{\partial U}{\partial x_j}, F_{jy} = -\frac{\partial U}{\partial y_j}, F_{jz} = -\frac{\partial U}{\partial z_j}, j = 1, 2, ..., n.$$

Aceasta înseamnă şi că lucru mecanic efectuat de forţe asupra sistemului pentru a-l aduce din poziţia iniţială $x_j(t_1), y_j(t_1), z_j(t_1), j = 1, 2, ..., n$ până în poziţia $x_j, y_j, z_j, j = 1, 2, ..., n$ este

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{(x_j(t_1),y_j(t_1),z_j(t_1))}^{(x_j,y_j,z_j)} F_{jx}dx_j + F_{jy}dy_j + F_{jz}dz_j = \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{(x_j(t_1),y_j(t_1),z_j(t_1))}^{(x_j,y_j,z_j)} \frac{\partial U}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial U}{\partial y_j}dy_j + \frac{\partial U}{\partial z_j}dz_j = \\
&= -U(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n) + \\
&\quad +U(x_1(t_1), y_1(t_1), z_1(t_1), ..., x_n(t_1), y_n(t_1), z_n(t_1)),
\end{aligned}$$

adică funcţia $U(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$ este abstracţie făcând de o constantă lucrul mecanic efectuat de forţe pentru a aduce sistemul din poziţia finală $x_j, y_j, z_j, j = 1, 2, ..., n$ în poziţia iniţială $x_j(t_1), y_j(t_1), z_j(t_1), j = 1, 2, ..., n$. Funcţia $U(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$ se numeşte *potenţialul forţelor*, iar valoarea sa într-o poziţie a sistemului se numeşte *energia potenţială a sistemului* în acea poziţie.

Funcţia

$$T = T(\dot{x}_1, \dot{y}_1\dot{z}_1, ..., \dot{x}_n\dot{y}_n\dot{z}_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2}\left(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2\right)$$

se numeşte *energia cinetică a sistemului* în poziţia de la acel moment.

Să considerăm două funcţionale

$$I_1[x_1(t), ..., z_n(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} T(\dot{x}_1, \dot{y}_1\dot{z}_1, ..., \dot{x}_n\dot{y}_n\dot{z}_n)dt,$$

$$I_2[x_1(t), ..., z_n(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} U(x_1(t), ..., z_n(t))dt$$

calculate de-a lungul unei traiectorii între momentele t_1, t_2, capetele fiind fixe. Să calculăm variaţiile acestor două funcţionale.

Avem

$$\delta I_1[x_1(t), ..., z_n(t); \delta x_1(t), ..., \delta z_n(t)] =$$

$$= -\int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\, \dot{x}_1}\delta x_1(t) + ... + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\, \dot{z}_n}\delta z_n(t)\right] dt =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \left[m_1\, \ddot{x}_1\, \delta x_1(t) + ... + m_n\, \ddot{z}_n\, \delta z_n(t) \right] dt.$$

$$\delta I_2[x_1(t), ..., z_n(t); \delta x_1(t), ..., \delta z_n(t)] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial U}{\partial x_1} \delta x_1(t) + ... + \frac{\partial U}{\partial z_n} \delta z_n(t) \right] dt =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} [F_{1x} \delta x_1(t) + ... + F_{nz} \delta z_n(t)]\, dt.$$

In virtutea ecuaţiilor lui Newton avem

$$\delta(I_1[x_1(t), ..., z_n(t); \delta x_1(t), ..., \delta z_n(t)] - I_2[x_1(t), ..., z_n(t); \delta x_1(t), ..., \delta z_n(t)]) = 0,$$

adică, vedem că funcţiile $x_1(t), ..., z_n(t)$ care descriu mişcarea reală a sistemului de puncte între momentele t_1, t_2 fac staţionară funcţionala

$$I[x_1(t), ..., z_n(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[T(\dot{x}_1\ (t), ..., \dot{z}_n\ (t)) - U(x_1(t), ..., z_n(t)) \right] dt$$

adică problema de mecanică este de fapt o problemă de calcul variaţional. Acest lucru a fost observat pentru prima dată în 1835 de către Hamilton şi de aceea se numeşte *principiul variaţional al lui Hamilton.*

Definiţia 10. Funcţia

$$L[x_1, ..., z_n, \dot{x}_1, ..., \dot{z}_n] = T(\dot{x}_1, ..., \dot{z}_n) - U(x_1, ..., z_n)$$

se numeşte *funcţia lui Lagrange a sistemului de puncte.*

Definiţia 11. Funcţionala

$$I[x_1(t), ..., z_n(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[x_1, ..., z_n, \dot{x}_1, ..., \dot{z}_n] dt$$

se numeşte *acţiunea sistemului de-a lungul traiectoriei.*

Dacă sistemul are r grade de libertate, adică poziţia sa este descrisă de r parametri $q_1, q_2, ..., q_r$, numiţi *coordonate generalizate,*

$$\begin{aligned} x_j &= x_j(q_1, q_2, ..., q_r), \\ y_j &= y_j(q_1, q_2, ..., q_r), \\ z_j &= z_j(q_1, q_2, ..., q_r), j = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

atunci

$$\begin{aligned}
\dot{x}_j &= \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\,\dot{q}_k \\
\dot{y}_j &= \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial y_j}{\partial q_k}\,\dot{q}_k \\
\dot{z}_j &= \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial z_j}{\partial q_k}\,\dot{q}_k
\end{aligned}$$

şi deci energia cinetică $T = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2}\left(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2\right)$ este o formă pătratică de *vitezele generalizate* $\dot{q}_j$: $T = \sum\limits_{j,k=1}^{r} a_{ij}\ \dot{q}_j\dot{q}_k$ cu coeficienţii funcţii de coordonatele generalizate. Energia potenţială devine o funcţie de coordonatele generalizate $U = U(q_1, q_2, ..., q_r)$. Funcţia lui Lagrange $L = T - U$ este acum o funcţie de $q_1, q_2, ..., q_r, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_r$. Funcţiile $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ se numesc *impulsurile generalizate*, iar $Q_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ se numesc *forţele generalizate*. Condiţia de staţionaritate a acţiunii, funcţionala $\int\limits_{t_1}^{t_2} Ldt$, ecuaţiile lui Euler , capătă forma

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\,\dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., r,$$

adică aşa numitele *ecuaţii ale lui Lagrange de speţa a doua*.

Se poate arăta că pe intervale mici de timp, acţiunea $\int\limits_{t_1}^{t_2} Ldt$ are chiar valoare minimă; de aceea principiul lui Hamilton se mai numeşte şi *principiul minimei acţiuni*.

In cazul autonom, când potenţialul nu depinde de timp, ecuaţiile lui Lagrange admit *integrala primă a energiei* $T + U = const$ de-a lungul traiectoriei, cum rezultă imediat din însumarea ecuaţiilor înmulţite cu $\dot{q}_j$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}\,\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_j}\,\dot{q}_j - \dot{q}_j\,\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\,\dot{q}_j} =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial q_j}\,\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_j}\,\dot{q}_j - \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j\,\frac{\partial T}{\partial\,\dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial\,\dot{q}_j}\,\ddot{q}_j =$$

$$= \frac{dT}{dt} - \frac{dU}{dt} - 2\frac{dT}{dt} = -\frac{d(T+U)}{dt} = 0$$

Am ţinut cont că datorită omogeneităţii lui T avem $\dot{q}_j\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$.

Exemplul 24. Să considerăm mişcarea unui punct într-un câmp central în plan în coordonate polare. Să considerăm în punctul de vector de poziţie $\overrightarrow{r}$ de coordonate polare $r = |\overrightarrow{r}|$ şi φ doi versori: $\overrightarrow{e_r}$ îndreptat în direcţia razei vectoare (şi deci $\overrightarrow{r} = r$

$\overrightarrow{e_r}$) şi $\overrightarrow{e\varphi}$ ortogonal pe $\overrightarrow{e_r}$ şi îndreptat în sensul creşterii lui φ. Evident, vectorii $\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e\varphi}$ se rotesc cu viteza unghiului $\dot{\varphi}$: $\dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot{\varphi}\ \overrightarrow{e\varphi}, \dot{\overrightarrow{e\varphi}} = -\ \dot{\varphi}\ \overrightarrow{e_r}$. Rezultă $\overrightarrow{v} = \dot{\overrightarrow{r}} = \dot{r}\ \overrightarrow{e_r} + \dot{\varphi}\ \overrightarrow{e\varphi}$ şi deci energia cinetică este $T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\ \dot{\varphi}^2\right)$, energia potenţială fiind o funcţie de r, $U = U(r)$. Funcţia lui Lagrange este $L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\ \dot{\varphi}^2\right) - U(r)$. Impulsurile generalizate sunt $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ \dot{r}, \quad p\varphi = mr^2\ \dot{\varphi}$. Prima ecuaţie a lui Lagrange $\dot{p_r} = \frac{\partial L}{\partial r}$ devine $m\ \ddot{r} = mr^2\ \dot{\varphi} - \frac{\partial U}{\partial r}$. Cum $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, a doua ecuaţie a lui Lagrange este $\dot{p\varphi} = 0$, adică $p\varphi = mr^2\ \dot{\varphi} = const$, ea reprezentând legea conservării momentului cinetic.

In cazul general în care câmpul nu este central $U = U(r, \varphi)$ am fi obţinut $\dot{p_\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$. Cum

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial \varphi}d\varphi = -\overrightarrow{F}d\overrightarrow{r} = -\overrightarrow{F}\,\overrightarrow{e_r}dr - r\overrightarrow{F}\,\overrightarrow{e_\varphi}d\varphi$$

unde $\overrightarrow{F}$ este forţa, rezultă

$$-\frac{\partial U}{\partial \varphi} = r\overrightarrow{F}\,\overrightarrow{e_\varphi} = r\left(\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{F}\right)\overrightarrow{e_z} = \left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}\right)\overrightarrow{e_z}.$$

Pe de altă parte, dacă notam cu $\overrightarrow{M} = m\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}$ avem

$$\dot{\overrightarrow{M}} = m\overrightarrow{r} \times \dot{\overrightarrow{v}} = m(2r\ \dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ \ddot{\varphi})\overrightarrow{e_z} = m\ \dot{\overbrace{(r^2\ \dot{\varphi})}}\ \overrightarrow{e_z}.$$

A doua ecuaţie a lui Lagrange se scrie

$$\dot{\overrightarrow{M}}\ \overrightarrow{e_z} = \left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}\right)\overrightarrow{e_z},$$

adică teorema momentului cinetic proiectată pe Oz.

Exemplul de mai sus permite următoare generalizare a conservării momentului cinetic:

Definiţia 12. O coordonată generalizată q_i se numeşte *ciclică* dacă funcţia lui Lagrange nu depinde de ea $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Teorema 14. Impulsul generalizat corespunzător unei coordonate ciclice se conservă $p_i = const$.

Din ecuaţiile de mişcare obţinem condiţiile de echilibru ale sistemului de puncte materiale, ţinând cont că la echilibru $T = 0$. Aceste condiţii se reduc la

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., r,$$

adică la condiţia de staţionaritate a energiei potenţiale.

Teorema 15. In punctul de echilibru al unui sistem, energia potenţială este staţionară.

Se poate arăta folosind integrala energiei că dacă energia potenţială are într-un punct minim local, adică în vecinătatea acelui punct energia potenţială este o funcţie convexă, atunci acel punct este punct de echilibru stabil (*teorema lui Liouville*).

Printr-o schimbare de coordonate generalizate, putem totdeuna presupune că punctul de echilibru stabil corespunde originii $q_1 = q_2 = .. = q_n = 0$. Atunci pentru studiul micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru vom putea înlocui energia cinetică $T = \sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{ij}(q_1, ..., q_n)\ \dot{q}_j \dot{q}_k$ cu valoarea sa pentru $q_1 = q_2 = .. = q_n = 0$

$$T = \sum_{j,k=1}^{n} a_{ij}(0, ..., 0)\ \dot{q}_j \dot{q}_k$$

şi energia potenţială cu partea ei pătratică pozitivă

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} q_j q_k, b_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}(0, ..., 0).$$

Cum forma pătratică T este pozitiv definită rezultă că există o schimbare lineară de coordonate generalizate

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} Q_j, i = 1, 2, ..., n$$

asfel încât

$$T = \sum_{i=1}^{n} \dot{Q}_i^2$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{Q}_i^2\ .$$

Numerele $\lambda_i, i = 1, ..., n$ sunt valorile proprii ale formei pătratice U în raport cu forma pătratică T, adică sunt rădăcinile ecuaţiei

$$\det\left(b_{ij} - \lambda a_{ij}\right) = 0.$$

Ecuaţiile lui Lagrange sunt atunci

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i, i = 1, ..., n.$$

Cum soluţiile acestui sistem sunt de forma

$$Q_i = C_1 \cos \omega_i t + C_2 \sin \omega_i t, \omega_i = \sqrt{\lambda_i},$$

rezultă că orice oscilaţie mică este o suprapunere de asemenea oscilaţii periodice, numite *oscilaţii proprii*. Numerele ω_i se numesc *pulsaţiile proprii*. Notăm că o suprapunere de oscilaţii periodice poate să nu fie peridică. Rezultă că studiul micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru se reduce la studiul valorilor proprii şi al vectorilor proprii ai unei forme pătratice.

Principiul lui Hamilton are caracteristica importantă că în formularea sa nu intervine numărul finit de grade de libertate, el formulându-se în funcţie numai de energia cinetică şi energia potenţială. In mod euristic, suntem conduşi să admitem că orice mediu continuu este un sistem format dintr-un număr foarte mare, dar finit, de particole, deci să admitem că şi pentru mediile continue, deci în cazul unui număr infinit de grade de libertate, este valabil principiul lui Hamilton. Totul este să ştim să calculăm energia cinetică şi energia potenţială a mediului continuu respectiv. Aceasta depinde de modelul de mediu continuu luat în considerare.

Exemplul 25. Să stabilim ecuaţia micilor oscilaţii plane transversale ale unei corzi întinsă cu forţa de tensiune T_0 între $x = 0$ şi $x = l$, asupra corzii acţionând şi forţa transversală $f(x,t)$. Vom considera coarda ca un mediu continuu unidimensional care lucrează numai la întindere, nu şi la încovoiere, fiind perfect flexibilă. Vom considera că fiecare punct de abscisă x al corzii se deplasează perpendixular pe Ox; vom nota prin $u(x,t)$ ordonata acestui punct. Funcţia $u(x,t)$ defineşte ecuaţia de mişcare a corzii, iar graficul ei pentru un t fixat dă forma corzii la momentul t. Ecuaţia parametrică a corzii la momentul t este $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + u(x,t)\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ fiind versorii axelor. Vectorul tangent la coardă $\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{i} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\overrightarrow{j}$ este un vesor dacă admitem că $\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2$ este neglijabil. Forţa $\overrightarrow{F}(x)$ cu care porţiunea din dreapta abscisei x acţionează asupra porţiunii din stânga este dirijată după tangentă şi are mărimea $T(x)$: $\overrightarrow{F}(x) = T(x,t)\left(\overrightarrow{i} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\overrightarrow{j}\right)$.Alungirea elementului $(x, x+dx)$ al corzii fiind $\sqrt{1+u_x'^2}dx - dx \approx 0$ rezultă din legea lui Hooke că mărimea forţei de tensiune $T(x,t) = T(x)$ nu se modifică în timpul vibraţiilor. Din proiecţia legii de mişcare a elementului $(x, x+dx)$ pe Ox rezultă că $T(x) = T_0$. Componenta pe axa Ou a forţelor care acţionează asupra elementului $(x, x+dx)$ este

$$T_0 \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - T_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx.$$

Puterea necesară pentru a aduce coarda în poziţia deformată este

$$P = \int_0^l T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = -T_0 \int_0^l \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} dx = -\frac{1}{2} T_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dt,$$

unde la integrarea prin părţi am ţinut cont că extremităţile corzii sunt fixe. Rezultă că energia potenţială de deformaţie a corzii este $\frac{1}{2} T_0 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dt$ şi deci energia potenţială a întregii corzi este

$$U = \int_0^l \left[\frac{T}{2} u_x'^2 - f(x,t) u(x,t)\right] dx.$$

Energia cinetică a corzii este $T = \int_0^l \frac{\rho}{2} u_t'^2 dx$, ρ fiind densitatea lineară a corzii. Funcţia lui Lagrange este deci

$$L = T - U = \int_0^l \left[\frac{\rho}{2} u_t'^2 - \frac{T}{2} u_x'^2 + f(x,t) u(x,t)\right] dx.$$

Mişcarea corzii este dată de acea funcţie $u(x,t)$ care face staţionară funcţionala

$$I[u(x,t)] = \int_0^{t_1} \int_0^l \left[\frac{\rho}{2} u_t'^2 - \frac{T}{2} u_x'^2 + f(x,t) u(x,t)\right] dx dt$$

adică acea funcţie care satisface ecuaţia Euler-Ostrogradski

$$f(x,t) - \rho u_{tt}'' + T u_{xx}'' = 0.$$

Evident vom avea în plus condiţiile la capete $u(o,t) = u(l,t) = 0$ şi condiţiile iniţiale $u(x,0) = u_0(x), \quad u_t'(x,0) = v_0(x)$,poziţia şi viteza iniţială.

In acelaşi mod se poate arăta că ecuaţia micilor oscilaţii transversale ale unei membrane întinse cu o forţă de tensiune pe unitatea de lungime T este

$$f(x,y,t) - \rho u_{tt}'' + T(u_{xx}'' + u_{xx}'') = 0.$$

Exmplul 26. Considerăm acum vibraţiile longitudinale ale unei bare dispuse între $x = 0$ şi $x = l$ în poziţia de echilibru. Fie $u(x,t)$ deplasarea secţiunii de abscisă x

de-a lungul axei Ox la momentul t. Vom presupune că asupra barei acţionează forţa longitudinală pe unitatea de lungime $f(x,t)$ şi că extremităţile sunt fixate cu coeficienţi de elasticitate α_0, α_l. Alungirea elementului $(x, x+dx)$ este $u(x+dx)-u(x) = \frac{\partial u}{\partial x}dx$. La această alungire apare forţa de elasticitate dată de legea lui Hooke $F(x,t) = SE\frac{\partial u}{\partial x}$, cu care porţiunea din dreapta secţiunii de abscisă x acţionează asupra porţiunii din stânga, S fiind secţiunea, E modulul de elasticitate. Asupra elementului $(x, x+dx)$ acţionează forţele $F(x+dx,t) - F(x,t) = SE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$. Puterea necesară deformării este

$$\begin{aligned} P &= \int_0^l ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx - \int_0^l ES\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx = \\ &= -\int_0^l ES\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dx = -\int_0^l ES\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \end{aligned}$$

Rezultă că energia potenţialde deformaţie este $\int_0^l ES\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$. Intreaga energie potenţială este

$$U = \int_0^l \left[\frac{1}{2}SEu_x'^2 dx - f(x,t)u\right]dx + \frac{1}{2}\alpha_0 u(0,t)^2 + \frac{1}{2}\alpha_l u(l,t)^2.$$

Energia cinetică este

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\rho S u_t'^2 dx,$$

ρ fiind densitatea barei. Scriind principiul lui Hamilton rezultă ecuaţia

$$\rho S u_{tt}'' - SEu_{xx}'' = f(x,t)$$

şi condiţiile la limită naturale

$$SEu_x'(0,t) - \alpha_0 u(0,t) = 0, \quad SEu_x'(l,t) + \alpha_l u(l,t) = 0.$$

Dacă capătul $x = 0$ este liber atunci $\alpha_0 = 0$ şi condiţia devine $u_c'(0,t) = 0$; dacă capătul $x = 0$ este fixat rigid atunci $\alpha_0 = \infty$ şi condiţia devine $u(0,t) = 0$.

Exemplul 27. Să stabilim acum ecuaţiile de mişcare ale unui mediu elastic care în poziţia iniţială ocupă un domeniu D din spaţiu raportat la sistemul de coordonate $Ox_1x_2x_3$ cu versorii axelor $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. In fiecare punct $P(x_1, x_2, x_3)$ din domeniul D este definit un tensor de ordinul doi simetric, *tensorul tensiunii*: dacă considerăm în punctul P o suprafaţă mică da de normală $\overrightarrow{n} = n_1\overrightarrow{e_1} + n_2\overrightarrow{e_2} + n_3\overrightarrow{e_3}$ atunci mediul din partea spre care este îndreptată normala acţionează asupra mediului din cealaltă parte cu o forţă care depinde de punct şi linear de versorul normalei şi egală cu

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{n})da &= (T_1\overrightarrow{e_1} + T_2\overrightarrow{e_2} + T_3\overrightarrow{e_3})\,da = \\ &= ((\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)\overrightarrow{e_1} + \\ &\quad +(\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)\overrightarrow{e_2} + \\ &\quad +(\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)\overrightarrow{e_3})da\end{aligned}$$

sau sub forma matricială

$$\overrightarrow{T}(\overrightarrow{n})da = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{pmatrix}da.$$

Componenta σ_{ij} reprezintă componenta pe axa $\overrightarrow{e_i}$ a forţei cu care acţionează mediul spre care este dirijat $\overrightarrow{e_j}$ asupra mediului din cealaltă parte limitat de aria unitate.

In scrierea cu indici muţi cu convenţia ca ori de câte ori un indice literal se repetă să înţelegem sumare după acel indice, componenta pe $\overrightarrow{e_i}$ este

$$T_i = \sigma_{ij}n_{j.}$$

Reamintim că tensorul tensiunilor este simetric $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ cum rezultă din teorema momentului cinetic. Componenta medie pe $\overrightarrow{e_i}$ a forţelor de tensiune care acţionează asupra unei sfere D_ε care se strânge la P este

$$R_i = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\int\limits_{\partial D_\varepsilon}\sigma_{ij}n_j da = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\int\limits_{D_\varepsilon}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}dv = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = \sigma_{ij,j}.$$

(Am folosit notaţia cu indici muţi $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_3}$, prin indicele $,j$ am notat derivarea parţială $\frac{\partial}{\partial x_j}$).

In mişcarea mediului punctul $P(x_1, x_2, x_3)$ capătă coordonatele $x_1' = x_1 + u_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $x_2' = x_2 + u_2(x_1, x_2, x_3, t), = x_3 + u_3(x_1, x_2, x_3, t)$, u_1, u_2, u_3 fiind componentele deplasării. Puterea dezvoltată în deplasare este

$$P \;=\; \int\limits_D \sigma_{ij,j}\frac{\partial u_i}{\partial t}dv - \int\limits_{\partial D}\sigma_{ij}n_j\frac{\partial u_i}{\partial t}da = \int\limits_D \sigma_{ij,j}\frac{\partial u_i}{\partial t}dv - \int\limits_D\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)_{,j}dv =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_D \sigma_{ij}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x_j} = -\frac{1}{2}\int_D \sigma_{ij}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x_j}dv - \frac{1}{2}\int_D \sigma_{ji}\frac{\partial^2 u_j}{\partial t\partial x_i}dv = \\
&= -\int_D \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dv = -\int_D \sigma_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}dv,
\end{aligned}
$$

unde ne-a apărut *tensorul de deformaţie*, evident, tot simetric

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Acesta măsoară deformaţia mediului pentru că dacă considerăm în punctul $P(x_1,x_2,x_3)$ doi vectori dx_i, dy_i în mişcare ei vor deveni $dx_i' = dx_i + \frac{\partial u_i(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_j}dx_j$, $dy_i' = dy_i + \frac{\partial u_i(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_j}dy_j$. Vom avea pentru produsele scalare ale celor doi vectori

$$dx_i'dy_i' - dx_idy_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_idx_j = 2\varepsilon_{ij}dx_idx_j$$

considerând că $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sunt suficient de mici ca produsele lor să fie neglijate.

Intr-un mediu elastic izotrop cu mici deformaţii tensorul de tensiune este legat de tensorul deformaţiilor printr-o relaţie lineară biunivocă

$$\sigma_{ij} = \lambda\left(\varepsilon_{kk}\right)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij},$$

sau

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{kk}\right)\delta_{ij},$$

între parametrii lui Lame λ, μ şi modulul lui Young E şi coeficientul lui Poisson existând relaţiile

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Pentru puterea dezvoltată în deplasare putem scrie

$$
\begin{aligned}
P &= -\int_D \left[\lambda\left(\varepsilon_{kk}\right)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}\right]\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}dv = -\int_D \left[\lambda\left(\varepsilon_{kk}\right)\frac{\partial \varepsilon_{jj}}{\partial t} + 2\mu\varepsilon_{ij}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}\right]dv = \\
&= -\int_D \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left[\lambda\left(\varepsilon_{kk}\right)^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right]dv,
\end{aligned}
$$

deci energia potenţială de deformaţie este

$$U = \int\limits_D \frac{1}{2}\left[\lambda\left(\varepsilon_{kk}\right)^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right] dv.$$

Forma pătratică

$$w(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\left[\lambda\left(\varepsilon_{kk}\right)^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right]$$

reprezintă densitatea spaţială a energiei potenţiale şi este pozitiv definită ca o sumă de pătrate. Vom observa că

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

şi după teorema lui Euler pentru funcţii omogene

$$w(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}.$$

Exprimând pe ε_{ij} în funcţie σ_{ij} găsim exptesia densităţii spaţiale a energiei potenţiale în funcţie de σ_{ij}

$$w(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}\left[\frac{-\nu}{E}(\sigma_{kk})^2 + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}\sigma_{ij}\right]$$

Exprimată în funcţie de deplasare, densitatea spaţială a energiei potenţiale este

$$w = \frac{\lambda}{2}\left(\operatorname{div}\overrightarrow{u}\right)^2 + \mu\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] +$$
$$+\frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2\right].$$

Energia cinetică este

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_D \rho\left|\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t}\right|^2 dv = \frac{1}{2}\int\limits_D \rho\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right].$$

Se poate scrie deci expresia funcţiei lui Lagrange $L = T - U$. Ecuaţiile Euler-Lagrange sunt

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\overrightarrow{u} - \mu\nabla^2 u_i - \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\overrightarrow{u} + \rho\overrightarrow{F} = 0, i = 1, 2, 3,$$

sau scrise pe scurt vectorial

$$\rho\frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\overrightarrow{u} + \mu\triangle\overrightarrow{u} + \rho\overrightarrow{F}.$$

Acestea se numesc *ecuaţiile lui Lame* şi trebuie integrate când se cunosc deplasările $\overrightarrow{u}$ şi vitezele $\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t}$ la momentul iniţial şi pe o porţiune a frontierei $\partial_u D$ la orice moment se cunosc vitezele $\overrightarrow{u}$ iar pe o altă porţiune complementară de frontieră $\partial\sigma D$ se cunosc tensiunile normale $\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j$.

Exemplul 28. Să considerăm acum micile vibraţii transversale ale unei bare orizontale dispusă după axa Ox_1, axele Ox_2, Ox_3 fiind axe principale de inerţie a secţiunii verticale şi asupra căreia acţionează o forţă transversală dirijată după verticală cu densitatea $f(x_3, t)$. In acest caz bara va lucra numai la încovoiere. Vom adopta modelul din rezistenţa materialelor. Experienţa arată că are loc *ipoteza lui Bernoulli-Euler* conform căreia secţiunile transversale perpendiculare pe axa barei până la încovoiere rămân plane şi perpendiculare pe axa deformată şi nu se deformează în planele lor. După încovoiere punctul de pe axă cu vectorul de poziţie iniţial $x_1 \overrightarrow{i_1}$ se deplasează în punctul cu vectorul de poziţie $(x_1 + u(x_1, t)\overrightarrow{i_1} + w(x_1, t)\overrightarrow{i_3}$. Versorul tangentei la axa deformată este

$$\frac{(1 + u'_{x_1}(x_1, t))\overrightarrow{i_1} + w'_{x_1}(x_1, t)\overrightarrow{i_3}}{\sqrt{1 + 2u'_{x_1}(x_1, t) + u'_{x_1}(x_1, t)^2 + w'_{x_1}(x_1, t)^2}}.$$

Derivatele sunt calculate în raport cu x_1. Facem ipoteza că deplasările sunt aşa de mici că lungimea axei deformate nu se modifică, adică $w'_{x_1}(x_1, t)$ este de un ordin de mărime ε astfel încât ε^2 este neglijabil, $u'_{x_1}(x_1, t)$ este de ordinul de mărime ε^2 şi $2u'_{x_1}(x_1, t) + w'_{x_1}(x_1, t)^2 \approx 0$. In acest fel versorul tangentei la axa deformată este

$$\overrightarrow{t} = (1 + u'_{x_1}(x_1, t))\overrightarrow{i_1} + w'_{x_1}(x_1, t)\overrightarrow{i_3} \cong \overrightarrow{i_1} + w'_{x_1}(x_1, t)\overrightarrow{i_3},$$

iar versorul normalei este

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{t} \times \overrightarrow{i_2} = -w'_{x_1}(x_1, t)\overrightarrow{i_1} + (1 + u'_{x_1}(x_1, t))\overrightarrow{i_3} \cong -w'_{x_1}(x_1, t)\overrightarrow{i_1} + \overrightarrow{i_3}.$$

După ipoteza lui Bernoulli-Euler, punctul cu vectorul de poziţie iniţial $x_1\overrightarrow{i_1} + x_2\overrightarrow{i_2} + x_3\overrightarrow{i_3}$ se deplasează în punctul cu vectorul de poziţie

$$(x_1 + u(x_1, t)\overrightarrow{i_1} + w(x_1, t)\overrightarrow{i_3} + x_2\overrightarrow{i_2} + x_3\overrightarrow{n},$$

adică deplasarea este

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= u(x_1, t)\overrightarrow{i_1} + w(x_1, t)\overrightarrow{i_3} + x_3(\overrightarrow{n} - \overrightarrow{i_3}) = \\ &= (u(x_1, t) - w'_{x_1}(x_1, t)x_3)\overrightarrow{i_1} + w(x_1, t)\overrightarrow{i_3}. \end{aligned}$$

(S-au lăsat la o parte mărimile negijabile). Singura componentă nenulă a tensorului deformaţie este $\varepsilon_{11} = -x_3 w''_{x_1x_1}(x_1,t)$ şi deci şi singura componentă nenulă a tensorului tensiune este $\sigma_{11} = -Ex_3 w''_{x_1x_1}(x_1,t)$. Rezultanta tensiunilor din secţiunea x_1 este $\overrightarrow{T} = -Ew''_{x_1x_1}(x_1,t)\iint x_3 dx_2 dx_3 \overrightarrow{i_1} = 0$, iar momentul rezultant este

$$\overrightarrow{M} = -Ew''_{x_1x_1}(x_1,t)\iint \begin{vmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} dx_2 dx_3 = Ew''_{x_1x_1}(x_1,t) I_3 \overrightarrow{i_2},$$

adică la încovoiere în bară apare un *moment de incovoiere* dat de legea lui Euler-Bernoulli cu $M = EI_3C$, $C = w''_{x_1x_1}(x_1,t)$ fiind curbura barei deformate în aproximaţia făcută, I_3 momentul de inerţie al secţiunii în raport cu axa orizontală perpendiculară pe bară . Energia potenţială a unui element iniţial cuprins între abscisele x_1 şi $x_1 + dx_1$ este

$$\frac{1}{2}EI\left(w''_{x_1x_1}(x_1,t)\right)^2 dx_1 - f(x_1,t)w(x_1,t)dx_1.$$

Se găseşte pentru acţiune expresia

$$I[u(x_1,t)] = \int_0^{t_1}\int_0^{l}\left[\frac{1}{2}\rho S w_t'^2 dx_1 - \frac{1}{2}EI_3 w''^2_{x_1x_1} + f(x_1,t)w\right]dx_1 dt.$$

Ecuaţia Euler-Ostrogradski corespunzătoare este

$$\rho S w''_{tt} + EIw''''_{x_1x_1x_1x_1} = f(x_1,t).$$

Condiţiile la capete depind de regimul de lucru al acestora. Dacă unul din capete este fixat, atunci în el au loc condiţii de forma $w = 0, \quad w'_x = 0$; dacă capătul este liber atunci au loc condiţii de forma $w = 0, w''_{xx} = 0$. Dacă în capete se pun anumite legături elastice, atunci în expresia energiei potenţiale trebuie adăugaţi termeni de forma

$$\frac{1}{2}\left[\alpha_0 w(0,t)^2 + \beta_0 w_x'^2(0,t)\right] + \frac{1}{2}\left[\alpha_l w(l,t)^2 + \beta_l w_x'^2(l,t)\right]$$

şi atunci apar condiţiile naturale de forma

$$\begin{aligned} EI_3 w''(0,t) - \beta_0 w'_x(0,t) &= 0, \quad EI_3 w'''_{xxx}(0,t) + \alpha_0 w(0,t) = 0 \\ EI_3 w''(l,t) + \beta_l w'_x(l,t) &= 0, \quad EI_3 w'''_{xxx}(l,t) - \alpha_l w(l,t) = 0. \end{aligned}$$

Dacă în capete apar şi forţe exterioare şi momente exterioare aceste condiţii devin neomogene.

Bineînţeles, ca un caz limită avem cazul echilibrului barei la încovoiere, caz în care dispar derivatele în raport cu timpul:

$$EI_3 w''''_{xxxx} = f(x)$$

cu condiţiile corespunzătoare la capete. In cazul barei $(-l, l)$ fixate rigid la capete sub acţiunea greutăţii

$$w(x) = -\frac{EI\rho Sg}{24}(x^2 - l^2)^2$$

în timp ce pentru bara rezemată la capete se obţine

$$w(x) = -\frac{EI\rho Sg}{24}(x^2 - l^2)(x^2 - 5l^2).$$

Deplasarea pe orizontală $u(x)$ se poate obţine din relaţia $u'(x) = -\frac{1}{2}w'(x)^2$.

Exemplul 29. Experienţa arată că dacă asupra unei bare metalice $0 \leq x \leq l$, fixată rigid în $x = 0$ şi astfel încât în $x = l$ să nu aibă deplasări laterale, acţionează staţionar în capătul $x = l$ o forţă longitudinală de compresiune P, de la o anumită valoare critică a forţei P_c bara se flambează. Ne propunem să determinăm această valoare critică.

După exemplul precedent secţiunea de abscisă x capătă o deplasare $u(x)$ în lungul barei şi o deplasare $w(x)$ perpendiculară pe bară. In aceeaşi ipoteză că lungimea liniei centrelor nu se modifică vom presupune că pătratul lui $w'(x)$ este neglijabil şi că deplasarea $u(x)$ este astfel că $2u'(x) + w'^2(x) \cong 0$. Atunci energia potenţială a barei va fi

$$\frac{1}{2}EI\int_0^l w''^2(x)dx + P(u(l) - u(0)) = \frac{1}{2}\int_0^l (EIw''^2(x) - Pw'^2(x))dx.$$

După principiul lui Hamilton problema se reduce la determinarea minimului acţiunii adică al funcţionalei

$$I[w(x)] = \frac{1}{2}\int_0^l (EIw''^2(x) - Pw'^2(x))dx$$

cu condiţiile la capete $w(0) = w(l) = 0$ sau notând $\alpha(x) = w'(x)$

$$I[\alpha(x)] = \frac{1}{2}\int_0^l (EI\alpha'(x)^2 - P\alpha^2(x))dx$$

. Rezultă ecuaţia lui Euler-Lagrange

$$\alpha'' + \frac{P}{EI}\alpha = 0$$

Poziţia nedeformată a barei $w(x) \equiv 0$ dă extremala $\alpha(x) \equiv 0$. Problema este dacă aceasta realizează sau nu minimul energiei potenţiale. Condiţia lui Legendre este îndeplinită pentru că $F_{\alpha'\alpha'} = EI > 0$. Ecuaţia lui Iacobi este

$$\eta'' + \frac{P}{EI}\eta = 0.$$

Soluţia acesteia cu condiţiile $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = 1$ este $\eta(x) = \sqrt{\frac{EI}{P}} \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x$. Ea se anulează în punctele $x = n\pi\sqrt{\frac{EI}{P}}, n \in Z$. Extremala $\alpha(x) \equiv 0$ realizează minimul funcţionalei numai dacă $l < \pi\sqrt{\frac{EI}{P}}$. Rezultă că forţa critică de la care poate începe flambajul este $P_c = \frac{\pi^2}{l^2}EI$. Dacă $P = P_c$ avem extremala $w(x) = \frac{C_2}{\sqrt{\frac{P}{EI}}} \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x$.

Puteam demonstra cele de mai sus şi ţinând cont că o funcţie $w(x)$ care verifică condiţiile la capete este de forma

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

şi atunci energia potenţială este

$$I[w(x)] = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left[\frac{\pi^2 EI}{l^2} - P \right] n^2.$$

Se vede că dacă $P < P_c$ atunci toate parantezele sunt strict pozitive şi minimul lui $I[w(x)]$ este nul atins pentru toţi $a_n = 0$. Dacă $P \geq P_c$ atunci se obţine o valoare strict negativă luând $a_n = 0$, $n \geq 2$ şi a_1 oarecare, adică poziţia nedeformată nu mai asigură minimul energiei potenţiale. Observăm că neţinând cont de factorii nelineari putem determina numai forma barei abstracţie de un factor de proporţionalitate.

11.31 Alte principii variaţionale în elasticitate

Să reconsiderăm acum cazul elastostaticii arătând alte funcţionale care au extreme pe soluţia problemei. Trebuie să găsim câmpul de deplasări $\overrightarrow{u}(x_1, x_x, x_2)$ în domeniul D ocupat de mediul elastic pentru care tensiunile corespunzătoare lor $\sigma_{ij}(x_1, x_x, x_2)$, adică date de relaţiile

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$w(\varepsilon_{ij})$ fiind densitatea spaţială a energiei potenţiale, satisfac ecuaţiile de echilibru

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, i = 1, 2, 3,$$

şi condiţiile la limită

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^d \quad pe \quad \partial_u D, \\ \sigma_{ni} &= \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ni}^d \quad pe \quad \partial\sigma D. \end{aligned}$$

Vom căuta o funcţională $I[u_i] = I[\varepsilon_{ij}]$ care să devină staţionară în soluţia problemei pe mulţimea deplasărilor cinematic admisibile, adică acele deplasări care satisfac condiţia $u_i = u_i^d \quad pe \quad \partial_u D$. Notând cu $\delta u_i, \delta\varepsilon_{ij}$ variaţiile deplasărilor admisibile şi a deformaţiilor corespunzătoare, vom căuta variaţia funcţionalei în aşa fel încât la anularea ei să fie satisfăcute ecuaţiile de mai sus

$$\begin{aligned} \delta I &= k_1 \int_D (\sigma_{ij,j} + F_i)\delta u_i dV + k_2 \int_D (\sigma_{ij} - \frac{\partial w(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}})\delta\varepsilon_{ij} dV + \\ &+ k_3 \int_{\partial\sigma D} (\sigma_{ni} - \sigma_{ni}^d)\delta u_i dA. \end{aligned}$$

Cum

$$\sigma_{ij,j}\delta u_i = (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij}\delta u_{i,j} = (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$$

vom avea

$$\begin{aligned} \int_D \sigma_{ij,j}\delta u_i dV &= \int_{\partial D} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dA - \int_D \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = \\ &= \int_{\partial\sigma D} \sigma_{ni}\delta u_i dA - \int_D \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV \end{aligned}$$

şi deci

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_D \left[-k_1\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + k_2\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} - k_2\frac{\partial w(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} - F_i\delta u_i\right] dV + \\ &+ \int_{\partial\sigma D} \left[k_1\sigma_{ni}\delta u_i + k_3\sigma_{ni}\delta u_i - k_3\sigma_{ni}^d\delta u_i\right] dA. \end{aligned}$$

Dacă alegem $k_1 = k_2 = -1$, $k_3 = 1$ atunci

$$\delta I = \int_D \left[\frac{\partial w(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} - F_i\delta u_i\right] dV - \int_{\partial\sigma D} \sigma_{ni}^d \delta u_i dA$$

sau

$$\delta I = \delta \left\{ \int\limits_{D} \left[w(\varepsilon_{ij}) - F_i u_i \right] dV - \int\limits_{\partial\sigma D} \sigma_{ni}^d u_i dA \right\}.$$

Deci funcţionala care devine staţionară pe mulţimea deplasărilor cinematic admisibile este

$$I[u_i] = \int\limits_{D} \left[w(\varepsilon_{ij}) - F_i u_i \right] dV - \int\limits_{\partial\sigma D} \sigma_{ni}^d u_i dA.$$

Vom observa că

$$\delta^2 I = \int\limits_{D} \frac{\partial^2 w(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{lm}} \delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{lm} dV = 2 \int\limits_{D} w(\delta\varepsilon_{ij}) dV > 0,$$

adică funcţionala este chiar minimă pentru soluţia problemei. Funcţionala $I[u_i]$ se numeşte *energia potenţială a deplasărilor cinematic admisibile*. Am obţinut urmatorul principiu variaţional, numit *principiul variaţional al energiei potenţiale minime pe mulţimea deplasărilor cinematic admisibile*:

$$I[u_i + \delta u_i] \geq I[u_i]$$

oricare ar fi deplasarea $u_i + \delta u_i$ cinematic admisibilă.

Vom căuta acum o funcţională $J[\sigma_{ij}]$ care să devină staţionară pe mulţimea tensiunilor static admisibile, adică acele tensiuni care verifică ecuaţiile de echilibru

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, i = 1, 2, 3,$$

şi condiţia la limită

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ni}^d \quad pe \quad \partial\sigma D.$$

Variaţiile acestor tensiuni static admisibile vor trebui să satisfacă relaţiile

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ij,j} &= 0, \\ \delta\sigma_{ni} &= \delta\sigma_{ij} n_j = 0 \quad pe \quad \partial\sigma D. \end{aligned}$$

Cum deplasările corespunzătoare tensiunilor soluţie trebuie să satisfacă relaţiile

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial w(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}, \\ u_i &= u_i^d \quad pe \quad \partial_u D \end{aligned}$$

Vom căuta variaţia funcţionalei sub forma

$$\delta J = k_1 \int_D \left[\varepsilon_{ij} - \frac{\partial w(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}\right] \delta\sigma_{ij} dV + k_2 \int_{\partial_u D} [u_i - u_i^d]\delta\sigma_{ni} dA.$$

Cum

$$\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} = u_{i,j}\delta\sigma_{ij} = (u_i\delta\sigma_{ij})_{,j} - u_i(\delta\sigma_{ij})_{,j} = (u_i\delta\sigma_{ij})_{,j}$$

avem

$$\int_D \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} dV = \int_{\partial D} u_i\delta\sigma_{ij}n_j dA = \int_{\partial_u D} u_i\delta\sigma_{ni} dA$$

şi deci

$$\delta J = -k_1 \int_D \frac{\partial w(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} dV + \int_{\partial_u D} [k_1 u_i\delta\sigma_{ni} + k_2 u_i\delta\sigma_{ni} - k_2 u_i^d\delta\sigma_{ni}] dA$$

sau alegând $k_1 = -k_2 = 1$

$$\delta J = -\int_D \frac{\partial w(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} dV + \int_{\partial_u D} u_i^d\delta\sigma_{ni} dA.$$

Funcţionala care este staţionară în soluţie pe mulţimea tensiunilor admisibile este

$$J[\sigma_{ij}] = -\int_D w(\sigma_{ij}) dV + \int_{\partial_u D} u_i^d\sigma_{ni} dA.$$

Deoarece

$$\delta^2 J = -\int_D \frac{\partial^2 w(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}\partial \sigma_{lm}}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{lm} dV = -2\int_D w(\delta\sigma_{ij}) dV < 0$$

funcţionala $J[\sigma_{ij}]$ numită *energia potenţială a tensiunilor static admisibile* este maximă pe soluţia problemei

$$J[\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}] \leq J[\sigma_{ij}].$$

Acesta este *principiul de maxim a energiei potenţiale a tensiunilor static admisibile.*

Să observăm că

$$\begin{aligned} I[u_i] - J[\sigma_{ij}] &= 2\int_D w dV - \int_D F_i u_i dV - \int_{\partial\sigma D} \sigma_{ni}^d u_i dA - \int_{\partial_u D} u_i^d \sigma_{ni} dA = \\ &= \int_D \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV - \int_D F_i u_i dV - \int_{\partial\sigma D} \sigma_{ni}^d u_i dA - \int_{\partial_u D} u_i^d \sigma_{ni} dA. \end{aligned}$$

Dar dacă avem o soluţie u_i, σ_{ij} prin înmulţirea ecuaţiilor de echilibru cu u_i şi însumare şi integrare obţinem

$$\begin{aligned}\int_D (\sigma_{ij,j}u_i + F_i u_i)dV &= \int_D [(\sigma_{ij}u_i)_{,j} - \sigma_{ij}u_{i,j} + F_i u_i]dV = \\ &= \int_{\partial D} \sigma_{ni}u_i dA - \int_D [\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - F_i u_i]dV = 0,\end{aligned}$$

adică

$$2\int_D w dV = \int_D F_i u_i dV + \int_{\partial\sigma D} \sigma_{ni}^d u_i dA + \int_{\partial_u D} u_i^d \sigma_{ni} dA.$$

Aceasta relaţie, numită teorema energiei potenţiale, arată că $I[u_i] = J[\sigma_{ij}]$ pentru soluţie u_i, σ_{ij} , deci pentru soluţie are loc relaţia

$$\max_{\sigma^* \; statica \, dmisibil\breve{a}} J[\sigma_{ij}^*] = J[\sigma_{ij}] = I[u_i] = \min_{u^* \; cinematic \, admisibil\breve{a}} I[u].$$

Aceste principii variaţionale stau la baza metodei elementelor finite de rezolvare a problemelor elasticităţii. Se vede uşor că teorema energiei potenţiale arată că soluţia problemei de elasticitate este unică.

11.32 Metode directe în calcul variaţional

Am văzut că problema minimizării unei funcţionale $I[y(x)]$ este rezolvată în mod obişnuit în calculul variaţional prin reducerea acestei probleme la rezolvarea ecuaţiei Euler-Lagrange cu condiţiile la limită impuse de problemă. De multe ori aceasta poate fi o problemă destul de complicată. De aceea se recurge la aşa numitele metode directe de rezolvare a problemei minimizării funcţionalelor sau a problemei la limită la care se reduce aceasta. Metodele directe sunt metode aproximative.

Fie de minimizat funcţionala $I[y(x)]$ despre care se ştie că are o margine inferioară exactă $\inf I[y(x)] = m > -\infty$. Să presupunem că printr-un mod oarecare reuşim să construim un şir de funcţii $y_1(x)$, y$_2(x)$, ...,$y_n(x)$,... astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} I[y_n(x)] = m.$$

In cele mai multe situaţii practice se întâmplă că şirul minimizant $\{y_n(x)\}$ are o limită $y(x)$ astfel că $I[y(x)] = m$. In acest fel oricare din funcţiile $y_n(x)$ constituie o aproximare a soluţiei problemei iniţiale.

Din punct de vedere istoric prima metodă directă a fost propusă de către Euler şi se poate numi *metoda diferenţelor divizate*. In această metodă pentru găsirea minimului funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, y(a) = y_a, y(b) = y_b,$$

pentru a obţine un şir minimizant se împarte intervalul $[a, b]$ în n părţi egale de lungime $h = \frac{b-a}{n}$, se înlocuieşte funcţia necunoscută printr-o funcţie continuă lineară pe fiecare porţiune, derivata se în locuieşte prin panta funcţiei pe fiecare porţiune, iar integrala se înlocuieşte printr-o formulă de cuadratură. In acest fel funcţionala devine o funcţie de cele cele $n-1$ valori ale funcţiei în nodurile interioare. Punând condiţia de minim a acestei funcţii rezultă un sistem de n-1 ecuaţii cu n-1 necunoscute. Rezolvând acest sistem obţinem valorile în noduri ale unei funcţii $y_n(x)$. Pentru diferiţi n aceste funcţii dau un şir minimizant a cărui limită este funcţia căutată.

Exemplul 30. Fie de minimizat funcţionala

$$I[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy)dx, y(0) = y(1) = 0.$$

Luăm $n = 5$, $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$. Notăm

$$y(0) = 0, y(0.2) = y_1, y(0,4) = y_2, y(0.6) = y_3, y(0.8) = y_4, y(1) = 0.$$

Ca aproximaţii pentru derivate vom avea

$$\begin{aligned} y'(0) &= \frac{y_1 - 0}{0.2}, y'(0.2) = \frac{y_2 - y_1}{0.2}, y'(0.4) = \frac{y_3 - y_2}{0.2}, \\ y'(0.6) &= \frac{y_4 - y_3}{0.2}, y'(0.8) = \frac{0 - y_4}{0.2}. \end{aligned}$$

Inlocuim integrala funcţionalei prin formula dreptunghiurilor stângi şi obţinem în locul funcţionalei funcţia

$$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left[\begin{array}{c} \left(\frac{y_1-0}{0.2}\right)^2 + \left(\frac{y_2-y_1}{0.2}\right)^2 + y_1^2 + 0.4y_1 + \left(\frac{y_3-y_2}{0.2}\right)^2 + \\ +y_2^2 + 0.8y_2 + \left(\frac{y_4-y_3}{0.2}\right)^2 + y_3^2 + 1.2y_2 + \left(\frac{0-y_4}{0.2}\right)^2 + \\ +y_4^2 + 1.6y_4 \end{array} \right] 0.2$$

Avem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{2y_1}{0.04} - \frac{2(y_2 - y_1)}{0.04} + 2y_1 + 0.4 = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} &= \frac{2(y_2-y_1)}{0.04} - \frac{2(y_3-y_2)}{0.04} + 2y_2 + 0.8 = 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y_3} &= \frac{2(y_3-y_2)}{0.04} - \frac{2(y_4-y_3)}{0.04} + 2y_3 + 1.2 = 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y_4} &= \frac{2(y_4-y_3)}{0.04} - \frac{2y_4}{0.04} + 2y_4 + 1.6 = 0.
\end{aligned}$$

Rezolvând sistemul găsim

$$y_1 = -0.0286, y_2 = -0.0503, y_3 = -0.0580, y_4 = -0.0442.$$

Soluţia exactă este

$$y = \frac{e}{e^2-1}(e^x - e^{-x}) - x$$

ale cărei valori exacte cu patru zecimale sunt

$$y(0.2) = -0.0287, y(0.04) = -0.0505, y(0.6) = -0.0583, y(0.8) = -0.0444.$$

Se vede că obţinem o aproximaţie destul de bună.

O altă metodă directă este *metoda lui Ritz* propusă de acesta în 1908. In această metodă pentru găsirea minimului funcţionalei

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, y(a) = y_a, y(b) = y_b,$$

se consideră şirul de funcţii

$$y(n,x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$$

unde funcţiile $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...$ sunt linear independente şi alese astfel ca $y_n(x)$ să verifice condiţiile la capete, de exemplu

$$\varphi_0(a) = y_a, \varphi_0(b) = y_b, \varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0.$$

Funcţiile $\varphi_i(x)$ se numesc funcţiile coordonate. Valoarea funcţionalei pe funcţia $y(n,x)$ este

$$I[y(n,x)] = \Phi(c_1, c_2, ..., c_n).$$

Din condiţia de minim a funcţiei $\Phi(c_1, c_2, ..., c_n)$ se determină valorile coeficienţilor c_i. Funcţia $y(n,x)$ cu aceşti coeficienţi o notăm cu $y_n(x)$. In problemele practice şirul de funcţii $y_n(x)$ este un şir minimizant care tinde către soluţia problemei de minim.

Exemplul 31. Să se minimizeze funcţionala din exemplul precedent

$$I[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy)dx, y(0) = y(1) = 0.$$

Alegem funcţiile de coordonate

$$\varphi_0(x) = 0, \varphi_1(x) = x^2 - x, ..., \varphi_i(x) = x^{i+1} - x^i, ...$$

Pentru n=2

$$\begin{aligned} y(2,x) &= c_1(x^2 - x) + c_2(x^3 - x^2) \\ y'(2,x) &= c_1(2x-1) + c_2(3x^2 - 2x) \end{aligned}$$

$$I[y(2,x)] = \Phi(c_1, c_2) = \frac{11}{30}c_1^2 + \frac{11}{30}c_1c_2 + \frac{1}{7}c_2^2 - \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{10}c_2.$$

Punând condiţiile de minim avem

$$\begin{aligned} \frac{11}{15}c_1 + \frac{11}{30}c_2 &= \frac{1}{6} \\ \frac{11}{30}c_1 + \frac{2}{7}c_2 &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

şi deci $c_1 = \frac{69}{473}, c_2 = \frac{7}{43}$ şi

$$y_2(x) = \frac{77x^3 - 8x^2 - 69x}{473}.$$

Comparăm soluţia exactă cu soluţia aproximativă în tabelul

x	$y(x)$	$y_2(x)$
0.0	0.0000	0.0000
0.2	−0.0287	−0.0285
0.4	−0.0505	−0.0506
0.5	−0.0566	−0.0568
0.6	−0.0583	−0.0585
0.8	−0.0444	−0.0442
1.0	0.0000	0.0000

Exemplul . Să găsim o soluţie aproximativă a problemei de minimizare a funcţionalei

$$I[z(x,y)] = \iint_D \left(\frac{\partial z}{\partial x}^2 + \frac{\partial z}{\partial y}^2 - 2z \right) dxdy$$

unde D este pătratul $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$ şi $z = 0$ pe frontiera pătratului.

Vom alege aproximaţia

$$z_1(x,y) = c_1(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)$$

care verifică condiţia pe frontieră. Găsim

$$I[z_1(x,y)] = \frac{256}{45}a^8c_1^2 - \frac{32}{9}a^6c_1 = \Phi(c_1).$$

Condiţia de minim dă $c_1 = \frac{5}{16a^2}$ şi o valoare aproximativă este

$$z_1(x,y) = \frac{5}{16a^2}(x^2 - a^2)(y^2 - a^2).$$

Metoda lui Ritz poate fi aplicată pentru găsirea valorilor aproximative ale valorilor proprii în problemele Sturm-Liouville.

Exemplul 32. Să găsim valori aproximative ale primelor două valori proprii ale problemei Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda^2 y = 0, y(-1) = y(1) = 0.$$

Această problemă Sturm-Liouville este ecuaţia Euler-Lagrange pentru funcţionala

$$I[y(x)] = \int_{-1}^{1}(y'^2 - \lambda^2 y^2)dx, y(-1) = y(1) = 0.$$

Alegem aproximaţia

$$y(2,x) = c_1(1 - x^2) + c_2(x^2 - x^4).$$

Avem

$$I[y(2,x)] = c_1^2(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}\lambda^2) + 2c_1c_2(\frac{8}{15} - \frac{16}{105}\lambda^2) + c_2^2(\frac{88}{105} - \frac{16}{315}\lambda^2) = \Phi(c_1,c_2).$$

Condiţiile de minim sunt

$$\begin{aligned} 2c_1(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}\lambda^2) + 2c_2(\frac{8}{15} - \frac{16}{105}\lambda^2) &= 0 \\ 2c_1(\frac{8}{15} - \frac{16}{105}\lambda^2) + 2(\frac{88}{105} - \frac{16}{315}\lambda^2) &= 0. \end{aligned}$$

Pentru a exista soluţie nebanală a acestui sistem trebuie ca determinantul coeficienţilor să fie nul, adică

$$\lambda^4 - 28\lambda^2 + 63 = 0$$

de unde găsim

$$\lambda_1^2 = 2.46744, \lambda_2^2 = 25.53256.$$

Prima şi a doua valoare proprie exactă sunt

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 2.46740, \lambda_2^2 = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 = 22.20661$$

adică prima valoare proprie este dată suficient de precis, în timp ce a doua este dată mai puţin precis.

11.33 Exerciţii

1. Să se găsească soluţii aproximative pentru următoarele probleme de minimizare şi să se compare cu soluţia exactă:

a) $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 + 2y)dx, y(0) = y(1) = 0.$

R. Soluţia exactă este $y = \frac{x^2-x}{2}$.

b) $I[y(x)] = \int\limits_0^2 (2xy + y^2 + y'^2)dx, y(0) = y(2) = 0.$

R. Soluţia exactă este $y = \frac{2\sinh x}{\sinh 2} - x$.

2. Să se găsească prima valoare proprie a problemei Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda(1 + x^2)y = 0, y(-1) = y(1) = 0.$$

R. Alegând $y(2, x) = c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)$ se găseşte pentru prima valoare proprie aproximaţia $\lambda_1 = 2.1775$.

PARTEA IV

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

CAPITOLUL 12

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL INTAI

12.1 Problema Cauchy, suprafeţe caracteristice

Funcţia $u = u(x_1, x_2, ..., x_n), (x_1, x_2, ..., x_2) \in D \subset R^n$ cu derivate parţiale continue este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, p_1, p_2, ..., p_n) = 0, p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0,$$

dacă înlocuind-o în ecuaţie o transformă într-o identitate în D.

Dacă $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ este soluţie a ecuaţiei, relaţia

$$u = u(x_1, x_2, ..., x_n), (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n,$$

poate fi considerată ca ecuaţie a unei suprafeţe n-dimensionale în spaţiul R^{n+1} al variabilelor $x_1, x_2, \cdots, x_n, u$. Această suprafaţă se numeşte *suprafaţă integrală* a ecuaţiei cu derivate parţiale.

Dacă există o expresie din care se poate deduce orice soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi, această expresie se numeşte *soluţia generală a ecuaţiei* . Ecuaţia $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ are soluţia generală $u = \varphi(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ unde φ este o funcţie oarecare. In general soluţia generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi depinde de o funcţie arbitrară.

Prin *problemă Cauchy* pentru o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi se înţelege determinarea unei soluţii $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ pentru care se cunosc valorile

$u = u^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ pe o suprafaţă S n-1-dimensională din spaţiul variabilelor independente R^n cu ecuaţia implicită $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Suprafaţa S poate fi dată şi parametric prin ecuaţiile

$$x_i = x_i^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1}), i = 1, 2, ..., n \tag{12.1}$$

şi atunci valorile lui u sunt $u = u^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1})$. Valorile date ale funcţiei necunoscute se numesc *datele problemei Cauchy*, iar suprafaţa S se numeşte *suprafaţa purtătoare a datelor Cauchy*.

Să presupunem că $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ este soluţia unei probleme Cauchy cu datele Cauchy $u = u^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ pe suprafaţa purtătoare S de ecuaţie $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. In ipoteza că $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \neq 0$ pe S putem face schimbarea de variabile

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 &= x_2 \\ &. \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Variabila x_1 devine o funcţie $x_1(y_1, y_2, ..., y_n)$, soluţia u devine o funcţie $u(y_1, y_2, ..., y_n)$, datele devin o funcţie $u^0(y_2, y_3, ..., y_n)$, iar ecuaţia devine

$$F(x_1, y_2, ..., y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial y_n}) = 0.$$

Dacă problema Cauchy are soluţie unică din această ecuaţie în fiecare punct al suprafeţei integrale putem scoate în mod unic valorile derivatei parţiale $\frac{\partial u}{\partial y_1}$. Acest lucru se întâmplă numai dacă

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \neq 0.$$

Suprafaţa purtătoare $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ a datelor $u = u^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ pentru care

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0$$

adică, pentru care problema Cauchy este nedeterminată sau imposibilă, se numeşte *suprafaţă caracteristică*. Pe o suprafaţă purtătoare caracteristică vectorul normal de componente $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$ este ortogonal pe vectorul $\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}, \frac{\partial F}{\partial p_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial p_n}\right)$, deci ultimul vector este în planul tangent la suprafaţa purtătoare. Rezultă că dacă purtătoarea este dată parametric prin relaţiile (12.1) , ea este caracteristică atunci când

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1} & \frac{\partial F}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_1^0}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2^0}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x_n^0}{\partial s_1} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_1^0}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_2^0}{\partial s_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n^0}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi poate fi considerată ca o legătură între parametrii normalelor la suprafaţă în fiecare punct al suprafeţei integrale. In fiecare punct al suprafeţei integrale, ecuaţia defineşte o familie depinzând de $n-1$ parametrii de posibile plane tangente la suprafaţă de ecuaţii

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i(X_i - x_i) - (U-u) &= 0 \\ F(x_1, ..., x_n, u, p_1, ..., p_n) &= 0, \end{aligned}$$

unde X_i, U sunt coordonatele curente ale punctelor planelor. Infăşurătoarea acestei familii de posibile plane tangente la suprafaţa integrală este un con T cu vârful în punctul considerat. Acest con se numeşte *conul caracteristic al ecuaţiei* sau *conul lui Monge*. Ca să găsim ecuaţia generatoarelor acestui con, numite *raze caracteristice*, luăm ca parametri independenţi pe $p_2, ..., p_n$ şi scriem că planul tangent

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(X_i - x_i) - (U-u) = 0$$

se intersectează cu oricare din planele infinit vecine

$$(p_1 + \frac{\partial p_1}{\partial p_k} dp_k)(X_1 - x_1) + p_2(X_2 - x_2) + ... + (p_k + dp_k)(X_k - x_k) + ...$$

$$+p_n(X_n - x_n) - (U-u) = 0, k = 2, 3, ..., n.$$

Rezultă

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_k}(X_1 - x_1) + (X_k - x_k) = 0, k = 2, 3, ..., n.$$

Pe de altă parte derivând în raport cu p_k ecuaţia dată avem

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial p_k} + \frac{\partial F}{\partial p_k} = 0, k = 2, 3, ..., n.$$

Deci

$$\frac{X_1 - x_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{X_2 - x_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = ... = \frac{X_n - x_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}$$

Din ecuaţia planului tangent avem

$$\begin{aligned} U - u &= \frac{X_1 - x_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}(p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1} + ... + p_n \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{X_n - x_n}{X_1 - x_1}) = \\ &= \frac{X_1 - x_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \end{aligned}$$

Obţinem ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale conului caracteristic

$$\frac{X_1 - x_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{X_2 - x_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = ... = \frac{X_n - x_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{U - u}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}}$$

Ajungem la concluzia că o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi defineşte în fiecare punct $(x_1, x_2, ..., x_n, u)$ al spaţiului R^{n+1} un con caracteristic, conuri care joacă acelaşi rol pe care în ecuaţii diferenţiale îl juca câmpul tangentelor la curba integrală. De asemenea observăm că am regăsit vectorul $\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}, \frac{\partial F}{\partial p_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial p_n}\right)$ de această dată independent de soluţia integrală, asociat oricărui punct $(x_1, x_2, ..., x_n, u)$ al spaţiului R^{n+1}.

12.2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasilineare

Definiţia 1. Ecuaţia de forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_j} - b(x_1, x_2, ..., x_n, u) = 0$$

unde funcţiile $a_1, ..., a_n, b$ sunt definite şi cu derivate de ordinul întâi continue pe un domeniu $\Omega \subset R^{n+1}$ şi $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 \neq 0$ în Ω se numeşte *ecuaţie cvasilineară*.

Definiţia 2. O funcţie $u : D \subset R^n \to R$ de clasă C^1 cu proprietatea că

$$(x_1, x_2, ..., x_n, u(x_1, x_2, ..., x_n)) \in \Omega, \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$$

şi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, x_2, ..., x_n, u(, , ...,))\frac{\partial u(, , ...,)}{\partial x_j} &= b(x_1, x_2, ..., x_n, u(, , ...,)), \\ \forall (x_1, x_2, ..., x_n) &\in D \end{aligned}$$

este soluţie a ecuaţiei cvasilineare.

Ecuaţia cvasilineară semnifică faptul că vectorul de componente

$$(a_1(x_1, x_2, ..., x_n, u), ..., a_n(x_1, x_2, ..., x_n, u), b(x_1, x_2, ..., x_n, u))$$

este un vector tangent la suprafaţa integrală, conul caracteristic se reduce la o dreaptă, *raza caracteristică,* cu ecuaţiile

$$\frac{X_1 - x_1}{a_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)} = \frac{X_2 - x_2}{a_2} = ... = \frac{X_n - x_n}{a_n} = \frac{U - u}{b}.$$

Curbele de pe suprafaţa integrală care sunt înfăşurătoare ale acestor raze caracteristice vor satisface sistemul

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)} = \frac{dx_2}{a_2} = ... = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b} = dt.$$

Acesta este un sistem de $n + 1$ ecuaţii cu $n + 1$ necunoscute şi poate fi considerat independent de modul în care a fost stabilit. El se numeşte *sistemul caracteristic asociat ecuaţiei cvasilineare*, orice soluţie a sa va fi numită *curbă caracteristică*.

Teorema 1. Dacă γ este o curbă caracteristică -soluţie a sistemului

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)} = ... = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)} = \frac{du}{b(x_1, x_2, ..., x_n, u)} = dt$$

care trece prin punctul $P^0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, u^0)$ de pe suprafaţa integrală

$$S = \{(x_1, x_2, ..., x_n, u(x_1, x_2, ..., x_n))|(x_1, x_2, ..., x_n) \in D\}$$

atunci γ se află complet pe suprafaţa integrală S.

In adevăr dacă γ este dată prin $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, n$, $z = z(t)$ unde

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, x_2, ..., x_n, z), ..., \frac{dx_n}{dt} = a_n(x_1, x_2, ..., x_n, z), \frac{dz}{dt} = b(x_1, x_2, ..., x_n, z)$$

cu condiţiile $x_i(t^0) = x_i^0$, $z(t^0) = u^0$ considerăm funcţia

$$U(t) = z(t) - u(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)).$$

Evident $U(t^0) = 0$. Deasemenea

$$\frac{dU}{dt}(t) = \frac{dz}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = b(x, z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} a_j(x, z) =$$

$$= b(x, u(x(t)) + U(t)) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} a_j(x, u(x(t)) + U(t)),$$

adică am obţinut că U verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{dU(t)}{dt} = b(x, u(x(t)) + U(t)) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(x) a_j(x, u(x(t)) + U(t)).$$

Dar $U \equiv 0$ este soluţie a acestei ecuaţii, cum rezultă din faptul că u este soluţie a ecuaţiei cvasilineare. Din unicitatea soluţiei problemei Cauchy $U(t^0) = 0$ rezultă că $U \equiv 0$ este unica soluţie şi deci curba γ se află pe S, c.c.t.d..

Rezultă următoarele consecinţe

Consecinţa 1. Dacă două suprafeţe integrale au un punct comun, atunci ele se intersectează după curba caracteristică care trece prin acel punct

Consecinţă 2. Dacă două suprafeţe integrale se intersectează (fără a fi tangente) după o curbă, atunci acea curbă este o curbă caracteristică.

Problema Cauchy: să se determine o soluţie $u = u(x)$ a ecuaţiei cvasilineare

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u)\partial_j u - b(x, u) = 0$$

cunoscând valorile $u^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ ale soluţiei pe suprafaţa S n-1-dimensională din R^n de ecuaţie $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, u(x) = u^0(x), \forall x \in S$ poate avea soluţie unică numai dacă S este necaracteristică, adică dacă vectorul de componente

$$(a_1(x_1, x_2, ..., x_n, u^0(x_1, x_2, ..., x_n)), ..., a_n(x_1, x_2, ..., x_n, u^0(x_1, x_2, ..., x_n)))$$

nu este tangent la S în $(x_1, x_2, ..., x_n)$, adică dacă are loc relaţia

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, x_2, ..., x_n, u^0(x_1, x_2, ..., x_n)) \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} \neq 0,$$

pentru $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$, sau dacă S este dată parametric prin ecuaţiile

$$x_i = x_i^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1}), i = 1, 2, ..., n$$

are loc relaţia

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1(x, u^0(x)) & a_2(x, u^0(x)) & ... & a_n(x, u^0(x)) \\ \frac{\partial x_1^0}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2^0}{\partial s_1} & ... & \frac{\partial x_n^0}{\partial s_1} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_1^0}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_2^0}{\partial s_{n-1}} & ... & \frac{\partial x_n^0}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Are loc următoarea teoremă

Teorema 2. Dacă S este o suprafaţă în R^n de clasă C^1 necaracteristică, adică coeficienţii ecuaţiei cvasilineare sunt funcţii de clasă C^1 astfel încât vectorul

$$(a_1(x, u^0(x)), ..., a_n(x, u^0(x)))$$

nu este tangent la S în x, atunci problema Cauchy are soluţie unică.

Considerăm suprafaţa $n-1$-dimensională $S^* = \{(x, u), u = u^0(x),\ x \in S\}$. Dacă $u = u(x)$ este soluţie a problemei Cauchy, atunci graficul ei este alcătuit din curbele caracteristice care se sprijină pe suprafaţa S^* . Dacă considerăm S dată parametric, ceea ce se poate presupune totdeauna, rezolvăm problema Cauchy pentru sistemul caracteristic

$$\frac{\partial x_j(s,t)}{\partial t} = a_j(x, y), j = 1, ..., n, \frac{\partial u(s,t)}{\partial t} = b(x, u),$$

$$x_j(s, 0) = x_j^0(s), j = 1, ..., n, u(s, 0) = u^0(x_j^0(s)).$$

Avem

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} & ... & \frac{\partial x_n}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & ... & \frac{\partial x_n}{\partial s_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial s_{n-1}} & ... & \frac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Cum $\Delta \neq 0$ rezultă că din relaţiile $x_j = x_j(s, t), j = 1, ..., n,$ se pot scoate funcţiile $s = s(x), t = t(x)$. Luând $u = u(x) = u(s(x), t(x))$ avem evident $u = u^0$ pe S şi prin derivarea funcţiilor compuse ne convingem că u verifică şi ecuaţia cvasilineară. Deci $u = u(x)$ este ecuaţia unei suprafeţe integrale a soluţiei problemei Cauchy. Aceasta este unică pentru că orice altă suprafaţă integrală care trece prin S^* este generată de curbe caracteristice care trec prin S^* şi acestea sunt unic determinate ca mai sus.

Să presupunem acum că suprafaţa purtătoare S este o suprafaţă caracteristică şi că soluţia problemei Cauchy $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ există. Atunci pe suprafaţa iniţială $S^* = \{(x, u), u = u^0(x),\, x \in S\}$ avem

$$\frac{\partial u^0}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i^0}{\partial s_j}, j = 1, 2, ..., n-1.$$

Cum $\Delta = 0$ rezultă că există parametrii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ astfel că

$$a_i(x, u^0(x)) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial x_i^0}{\partial s_j}, i = 1, 2, ..., n$$

Din ecuaţie avem

$$b(x, u^0(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial x_i^0}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u^0}{\partial s_j}.$$

Vedem deci că vectorul $(a_1, a_2, ..., a_n, b)$ al razei caracteristice este situat în planul tangent al suprafeţei iniţiale S^*, altfel spus suprafaţa iniţială este alcătuită din înfăşurătoare ale razelor caracteristice, adică din curbe caracteristice. Deci, dacă suprafaţa purtătoare este o caracteristică, atunci pentru ca problema Cauchy să aibă soluţie este necesar ca suprafaţa iniţială să fie generată de curbe caracteristice.

Să presupunem acum că această condiţie este îndeplinită. Construim o suprafaţă n-1-dimensională S_1^* care să intersecteze suprafaţa iniţială S^* după o suprafaţă n-2-dimensională S^{**} şi a cărei proiecţie S_1 pe spaţiul variabilelor independente să nu fie caracteristică. Acest luctru se poate face într-o infinitate de moduri cum rezultă intuitiv din cazul $n = 2$ când S^* coincide cu o curbă caracteristică, S^{**} reprezintă un punct luat pe această curbă caracteristică, S_1^* este o curbă oarecare care trece prin S^{**}. Cum S_1^* nu este caracteristică există o suprafaţă integrală care trece prin ea, suprafaţă alcătuită din curbe caracteristici care trec prin S_1^*. Acele curbe caracteristice care trec prin S^{**} vor forma suprafaţa S^*, şi deci suprafaţa integrală va trece prin suprafaţa iniţială S^*. Am demonstrat deci următoarea

Teorema 3. Dacă o suprafaţă purtătoare de date Cauchy este suprafaţă caracteristică, pentru ca problema Cauchy să aibă soluţie este necesar ca suprafaţa iniţială să fie generată de curbe caracteristice. In acest caz problema Cauchy are o infinitate de soluţii.

Exemplul 1. Să rezolvăm problema Cauchy

$$u\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}=1,$$

cu datele

$$u=\frac{s}{2}\quad pe\quad segmentul\quad x_1=x_2=s, 0<s<1.$$

Avem

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \frac{s}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-\frac{s}{2}\neq 0, 0<s<1.$$

Rezolvăm problema Cauchy pentru sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{u}=\frac{dx_2}{1}=\frac{du}{1}=dt, x_1(0)=s, x_2(0)=s, u(0)=\frac{s}{2}.$$

Obţinem

$$\begin{cases} x_1(s,t)=\frac{t^2}{2}+\frac{st}{2}+s \\ x_2(s,t)=t+s \\ u(s,t)=t+\frac{s}{2} \end{cases}$$

Rezolvând primele două găsim

$$\begin{cases} t(x)=\frac{2(x_1-x_2)}{x_2-2} \\ s(x)=\frac{x_2^2-2x_1}{x_2-2} \end{cases}$$

şi deci soluţia problemei Cauchy este

$$u(x)=t(x)+\frac{s(x)}{2}=\frac{x_2^2-4x_2+2x_1}{2(x_2-2)}.$$

Exemplul 2. Să se rezolve problema Cauchy

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}=u, u\,|_S=u^0$$

suprafaţa purtătoare S fiind mulţimea

$$S=\{(x_1,x_2)|x_1=x_2, x_1>0\}\subset R^2.$$

In acest caz ecuaţiile parametrice ale lui S sunt $\begin{cases} x_1=s, \\ x_2=s, s>0 \end{cases}$ şi $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & s \\ 1 & s \end{vmatrix}=0,$ adică S este caracteristică şi deci problema Cauchy nu are soluţie decât dacă curba iniţială

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ u &= u(x_1,x_2) \end{aligned}$$

este o curbă caracteristică . Sistemul caracteristic având soluţia

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10}e^t \\ x_2 &= x_{20}e^t \\ u &= u_0e^t \end{aligned}$$

rezultă că problema Cauchy are soluţie numai dacă datele sunt de forma $u = Cx_1$. In acest caz ea are o infinitate de soluţii, de exemplu $u = k(x_1 - x_2) + Cx_1$.

Vom arăta că soluţia generală a ecuaţiei este $u(x_1, x_2) = x_1\varphi(\frac{x_1}{x_2})$ cu φ funcţie arbitrară. Pe S avem $u(x_1, x_2) = \varphi(1)x_1$ pentru $x_2 > 0$.

12.3 Ecuaţii lineare omogene

Fie ecuaţia cu derivate parţiale lineară omogenă (e.d.p.l.o.)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

unde $a_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $a_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, ..., $a_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ sunt funcţii cu derivate parţiale continue pe un domeniu $\Omega \subset R^n$. O suprafaţă S din R^n de ecuaţie $\varphi(x) = 0$ este *suprafaţă caracteristică* pentru ecuaţia dată dacă are loc relaţia

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$$

adică dacă vectorul $\vec{v}(x_1, x_2, ..., x_n)$ cu componentele

$$(a_1(x_1, x_2, ..., x_n), a_2(, , ...,), ..., a_n(, , ...,))$$

este tangent la suprafaţa S. Pe de altă parte, ecuaţia dată semnifică faptul că derivata funcţiei u în direcţia vectorului $\vec{v}$ este nulă $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$. După teoria generală de mai sus suprafeţele integrale sunt generate de curbele caracteristice soluţii ale sistemulul

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{du}{0} = dt.$$

Suntem conduşi să considerăm numai proiecţiile acestora pe spaţiul variabilelor independente, liniile vectoriale ale câmpului vectorial $\vec{v}$, adică curbele din spaţiul variabilelor independente care verifică sistemul

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,x_2,...,x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1,x_2,...,x_n)} = ... = \frac{dx_n}{a_n(x_1,x_2,...,x_n)} = dt.$$

Acest sistem se numeşte *sistemul caracteristic asociat e.d.p.l.o.*, iar orice soluţie a sa determină o *curbă caracteristică a e.d.p.l.o.*

Este aproape evidentă următoarea teoremă

Teorema 1. Funcţia $u(x_1,x_2,...,x_n)$ este soluţie a e.d.p.l.o. dacă şi numai dacă ea este o *integrală primă* a sistemului caracteristic asociat e.d.p.l.o, adică este constantă de-a lungul oricărei curbe caracteristice.

In adevăr, dacă $u(x)$ este o soluţie a e.d.p.l.o. şi dacă $x = x(t)$ este o curbă caracteristică atunci

$$\frac{d}{dt}u(x(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x(t))}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x(t))}{\partial x_j}a_j(x(t)) = 0,$$

adică $u(x)$ este integrală primă a sistemului caracteristic.

Invers, dacă x_0 este un punct din domeniul Ω de definiţie al e.d.p.l.o., dacă $u(x)$ este o integrală primă a sistemului caracteristic şi dacă $x = x(t)$ este o soluţie a sistemului caracteristic cu $x(0) = x_0$, atunci pentru orice t în vecinătatea lui 0 avem relaţia

$$0 = \frac{d}{dt}u(x(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x(t))}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_j(x(t))\frac{\partial u(x(t))}{\partial x_j}$$

şi luând $t = 0$ obţinem $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x_0)\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_j} = 0$. Cum x_0 este arbitrar, rezultă că $u(x)$ este soluţie a e.d.p.l.o., c.c.t.d.

Consecinţă. Dacă $u_1(x), u_2(x), ..., u_k(x)$ sunt k integrale prime ale sistemului caracteristic şi dacă F este o funcţie de k variabile cu derivate parţiale continue, atunci $u = F(u_1(x), u_2(x), ..., u_k(x))$ este soluţie a e.d.p.l.o.

In adevăr,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial u_l}\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial u_l}{\partial x_j} = 0.$$

Teorema 2. In orice punct $x^0 \in \Omega$ cu $\vec{v}(x^0) \neq 0$ există $n-1$ integrale prime ale sistemului caracteristic asociat e.d.p.l.o.

Presupunem că $a_n(x^0) \neq 0$. Pentru sistemul caracteristic, problema Cauchy $x(0) = \xi, \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}, x_n^0)$ apropiat de x^0 are soluţia $x = \varphi(t; \xi)$ sau scrisă pe componente

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t;\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-1},x_n^0) \\ .... \\ x_n = \varphi_n(t;\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-1},x_n^0) \end{cases}$$

Interpretând aceste relaţii ca un sistem în $(t,\xi_1,...,\xi_{n-1})$ condiţia iniţială $x(0)=\xi$ arată că acest sistem are soluţia $(0,x_1^0,...,x_n^0)$ şi că în acest punct $\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)}{D(t,\xi_1,...,\xi_{n-1})} = (-1)^n a_n(x^0) \neq 0$. Din teorema funcţiilor implicite, rezultă că există funcţiile $v,u_1,...,u_{n-1}$ de clasă C^1 pe o vecinătate a lui x^0 astfel că $t=v(x),\xi_1=u_1(x),...,\xi_{n-1}=u_{n-1}(x)$. Evident acestea nu sunt constante şi se vede că avem

$$\frac{D(u_1,u_2,...,u_{n-1})}{D(x_1,...,x_{n-1})} = 1$$

adică funcţiile $u_1,...,u_{n-1}$ sunt funcţional independente în vecinătatea lui x^0. Să arătăm că aceste funcţii sunt integrale prime ale sistemului caracteristic. Din definiţia acestor funcţii rezultă că pentru curba caracteristică $x=\varphi(t;\xi)$ definită mai sus avem $u_i(\varphi(t;\xi))=\xi_i$, deci este integrală primă pentru această curbă caracteristică. Dacă $x=\psi(t;\varsigma)$ este curba caracteristică cu $\psi(0;\varsigma)=\varsigma$, sistemul fiind autonom avem $\psi(t+\tau;\varsigma)=\psi(t;\psi(\tau;\varsigma))$. Dar sistemul $\varsigma=\psi(\tau;\xi)$ are conform teoremei funcţiilor implicite o soluţie unică $(\tau(\varsigma),\xi_1(\varsigma),...,\xi_{n-1}(\varsigma))$ şi deci vom avea

$$\psi(t;\varsigma)=\psi(t+\tau(\varsigma);\psi(\tau(\varsigma),\xi_1(\varsigma),...,\xi_{n-1}(\varsigma)))=\varphi(t;\xi).$$

Deci pentru orice soluţie $u_i(\psi(t;\varsigma))=const$.

Avem acum

Consecinţă. Sistemul caracteristic asociat e.d.p.l.o are numai $n-1$ integrale prime funcţional independente.

In adevăr, dacă $u_1,u_2,...,u_{n-1}$ sunt cele $n-1$ integrale prime date de teorema precedentă şi u este o altă integrală primă, avem sistemul

$$\sum_{j=1}^n a_j\partial_j u=0, \sum_{j=1}^n a_j\partial_j u_1=0,..., \sum_{j=1}^n a_j\partial_j u_{n-1}=0,$$

care poate fi considerat ca un sistem omogen cu necunoscutele nu toate nule $a_1,...,a_n$. Determinantul acestui sistem, chiar iacobianul funcţiilor $u,u_1,...,u_{n-1}$ este nul deci există o funcţie U astfel că $u = U(u_1, ..., u_{n-1})$. Am arătat astfel că ultima expresie $u = U(u_1, ..., u_{n-1})$, cu U funcţie arbitrară, este soluţia generală a e.d.p.l.o.

Integralele prime $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ se determină formând combinaţii integrabile prin amplificarea rapoartelor ecuaţiilor sistemului caracteristic cu funcţiii convenabile $\lambda_j(x)$ astfel încât expresia $\lambda_1 dx_1 + ... + \lambda_n dx_n$ este diferenţiala unei funcţii $u(x)$, iar $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n \equiv 0$. In acest caz $u(x) = const$ este o integrală primă.

Exemplul 1. Să determinăm soluţia generală a e.d.p.l.o. care rezultă din formula lui Euler pentru funcţii omogene de grad zero:

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Din sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = ... = \frac{dx_n}{x_n} = dt$$

se găsesc imediat următoarele integrale prime

$$u_1 = \frac{x_1}{x_n}, u_2 = \frac{x_2}{x_n}, ..., u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

(în ipoteza $x_n \neq 0$). Rezultă că soluţia generală este

$$u = U\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

adică expresia generală a funcţiilor omogene de grad zero.

Exemplul 2. Pentru a determina soluţia generală a ecuaţiei

$$y\partial_x u - x\partial_y u = 0$$

observăm că sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = dt$$

are integrala primă $x^2 + y^2 = const$, deci soluţia generală este $u = F(x^2 + y^2)$, cu F funcţie arbitrară, adică suprafaţa integrală este o suprafaţă de rotaţie în jurul axei Ou.

Să considerăm problema lui Cauchy restrânsă pentru ecuaţia $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u = 0$, adică problema determinării unei soluţii $u(x)$ astfel că dacă S este o mulţime deschisă din hiperplanul $x_n = x_n^0$ să aibă loc $u(x) = u^0(x)$ pentru $x \in S$. Dacă $a_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0) \neq$

0 problema lui Cauchy restrânsă are soluţie unică pentru orice funcţie cu derivate continue $u^0(x)$. In adevăr, fie $u_1, ..., u_{n-1}$ $n-1$ integrale prime ale sistemului caracteristic. Din cele $n-1$ relaţii

$$u_1(x_1, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \bar{u}_1, ..., u_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \bar{u}_{n-1}$$

se pot scoate funcţiile $x_1 = \varphi_1(\bar{u}_1, ..., \bar{u}_{n-1}), ..., x_{n-1} = \varphi_{n-1}(\bar{u}_1, ..., \bar{u}_{n-1})$ cu derivate parţiale continue. Atunci funcţia $u = u^0(\varphi_1(u_1, ..., u_{n-1}), ..., \varphi_{n-1}(u_1, ..., u_{n-1}))$ este soluţia problemei Cauchy restrânse.

Exemplul 3. Să determinăm soluţia $u = u(x,t)$ în semiplanul $t > 0$ a ecuaţiei

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0$$

care verifică relaţia $u(x, 0) = u^0(x)$. Sistemul caracteristic

$$dt = \frac{dx}{a} = d\tau$$

are integrala primă $x - at = const$ şi deci soluţia generală este $u = F(x - at)$, de unde ţinând cont de condiţie $F(x) = u^0(x)$ şi deci soluţia căutată este $u = u^0(x - at)$.

Observăm de aici că dacă interpretăm pe t drept timp, pe $u = u(x, t)$ drept abaterea în punctul de abscisă x şi la momentul t unei mărimi de la mărimea nulă, abatere provocată de perturbaţia la momentul iniţial $u^0(x)$ de la mărimea nulă, soluţia obţinută $u = u^0(x - at)$ arată că perturbaţia iniţială se propagă în spaţiu şi timp, deci avem de-a face cu o undă. Observăm că dacă perturbaţia iniţială $u^0(x)$ este nenulă în vecinătatea punctului de abscisă x_0 , $u = u^0(x - at)$ este nenulă în vecinătatea punctului de abscisă $x_0 + at$, adică unda se propagă în direcţia pozitivă a axei Ox cu viteza a.

Problema lui Cauchy generală pentru ecuaţia $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ constă în determinarea unei soluţii $u(x)$ care verifică $u(x) = u^0(x), \forall x \in S$, S fiind o hipersuprafaţă $n-1$-dimensională în R^n . Dacă $\varphi(x) = 0$ este ecuaţia lui S, prin schimbarea de variabilă $y_1 = x_1, ..., y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = \varphi(x)$ problema Cauchy generală se transformă în problema restrânsă pentru ecuaţia $\sum\limits_{k=1}^{k=n} \bar{a}_k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_k} = 0$. Condiţia $\bar{a}_n \neq 0$ este de fapt condiţia $\sum\limits_{j=1}^{j=n} a_j \frac{\partial h}{\partial x_j} \neq 0$, adică avem teorema:

Teorema 3. Dacă S nu este o suprafaţă caracteristică pentru e.d.p.l.o. şi dacă $u^0(x)$ este o funcţie de clasă C^1 în vecinătatea lui S, atunci problema Cauchy pentru S cu datele $u^0(x)$ are soluţie unică, adică există într-o vecinătate a lui S o soluţie u a e.d.p.l.o. care verifică relaţia $u = u^0$ pe S.

Şi acum soluţia problemei Cauchy se determină imediat dacă se cunosc $n-1$ integrale prime ale sistemului caracteristic $u_1, ..., u_{n-1}$. Din relaţiile

$$u_1(x_1, ..., x_n) = \bar{u}_1, ..., \bar{u}_{n-1}(x_1, ..., x_n) = \bar{u}_{n-1}, h(x_1, ..., x_n) = 0$$

se determină funcţiile

$$x_1 = \varphi_1(\bar{u}_1, ..., \bar{u}_{n-1}), ..., x_n = \varphi_n(\bar{u}_1, ..., \bar{u}_{n-1}).$$

Atunci funcţia

$$u = u^0(\varphi_1(u_1, ..., u_{n-1}), ..., \varphi_n(u_1, ..., u_{n-1}))$$

este evident soluţia problemei Cauchy.

Dacă suprafaţă S este dată parametric

$$x_1 = x_1^0(s_1, ..., s_{n-1}), x_2 = x_2^0(s_1, ..., s_{n-1}), ..., x_n = x_n^0(s_1, ..., s_{n-1}),$$

din relaţiile

$$u_i(x_1^0(s_1, ..., s_{n-1}), ..., x_n^0(s_1, ..., s_{n-1})) = \bar{u}_i, i = 1, ..., n-1$$

determinăm parametrii s_i ca funcţiii de $\bar{u}_i$ şi apoi procedăm ca mai sus.

Problema Cauchy poate fi rezolvată şi fără determinarea integralelor prime. Anume dacă suprafaţă S este dată parametric prin $x = x^0(s)$ se rezolvă problema Cauchy pentru sistemul caracteristic $\frac{dx_j}{dt} = a_j(x), x(0) = x^0(s)$ găsind soluţia $x = \varphi(t; x^0(s))$. Din aceasta se găseşte $t = t(x), s = s(x)$. Soluţia problemei Cauchy este $u = u^0(x^0(s(x)))$.

Iacobi a arătat că ecuaţiei cvasilineare

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u)\partial_j u - b(x, u) = 0$$

i se poate asocia o ecuaţie lineară omogenă cu un număr de variabile independente cu o unitate mai mare:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u)\frac{\partial V}{\partial x_j} + b(x, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

Teorema următoare arată legătura între cele două ecuaţii:

Teorema 4. a) Dacă V este o soluţie a e.d.p.l.o asociată ecuaţiei cvasilineare definite pe $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ iar $(x_0, u_0) \in \tilde{\Omega}$ este astfel că $\frac{\partial V}{\partial u}(x_0, u_0) \neq 0$, atunci funcţia $u = u(x)$ definită de ecuaţia $V(x, u) - V(x_0, u_0) = 0$ este soluţie a ecuaţiei cvasilineare.

b) Dacă $u = u(x)$ este o soluţie a ecuaţiei cvasilineare, atunci există V soluţie a e.d.p.l.o. astfel că $V(x, u(x)) \equiv 0$.

Demonstraţie

a) Cum $\frac{\partial V}{\partial u}(x_0, u_0) \neq 0$ există o funcţie $u :: \tilde{D} \to R$ astfel că $V(x, u(x)) - V(x_0, u_0) = 0$ şi ale cărei derivate parţiale sunt date de relaţiile

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}(x, u(x)) + \frac{\partial V}{\partial u}(x, u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, j = 1, ..., n.$$

Inmulţind cu $a_j(x, u(x))$ şi adunând avem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j}(x, u(x))a_j(x, u(x)) + \frac{\partial V}{\partial u}(x, u(x)) \sum_{j=1}^{n} a_j(x, u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}(x, u(x)) = 0.$$

Cum V este soluţie a e.d.p.l.o. avem şi

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u(x))\frac{\partial V}{\partial x_j}(x, u(x)) + \frac{\partial V}{\partial u}(x, u(x))\ b(x, u(x)) = 0.$$

Rezultă

$$\frac{\partial V}{\partial u}(x, u(x)) \left[\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}(x, u(x)) - b(x, u(x))\right] = 0$$

şi cum $\frac{\partial V}{\partial u}(x, u(x)) \neq 0$ rezultă că u este soluţie a ecuaţiei cvasilineare.

b) Fie $V_1, V_2, ..., V_n$ n integrale prime ale sistemului caracteristic asociat e.d.p.l.o.

$$\frac{dx_1}{a_1(x, u)} = ... = \frac{dx_n}{a_n(x, u)} = \frac{du}{b(x, u)} = dt.$$

Fie $U_i(x) = V_i(x, u(x))$. Avem

$$\frac{D(U_1, U_2, ..., U_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} + \frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_n} \\ ... & .... & .... \\ \frac{\partial V_n}{\partial x_1} + \frac{\partial V_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial V_n}{\partial x_n} + \frac{\partial V_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Scriind că $V_1, V_2, ..., V_n$ sunt integrale prime şi că u este soluţie obţinem un sistem de $n + 1$ ecuaţii cu n necunoscute $a_1, a_2, ..., a_n$. Pentru compatibilitate trebuie să avem

$$0 = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial V}{} \end{array} \right| .$$

Cum $b(x, u(x)) \neq 0$ rezultă că funcţiile $U_1, ..., U_n$ sunt funcţional dependente, deci există Φ de clasă C^1 astfel că

$\Phi(U_1, ..., U_n) \equiv 0$. Dar atunci funcţia $V(x, u) = \Phi(V_1(x, u), ..., V_n(x, u))$ este soluţie a e.d.p.l.o. şi $V(x, u(x)) \equiv 0$.

Teorema precedentă ne dă o modalitate de a găsi soluţia generală a ecuaţiei cvasilineare.

Exemplul 4. Să găsim soluţia generală a ecuaţiei date de formula lui Euler pentru funcţii omogene de gradul m:

$$x_1\partial_1 u + x_2\partial_2 u + ... + x_n\partial_n u = mu.$$

Sistemul caracteristic asociat e.d.p.l.o.

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = ... = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}$$

are evident integralele prime

$$\frac{x_1}{x_n} = const, \frac{x_2}{x_n} = const, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n} = const, \frac{u}{x_n^m} = const$$

şi deci soluţia generală este dată implicit prin ecuaţia $\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{u}{x_n^m}\right) = 0$ sau explicitând ultimul raport $u = x_n^m \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$, adică forma generală a unei funcţii omogene de gradul m.

12.4 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi nelineare

Considerăm ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, p_1, p_2, ..., p_n) = 0, p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0$$

şi o suprafaţă integrală a sa $u = u(x_1, x_2, ..., x_n), (x_1, x_2, ..., x_2) \in D \subset R^n$. Prin fiecare punct al acestei suprafeţe integrale se poate duce conul caracteristic corespunzător. Unul din planele tangente la conul caracteristic va coincide cu planul tangent la suprafaţa integrală în vârful conului. In acest plan tangent la suprafaţa integrală va exista o generatoare a conului. Pe aceasta o vom numi *raza caracteristică a suprafeţei integrale* în punctul dat. Această rază caracteristică este determinată de coordonatele $x_1, x_2, ..., x_n, u$ ale punctului şi de mărimile $p_1, p_2, ..., p_n, -1$, parametrii normalei la planul tangent în care se află. Curbele de pe suprafaţa integrală care sunt înfăşurătoare ale razelor caracteristice vor satisface sistemul

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = ... = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{du}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}} = dt,$$

t fiind un parametru real. Derivând ecuaţia dată în raport cu variabila $x_i, i = 1, 2, ..., n$ avem

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u}p_i + \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, ..., n$$

sau ţinând cont de sistemul de mai sus şi de faptul că $\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$ găsim

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial p_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial p_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial F}{\partial u}p_i + \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, ..., n$$

sau

$$\frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial u}p_i + \frac{\partial F}{\partial x_i}\right), i = 1, 2, ..., n.$$

Deci înfăşurătoarele razelor caracteristice de pe suprafaţa integrală trebuie să verifice sistemul

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = .. = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{du}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial u}p_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1}} = .. = -\frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial u}p_n + \frac{\partial F}{\partial x_n}} = dt$$

cu condiţia

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, p_1, p_2, ..., p_n) = 0.$$

Acest sistem de $2n+1$ ecuaţii cu $2n+1$ necunoscute $x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n$ poate fi considerat independent de modul în care a fost dedus. El se numeşte *sistemul caracteristic* asociat ecuaţiei cu derivate parţiale nelineare. Dacă derivatele parţiale $\frac{\partial F}{\partial p_i}$, $i = 1, 2, ..., n, \frac{\partial F}{\partial u}$ sunt funcţii cu derivate parţiale de ordinul doi continue atunci pentru condiţii iniţiale date sistemul caracteristic are soluţie unică cu derivate de ordinul doi continue. In plus dacă condiţiile iniţiale sunt funcţii de două ori derivabile continuu de nişte parametri, atunci şi soluţiile vor avea derivate de ordinul doi continue în raport cu acei parametri.

Cum

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{ds}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{ds}= \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}+\frac{\partial F}{\partial u}\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial F}{\partial p_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_i}(\frac{\partial F}{\partial u}p_i+\frac{\partial F}{\partial x_i})=0\end{aligned}$$

rezultă că funcţia membru stăng al ecuaţiei $F(x_1, x_2, ..., x_n, u, p_1, p_2, ..., p_n)$ este integrală primă a sistemului caracteristic.

Orice soluţie $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t), ...,$ $x_n = x_n(t)$, $u = u(t)$, $p_1 = p_1(t)$, $p_2 = p_2(t), ..., p_n = p_n(t)$ a sistemului caracteristic care verifică relaţia $F(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t),$ $u(t),$ $p_1(t),$ $p_2(t), ...,$ $p_n(t)) = 0$ se numeşte *bandă caracteristică*, iar curba $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t), ...,$ $x_n = x_n(t)$, $u = u(t)$, suportul benzii caracteristice se numeşte *curbă caracteristică*.

Exact ca la ecuaţii cvasilineare, are loc teorema

Teorema 1. Dacă o bandă caracteristică are un element comun cu o suprafaţă integrală, atunci ea aparţine în întregime suprafeţei.

Ca o consecinţă

Consecinţă. Dacă două suprafeţe integrale sunt tangente într-un punct, atunci ele sunt tangente de-a lungul întregii caracteristici care trece prin acel punct.

Fie problema Cauchy cu suprafaţa S purtătoare a datelor

$$x_1 = x_1^0(s_1, ..., s_{n-1}), x_2 = x_2^0(s_1, ..., s_{n-1}), ..., x_n = x_n^0(s_1, ..., s_{n-1}),$$

cu datele $u = u^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1})$. Curba iniţială S^* este deci

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0(s_1, ..., s_{n-1}), \\ x_2 &= x_2^0(s_1, ..., s_{n-1}), \\ & ...., \\ x_n &= x_n^0(s_1, ..., s_{n-1}), \\ u &= u^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1}). \end{aligned}$$

Din relaţiile

$$\frac{\partial u^0}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^0}{\partial s_j}, j = 1, 2, ..., n-1.$$

$$F(x_1^0(s), ..., x_n^0(s), u^0(s), p_1, ..., p_n) = 0$$

definim valorile $p_1^0(s), p_2^0(s), ..., p_n^0(s)$. Considerăm soluţia sistemului caracteristic

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t, s_1, s_2, ..., s_{n-1}), i = 1, 2, ..., n \\ u &= u(t, s_1, s_2, ..., s_{n-1}) \\ p_i &= p_i(t, s_1, s_2, ..., s_{n-1}), i = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} x_i(0, s_1, s_2, ..., s_{n-1}) &= x_i^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1}), i = 1, 2, ..., n \\ u(0, s_1, s_2, ..., s_{n-1}) &= u^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1}) \\ p_i(0, s_1, s_2, ..., s_{n-1}) &= p_i^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1}), i = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

Pentru acest sistem funcţia F va avea valori nule. Vom avea

$$\frac{D(x_1, x_2, ..., x_n)}{D(t, s_1, ..., s_{n-1})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} & ... & \frac{\partial x_n}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & ... & \frac{\partial x_n}{\partial s_1} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial s_{n-1}} & ... & \frac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1} & \frac{\partial F}{\partial p_2} & ... & \frac{\partial F}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & ... & \frac{\partial x_n}{\partial s_1} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial s_{n-1}} & ... & \frac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} = \delta \neq 0$$

dacă suprafaţa purtătoare este necaracteristică. După teorema funcţiilor implicite se vor putea explicita variabilele $t, s_1, s_2, ..., s_{n-1}$ ca funcţii de două ori derivabile de variabilele $x_1, x_2, ..., x_n$. Ca urmare şi u şi p_i vor deveni funcţii de două ori derivabile de $x_1, x_2, ..., x_n$: $u = u(x_1, x_2, ..., x_n), p_i = p_i(x_1, x_2, ..., x_n)$. Pentru a arăta că suprafaţa $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ este suprafaţă integrală este suficient să arătăm că

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = p_i(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Cum sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s_j} &= 0, j = 1, 2, ..., n-1 \end{aligned}$$

cu determinantul $\frac{D(x_1,x_2,...,x_n)}{D(t,s_1,...,s_{n-1})} \neq 0$ are soluţie unică $\frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1,2,...,n$ este suficient să arătăm că funcţiile

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ U_j &= \frac{\partial u}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j}, j = 1,2,...,n \end{aligned}$$

sunt identic nule pentru orice valori ale lui $t, s_1, ..., s_{n-1}$. Din sistemul caracteristic avem

$$V = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \equiv 0.$$

Mai departe

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_j}{\partial t} &= \frac{\partial U_j}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial s_j} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial s_j} - \frac{\partial p_i}{\partial s_j}\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial s_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}\left(p_i \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \\ &= -\frac{\partial F}{\partial u} U_j + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial s_j} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s_j} \right) = \\ &= -\frac{\partial F}{\partial u} U_j \end{aligned}$$

pentru că $F \equiv 0.$ Rezultă

$$U_j(t, s_1, ..., s_{n-1}) = U_j(0, s_1, ..., s_{n-1}) e^{-\int_0^t \frac{\partial F}{\partial u} dt} \equiv 0$$

în virtutea alegerii valorilor iniţiale pentru p_i.

Rezultă că $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ reprezintă o suprafaţă integrală care trece prin suprafaţa iniţială S^*. Ea este unică pentru că orice altă suprafaţă integrală trecând prin S^* trebuie să fie alcătuită din curbe caracteristice trecând prin S^*. Pentru acestea valorile lui p_i se determină tot cum le-am determinat noi şi deci nu pot exista două suprafeţe integrale care să treacă prin S^*.

Am demonstrat teorema

Teorema 2. Dacă suprafaţa purtătoare a datelor Cauchy cu derivată de ordinul doi continuă este suprafaţă necaracteristică atunci problema Cauchy pentru ecuaţia nelineară cu membru stâng cu derivate parţiale de ordinul trei continue are soluţie unică.

Să presupunem acum că există soluţia problemei Cauchy în cazul în care suprafaţa purtătoare S a datelor Cauchy este suprafaţă caracteristică. Atunci din condiţia

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1} & \frac{\partial F}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_1^0}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2^0}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x_n^0}{\partial s_1} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_1^0}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_2^0}{\partial s_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n^0}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} = \delta = 0$$

rezultă că există parametri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ asfel încât

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial x_i^0}{\partial s_j}.$$

Vom avea

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial x_i^0}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u^0}{\partial s_j}$$

Derivând ecuaţia şi ţinând cont de permutabilitatea derivatelor mixte avem

$$\begin{aligned} -p_k^0 \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial x_i^0}{\partial s_j} \frac{\partial p_k^0}{\partial x_i} = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_k^0}{\partial x_i} \frac{\partial x_i^0}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial p_k^0}{\partial s_j} \end{aligned}$$

Ajungem la concluzia că pentru ca problema Cauchy să fie posibilă este necesar ca vectorul

$$\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial p_n}, \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \frac{\partial F}{\partial p_i}, -p_1^0 \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial x1}, ..., -p_n^0 \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$$

să fie combinaţie lineară a celor n-1 vectori

$$\overrightarrow{T_j} = \left(\frac{\partial x_1^0}{\partial s_j}, ..., \frac{\partial x_n^0}{\partial s_j}, \frac{\partial u^0}{\partial s_j}, \frac{\partial p_1^0}{\partial s_j}, ..., \frac{\partial p_n^0}{\partial s_j} \right), j = 1, 2, ..., n-1$$

adică vectorul $\overrightarrow{V}$ este situat în planul tangent al suprafeţei Σ n-1-dimensionale din spaţiul 2n+1 dimensional al variabilelor $x_1, x_2, ..., x_n, u, p_1, p_2, ..., p_n$

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1}), i = 1, ..., n, \\ u &= u^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1}) \\ p_i &= p_i^0(s_1, s_2, ..., s_{n-1}), i = 1, ..., n \end{aligned}$$

Să presupunem acum că avem o problemă Cauchy cu suprafaţa purtătoare S caracteristică pentru datele iniţiale. Mai presupunem că pe suprafaţa iniţială S^* este satisfăcută condiţia de mai sus. Construim o nouă suprafaţă iniţială S_1^* care să intersecteze pe S^* după o suprafaţă n-2 dimensională S^{**} şi astfel încât proiecţia sa S_1 să nu fie caracteristică. Există o suprafaţă integrală care trece prin S_1^* generată de caracteristicile care trec prin S_1^*. Acele caracteristici care trec prin S^{**} vor genera în spaţiul variabilelor $x_1, ..., x_n, u, p_1, ..., p_n$ o suprafaţă Σ^*. Vectorul $\overrightarrow{V}$ este tangent atât la suprafaţa Σ^*,cât şi la suprafaţa Σ. In virtutea unicităţii soluţiilor sistemului caracteristic cele două suprafeţe Σ^*, Σ vor coincide şi proicţia lor pe spaţiul variabilelor $x_1, ..., x_n, u$ coincide ci suprafaţa iniţială S^*. Asta înseamnă că suprafaţa iniţială este generată de caracteristici şi că suprafaţa integrală care trece prin S_1^* trece şi prin S^*. Am demonstrat deci

Teorema 3. Dacă suprafaţa purtătoare este caracteristică pentru ca problema Cauchy să aibă soluţie este necesar ca suprafaţa iniţială să fie generată de curbe caracteristice. In aceasta situaţie problema Cauchy are o infinitate de soluţii.

12.5 Condiţii de compatibilitate

In ideea de a căuta o soluţie generală pentru ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi nelineară să ne ocupăm mai întâi de problema unui sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu o funcţie necunoscută: să se determine funcţia $u(x, y)$ soluţie a sistemului de ecuaţii

$$\begin{aligned} F(x, y, u, p, q) &= 0 \\ G(x, y, u, p, q) &= 0, p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

unde funcţiile F, G au derivate parţiale de ordunul doi în raport cu toate variabilele continue. Dacă $\frac{D(F,G)}{D(p,q)} \neq 0$ atunci putem explicita p, q şi suntem conduşi la sistemul de forma

$$\begin{aligned} p &= A(x, y, u) \\ q &= B(x, y, u), p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Dacă acest sistem are soluţia $u(x,y)$ cu derivate parţiale de ordinul doi, atunci în virtutea intervertirii derivatelor mixte trebuie să avem în mod necesar

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial u}B=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial u}A.$$

Să presupunem această condiţie satisfăcută. Prima ecuaţie

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A(x,y,u)$$

poate fi considerată ca o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi în u şi x, y fiind considerat ca parametru. Fie $u=\varphi(x,y,C)$ soluţia sa generală depinzând de constanta arbitrară C. Vom avea deci

$$\frac{\partial\varphi(x,y,C)}{\partial x}=A(x,y,\varphi(x,y,C)),\forall x,\forall y,\forall C$$

$$\frac{\partial^2\varphi(x,y,C)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial A(x,y,\varphi(x,y,C))}{\partial y}+\frac{\partial A(x,y,\varphi(x,y,C))}{\partial u}\frac{\partial\varphi(x,y,C)}{\partial y},\forall x,\forall y,\forall C$$

$$\frac{\partial^2\varphi(x,y,C)}{\partial C\partial x}=\frac{\partial A(x,y,\varphi(x,y,C))}{\partial u}\frac{\partial\varphi(x,y,C)}{\partial C}.$$

Să facem acum în sistem schimbarea de funcţie $u=\varphi(x,y,v)$ trecând de la funcţia $u(x,y)$ la funcţia $v(x,y)$. Sistemul va deveni

$$\frac{\partial\varphi(x,y,v)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi(x,y,v)}{\partial C}\frac{\partial v}{\partial x}=A(x,y,\varphi(x,y,v))$$

$$\frac{\partial\varphi(x,y,v)}{\partial y}+\frac{\partial\varphi(x,y,v)}{\partial C}\frac{\partial v}{\partial y}=B(x,y,\varphi(x,y,v))$$

sau ţinând seama de relaţiile de mai înainte

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{B(x,y,\varphi(x,y,v)-\frac{\partial\varphi(x,y,v)}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi(x,y,v)}{\partial C}}$$

Să arătăm că membrul drept al celei de-a doua relaţii nu depinde de x. Numărătorul derivatei în raport cu x al acestui membru este

$$(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y})\frac{\partial\varphi}{\partial C}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial C}(B-\frac{\partial\varphi}{\partial y})=$$

$$=(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial u}A-\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial y})\frac{\partial\varphi}{\partial C}-\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial C}(B-\frac{\partial\varphi}{\partial y})=$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial C}\left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u}A - \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial u}B\right) = 0.$$

Sistemul se reduce de fapt la o singură ecuaţie diferenţială de ordinul întâi

$$\frac{dv}{dy} = R(y, v)$$

cu soluţia generală $v = v(y, a)$ unde a este o constantă arbitrară. Rezultă că soluţia generală a sistemului

$$\begin{aligned} p &= A(x, y, u) \\ q &= B(x, y, u), p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

cu condiţia de compatibilitate

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u}B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u}A$$

este $u = \varphi(x, y, v(y, a))$, deci şi ea depinde de o constantă arbitrară.

Revenind la sistemul

$$\begin{aligned} F(x, y, u, p, q) &= 0 \\ G(x, y, u, p, q) &= 0, p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

el poate fi adus la forma de mai sus dacă $\frac{D(F,G)}{D(p,q)} \neq 0$. Cum prin derivări ale celor două ecuaţii găsim

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(u,q)}}{\frac{D(F,G)}{D(p,q)}}, \frac{\partial q}{\partial u} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(u,p)}}{\frac{D(F,G)}{D(p,q)}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,p)}}{\frac{D(F,G)}{D(p,q)}}, \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(y,q)}}{\frac{D(F,G)}{D(p,q)}}$$

găsim în final condiţia de compatibilitate

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{dF}{dx} \\ \frac{\partial G}{\partial p} & \frac{dG}{dx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{dF}{dy} \\ \frac{\partial G}{\partial q} & \frac{dG}{dy} \end{vmatrix} = 0$$

unde am folosit aşa numitele derivate totale

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial u}, ..., \frac{dG}{dy} = \frac{\partial G}{\partial y} + q\frac{\partial G}{\partial u}.$$

Deci sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} F(x,y,u,p,q) &= 0 \\ G(x,y,u,p,q) &= 0, p=\frac{\partial u}{\partial x}, q=\frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}$$

este compatibil dacă este satisfăcută condiţia de compatibilitate

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{dF}{dx} \\ \frac{\partial G}{\partial p} & \frac{dG}{dx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{dF}{dy} \\ \frac{\partial G}{\partial q} & \frac{dG}{dy} \end{vmatrix} = 0$$

şi soluţia sa generală depinde de o constantă arbitrară. Expresia din stânga condiţiei de compatibilitate se numeşte *paranteza lui Mayer* şi se notează prin $[F,G]$. Dacă funcţiile F,G nu depind de u paranteza lui Mayer se reduce la aşa numita *paranteză a lui Poisson* (F,G).

12.6 Integrală completă

Fiind dată ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$F(x,y,u,p,q)=0, p=\frac{\partial u}{\partial x}, q=\frac{\partial u}{\partial y},$$

se numeşte *integrală completă* a sa o relaţie de forma

$$V(x,y,u,a,b)=0$$

depinzând de două constante arbitrare verificată de o familie de soluţii ale ecuaţiei date. Dacă considerăm şi relaţiile obţinute derivând în raport cu x,y

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial u} &= 0, \end{aligned}$$

prin eliminarea constantelor arbitrare a,b, între aceste aceste relaţii obţinem ecuaţia $F(x,y,u,p,q)=0$. In adevăr, dacă am obţine şi o altă relaţie $G(x,y,u,p,q)=0$ am avea o famile de soluţii, depinzând de două constante arbitrare, comune celor două ecuaţii. Dar am văzut că aceasta nu se poate pentru că soluţia ar depinde numai de o constantă. Deci obţinem o altă definiţie a integralei complete: o relaţie depinzând de două constante arbitrare astfel încât prin eliminarea constantelor între cele trei relaţii de mai sus obţinem ecuaţia dată.

Lagrange a arătat că orice soluţie $u = u(x, y)$ a ecuaţiei $F(x, y, u, p, q) = 0$ se poate obţine dintr-o integrală completă a sa prin metoda variaţiei constantelor a, b. In adevăr din ecuaţiile

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial u} = 0,$$

scoatem funcţiile $a(x, y)$, $b(x, y)$. Dacă le introducem în prima relaţie şi derivăm în raport cu x, y obţinem

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

adică funcţiile găsite $a(x, y)$, $b(x, y)$ verifică relaţiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Vom distinge mai multe situaţii.

1) Dacă funcţia $u = u(x, y)$ verifică relaţiile

$$\begin{aligned} V(x, y, u(x, y), a(x, y), b(x, y)) &= 0, \\ \frac{\partial V(x, y, u(x, y), a(x, y), b(x, y))}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial V(x, y, u(x, y), a(x, y), b(x, y))}{\partial b} &= 0, \end{aligned}$$

atunci se zice că integrala $u = u(x, y)$ este o *integrală singulară*. Din punct de vedere geometric, suprafaţa integrală singulară este înfăşurătoarea familiei de suprafeţe complete depinzând de doi parametri..

2) Dacă avem $a(x, y) = a_0, b(x, y) = b_0$, atunci suprafaţa $u = u(x, y)$ este una din suprafeţele integralei complete.

3) Dacă $(\frac{\partial V}{\partial a})^2 + (\frac{\partial V}{\partial b})^2 \neq 0, a(x, y) \neq a_0$, $b(x, y) \neq b_0$ atunci

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv 0$$

şi deci avem $b(x,y) = \omega(a(x,y))$, cu ω o funcţie. Cele două relaţii se reduc la o singură relaţie

$$\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\omega'(a) = 0.$$

In acest caz suprafaţa integrală $u = u(x,y)$ este înfăşurătoarea familiei de suprafeţe $V(x,y,u,a,\omega(a)) = 0$. Cum din relaţiile

$$\begin{aligned} V(x,y,u,a,\omega(a)) &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\omega'(a) &= 0 \end{aligned}$$

cu $\omega(a)$ funcţie arbitrară, obţinem orice soluţie cu excepţia soluţiei singulare, se zice că cele două relaţii definesc *soluţia generală a ecuaţiei* $F(x,y,u,p,q) = 0$.

In metoda lui Lagrange-Charpit pentru găsirea unei integrale complete pentru ecuaţia $F(x,y,u,p,q) = 0$ se caută o funcţie $G(x,y,u,p,g)$ astfel ca sistemul

$$\begin{aligned} F(x,y,u,p,q) &= 0, \\ G(x,y,u,p,q) &= a \end{aligned}$$

să fie compatibil. Atunci integrala sa generală va depinde de două constante arbitrare a,b: $V(x,y,u,a,b) = 0$. Aceasta va fi o integrală completă pentru ecuaţia iniţială. Desfăcând paranteza lui Mayer din condiţia de compatibilitate rezultă pentru funcţia G ecuaţia cu derivate parţiale în variabilele x,y,u,p,q:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial y} + (p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q})\frac{\partial G}{\partial u} - (\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial u})\frac{\partial G}{\partial p} - (\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial u})\frac{\partial G}{\partial q} = 0.$$

Altfel spus funcţia $G(x,y,u,p,q) = a$ este o integrală primă a sistemului caracteristic asociat ecuaţiei nelineare

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{du}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = -\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial u}} = -\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial u}} = dt.$$

Obţinem următorul algoritm:

Pentru a obţine o integrală completă a ecuaţiei $F(x,y,u,p,q) = 0$ se caută mai întâi o integrală primă $G(x,y,u,p,q) = a$ a sistemului caracteristic asociat astfel încât $\frac{D(F,G)}{D(p,q)} \neq 0$; se rezolvă sistemul $F = 0, G = 0$ în raport cu p,q. Ecuaţia $dz = pdx + qdy$, cu p,q înlocuite, este o diferenţială totală. Integrala generală $V(x,y,u,a,b) = 0$ a acestei ecuaţii conţine două constante arbitrare a şi b introduse la integrare şi deci este integrala completă.

Există o serie de cazuri particulare:

a) Ecuaţia $F(x, y, p, q) = 0$ nu conţine pe z. Se poateadmite şi că G nu-l conţine pe z şi sistemul caracteristic se reduce la forma mai simplă

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = -\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

b) Ecuaţia $F(y, p, q) = 0$ nu conţine pe x şi z. Avem $dp = 0$ şi deci integrala primă $p = a$. Din sistemul $F(y, p, q) = 0$, $p = a$ deducem $q = f(y, a)$, deci avem

$$dz = adx + f(y, a)dy$$

de unde obţinem integrala completă

$$z = ax + \int f(y, a)dy + b$$

printr-o integrare.

c) Ecuaţia $F(z, p, q) = 0$ nu conţine pe x, y. Sistemul caracteristic admite combinaţia integrabilă

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

de unde integrala primă $q = ap$. Ecuaţiile $F(z, p, q) = 0$,$q = ap$ dau $p = f(z, a)$, $q = af(z, a)$ şi deci

$$dz = f(z, a)dx + af(z, a)dy$$

de unde printr-o integrare se obţine integrala completă

$$\int \frac{dz}{f(z, a)} = x + ay + b.$$

d) Ecuaţia $F(p, q) = 0$ nu conţine pe x, y, u. Sistemul caracteristic admite integrala primă $p = a$. Din $F(a, q) = 0$ scoatem $q = f(a)$ şi integrala completă $z = ax + f(a)y + b$.

e) Ecuţia $f(x, p) - g(y, q) = 0$ se numeşte cu variabile separate. Sistemul caracteristic se scrie

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial g}{\partial q}} = -\frac{dp}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dq}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

şi are combinaţia integrabilă

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0$$

adică $f(x,p) = a$ este o integrală primă. Din ecuaţie rezultă şi $g(y,q) = a$. Se obţine $p = \varphi(x,a), q = \psi(y,a)$ de unde integrala completă

$$z = \int \varphi(x,a)dx + \int \psi(y,a)dy + b.$$

Fie acum $V(x,y,u,a,b) = 0$ integrala completă a ecuaţiei $F(x,y,u,p,q) = 0$ şi trebuie rezolvată problema Cauchy

$$\begin{aligned} x &= x^0(s), \\ y &= y^0(s), \\ u &= u^0(s) \end{aligned}$$

Scriem că curba iniţială se află pe integrala generală

$$\begin{aligned} V(x,y,u,a,\omega(a)) &= 0, \\ \frac{\partial V(x,y,u,a,\omega(a))}{\partial a} + \frac{\partial V(x,y,u,a,\omega(a))}{\partial \omega}\omega'(a) &= 0. \end{aligned}$$

Prima condiţie $V(x^0(s), y^0(s), u^0(s), a, \omega(a)) = 0$ o putem scrie sub forma $U(s,a,\omega(a)) = 0$. A doua condiţie ar fi atunci $\frac{\partial U(s,a,\omega(a))}{\partial a} + \frac{\partial U(s,a,\omega(a))}{\partial \omega}\omega'(a) = 0$. Dacă funcţia $\omega(a)$ ar fi cunoscută atunci prima relaţie ar da pe a ca funcţie de $s : a = a(s)$. Inlocuind în prima şi derivând avem

$$\frac{\partial U(s,a(s),\omega(a(s)))}{\partial s} + \frac{\partial U(s,a(s),\omega(a(s)))}{\partial a}a'(s) + \frac{\partial U(s,a(s),\omega(a(s)))}{\partial \omega}\omega'(a(s))a'(s) = 0$$

şi ţinând cont de a doua relaţie rezultă

$$\frac{\partial U(s,a(s),\omega(a(s)))}{\partial s} = 0.$$

Din această relaţie şi din relaţia

$$U(s,a,\omega(a)) = 0$$

putem scoate pe a şi pe ω ca funcţii de s. Prin eliminarea acestuia obţinem funcţia $\omega(a)$.

Exemplul 1. Ecuaţia

$$u = px + qy + pq$$

are integrala completă

$$u = ax + by + ab.$$

Pentru a rezolva problema Cauchy

$$\begin{aligned} x &= 0., \\ y &= s, \\ u &= s^2 \end{aligned}$$

înlocuim în integrala completă

$$s^2 = a0 + \omega(a)s + a\omega(a).$$

Derivăm această relaţie în raport cu s

$$2s = \omega(a).$$

Introducând în prima obţinem

$$a = -\frac{s}{2}.$$

Deci $\omega(a) = -4a$. Familia de integrale este

$$u = ax - 4ay - 4a^2.$$

Derivăm în raport cu a

$$0 = x - 4y - 8a.$$

Eliminând pe a între ultimele relaţii găsim ecuaţia suprafeţei integrale care trece prin curba dată

$$u = \frac{(x - 4y)^2}{16}.$$

CAPITOLUL 13

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL 2

13.1 Definiţii generale

Prin *ecuaţie cu derivate parţiale de ordin* 2 (pe scurt, ecdpo2) în n variabile independente se înţelege o ecuaţie care leagă valorile celor n variabile independente de valorile funcţiei necunoscute şi ale unor derivate parţiale ale acesteia până la ordinul 2. Mai precis, pentru că avem o funcţie u, n derivate parţiale de ordinul 1 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{n(n-1)}{2}$ derivate parţiale de ordinul 2 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, avem următoarea definiţie

Definiţia 1. Fie $F : U \times V \subset R^n \times R^N \to R$ o funcţie de $n+N$ variabile, unde $N = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$. Funcţia F defineşte *ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul* 2 în variabilele independente $x_1, x_2, ..., x_n$ cu funcţia necunoscută $u(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) = 0,$$

unde presupunem că apare cel puţin una din derivatele de ordin 2.

Definiţia 2. O funcţie $u = u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n) : D \subset U \to R$ (D deschisă) se numeşte *soluţie clasică* a ecdpo2 definite de funcţia F dacă u este continuă şi toate derivatele care apar în F există şi sunt continue pe D, $(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) \in V$ pentru orice $x \in D$ şi ecuaţia este verificată în orice punct al lui D, adică

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) = 0, \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in D.$$

Dacă $u = u(x_1, x_2), x = (x_1, x_2) \in D$ este o soluţie a unei ecuaţii cu derivate parţiale în două variabile independente, graficul funcţiei u, adică mulţimea punctelor $\{(x_1, x_2, u(x_1, x_2))|(x_1, x_2) \in D\}$ este o suprafaţă bidimensională în R^3 numită *suprafaţă integrală* a ecuaţiei. La fel în cazul general, putem spune că graficul soluţiei $u = u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n) : D \subset U \to R$, adică mulţimea punctelor

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n, u(x_1, x_2, ..., x_n))|(x_1, x_2, ..., x_n) \in D\}$$

reprezintă o *hipersuprafaţă* în R^{n+1} , numită *hipersuprafaţă integrală* a ecuaţiei. (Subliniem că folosim termenul de hipersuprafaţă pentru a marca dimensiunea ei (numărul n de parametri, de grade de libertate în raport cu dimensiunea $n + 1$ a lui R^{n+1}).

Definiţia 3. Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul 2 se numeşte *lineară* dacă funcţia F care o defineşte este o funcţie linear-afină în variabilele $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ cu coeficienţi funcţii numai de variabilele independente, adică ecuaţia se poate scrie sub forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x).$$

Definiţia 4. Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul 2 se numeşte *cvasilineară* dacă funcţia F care o defineşte este o funcţie linear-afină în derivatele parţiale de ordinul 2 cu coeficienţi funcţii numai de variabilele independente, adică ecuaţia se poate scrie sub forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

Definiţia 5. Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul 2 se numeşte *aproape lineară* dacă funcţia F care o defineşte este o funcţie linear-afină în derivatele parţiale de ordinul 2 cu coeficienţi funcţii numai de variabilele independente şi de derivatele parţiale de ordin cel mult 1, adică ecuaţia se poate scrie sub forma

$$.\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

Uneori pentru o ecuaţie cu derivate parţiale dată se poate stabili o expresie din care să rezulte toate sau "aproape" toate soluţiile acelei ecuaţii. O asemenea expresie se numeşte *soluţie generală* a ecuaţiei cu derivate parţiale. Multă vreme eforturile matematicienilor au fost îndreptate spre găsirea unor asemenea soluţii generale. Cu timpul s-a dovedit că o asemenea problemă nu este bine pusă, în sensul că ea nu are totdeauna soluţie. De altfel, aşa cum vom vedea, problemele practice cer găsirea unei soluţii care să satisfacă anumite condiţii.

Exemplul 1. Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$$

în R^2 are soluţia generală $u(x_1, x_2) = f(x_2)$ unde f este o funcţie continuă arbitrară.

Exempul 2. Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul doi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$$

în R^2 are soluţia generală $u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$, unde f şi g sunt două funcţii arbitrare cu derivate continue.

Cele două exemple ilustrează faptul că aşa cum soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul k depinde în general de k constante arbitrare, soluţia generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul 2, dacă există, depinde de 2 funcţii arbitrare. Acest fapt este justificat aşa cum vom vedea de soluţia problemei Cauchy cum se justifica şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale.

In paragrafele următoare vom arăta că o mulţime de fenomene fizice conduc la rezolvarea unor ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul 2.

13.2 Ecuaţia transferului de căldură

Din punct de vedere microscopic, căldura este rezultatul mişcării termice dezordonate a particulelor materiale. La nivel macroscopic, gradul de încălzire al unui corp este determinat de temperatura punctelor sale. Intre energia mişcării termice a unui corp care ocupă domeniul D din spaţiu raportat la un sistem de coordonate rectangular $Oxyz$, sau, cum se mai spune, cantitatea de căldură $Q(D)$ acumulată de acel corp şi temperatura punctelor sale $T(x, y, z, t)$ este o legătură simplă dată de relaţia

$$Q(D) = \iiint\limits_D c(x, y, z, t)\rho(x, y, z, t)T(x, y, z, t)dv,$$

unde $\rho(x, y, z, t)$ este densitatea corpului şi $c(x, y, z, t)$ este capacitatea calorică a corpului în punctul (x, y, z) la momentul t.

Vom considera că transferul de căldură de la o porţiune la altă porţiune a corpului se realizează numai prin transferul de energie de la o particulă la altă particulă, neglijând transferul prin radiaţie, prin procese chimice, etc. Dacă considerăm o suprafaţă S în interiorul corpului, energia termică a particulelor situate de o parte şi de alta a suprafeţei S se modifică în timp fie datorită ciocnirilor particulelor între ele, fie datorită trecerii unor particule dintr-o parte în alta. Evident, este de presupus că prin elementul de arie $d\sigma$ de normală $\vec{n}$ se transferă în timpul dt în sensul lui $\vec{n}$ o cantitate de căldură proporţională cu aria $d\sigma$ şi cu timpul dt, factorul de proporţionalitate depinzând numai de centrul (x, y, z) al elementului de arie, de normala la elementul de arie $\vec{n}$ şi de momentul t : $f(x, y, z, t, \vec{n})$. Atunci întreaga cantitate de căldură care se transferă prin S în timpul dt în sensul lui $\vec{n}$ este $dt \iint\limits_S f(x, y, z, t, \vec{n})d\sigma$.

Să presupunem că în interiorul corpului sunt distribuite continuu surse de căldură cu intensitatea $i(x, y, x, t)$, care în intervalul de timp $(t, t + dt)$ dau căldura $dt \iiint\limits_D idv$. Scriind conservarea căldurii, sau cum se mai spune, bilanţul căldurii pentru domeniul D, avem

$$\frac{dQ(D)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint\limits_D c\rho T dv = \iiint\limits_D \frac{\partial(c\rho T)}{\partial t} dv = -\iint\limits_{\partial D} f(x, y, z, t, \vec{n})d\sigma + \iiint\limits_D idv,$$

unde $\vec{n}$ este normala exterioară. Evident, domeniul D poate fi orice parte a corpului.

Dacă considerăm un domeniu cilindric circular cu o bază centrată în punctul oarecare (x_0, y_0, z_0) de rază suficient de mică r cu generatoarele paralele cu versorul $\vec{n}$ şi cu înălţimea h şi aplicăm relaţia de mai sus, cu teorema de medie în integrale avem cu notaţii evidente

$$\begin{aligned} \frac{\partial(c\rho T)}{\partial t}\Big|_{M\prime} \pi r^2 h \quad &= \quad -f(x\prime\prime, y\prime\prime, z\prime\prime, t, -\vec{n})\pi r^2 - f(x\prime\prime\prime, y\prime\prime\prime, z\prime\prime\prime, t, \vec{n})\pi r^2 - \\ &\quad -f(x^*, y^*, z^*, t, \vec{n}^*)2\pi r h + i(x^{**}, y^{**}, z^{**}, t)\pi r^2 h \end{aligned}$$

Impărţind cu r^2 şi făcând $r \to 0, h \to 0$ astfel încât $\frac{h}{r} \to 0$ obţinem relaţia care era de aşteptat $f(x, y, z, t, -\vec{n}) = -f(x, y, z, t, \vec{n})$.

Dacă considerăm acum un tetraedru cu vârful în punctul oarecare (x_0, y_0, z_0) , cu muchiile plecând din acest punct paralele cu axele de coordonate şi cu a patra faţă cu aria a şi cu normala exterioară $\vec{n} = n_x\vec{j} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}$ şi considerăm înălţimea tetraedrului care pleacă din vârf h suficient de mică şi aplicăm relaţia de bilanţ avem, după aplicarea teoremei de medie, ca mai sus şi cu $h \to 0$,

$$-f(x_0, y_0, z_0, t, -\vec{n}) - f(x_0, y_0, z_0, t, \vec{i})n_x - f(,,,,\vec{j})n_y - f(,,,,\vec{k})n_z = 0$$

sau ţinând cont de proprietatea de mai înainte

$$f(x_0, y_0, z_0, t, \vec{n}) = f(x_0, y_0, z_0, t, \vec{i})n_x + f(,,,,\vec{j})n_y + f(,,,,\vec{k})n_z.$$

Suntem astfel conduşi să introducem un vector

$$\vec{q}(x, y, z, t) = q_x(x, y, z, t)\vec{i} + q_y(x, y, z, t)\vec{j} + q_z(x, y, z, t)\vec{k}$$

astfel încât

$$f(x, y, z, t, \vec{n}) = \vec{q}(x, y, z, t)\vec{n}.$$

Cantitatea de căldură care se transferă prin suprafaţa S în unitatea de timp în direcţia normalei $\vec{n}$ este egală cu fluxul câmpului $\iint\limits_S \vec{q}(x, y, z, t)\vec{n}d\sigma$. Din acest motiv, câmpul $\vec{q}$ se numeşte *câmpul vectorial al fluxului de căldură.*

Câmpul vectorial al fluxului de căldură într-un corp este evident legat de temperatura punctelor sale. Căldura, arată experienţa, se transferă de la părţile cu temperatură mai ridicată spre cele cu temperatură mai joasă. O măsură a variaţiei temperaturii într-un punct este gradientul temperaturii în acel punct. Intr-o primă aproximaţie suficientă pentru cele mai multe aplicaţii practice se poate presupune că câmpul fluxului de căldură depinde linear de gradientul temperaturii, adică are loc o relaţie de forma

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Consideraţii de ordin termodinamic arată că matricea tensorului termoconductibilităţii k este simetrică. In cazul unui mediu izotrop, matricea acestui tensor se reduce la produsul dintre o funcţie k, coeficientul de termoconductibilitate al mediului şi matricea unitate şi deci se poate scrie

$$\vec{q} = -k\, gradT.$$

Aceasta este aşa numita *lege a lui Fourier*. In acest caz ecuaţia de bilanţ se scrie sub forma

$$\iiint\limits_{D} \frac{\partial\,(c\rho T)}{\partial t} dv = \iint\limits_{\partial D} k\frac{\partial T}{\partial n} d\sigma + \iiint\limits_{D} i dv,$$

sau aplicând teorema Gauss-Ostrogradski

$$\iiint\limits_{D} \frac{\partial\,(c\rho T)}{\partial t} dv = \iiint\limits_{D} div(k\ gradT) dv + \iiint\limits_{D} i dv.$$

Cum domeniul D este arbitrar, rezultă că temperatura trebuie să verifice ecuaţia

$$\frac{\partial(c\rho T)}{\partial t} = div(k\ gradT) + i.$$

In cazul unui mediu omogen şi izotrop, c, ρ, k sunt constante şi obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + \frac{1}{\rho c} i,$$

unde am notat $a^2 = \frac{k}{\rho c}$. Constanta a are dimensiunea $LT^{-\frac{1}{2}\cdot}$ Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia transferului de căldură* sau simplu *ecuaţia căldurii.*

Cum în ecuaţie apare derivata $\frac{\partial T}{\partial t}$ este clar că pentru a putea determina temperatura în orice punct şi orice moment este necesar să cunoaştem temperatura la momentul iniţial $t = 0 : T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z)$.

Pe de altă parte este necesar să ţinem cont de interacţiunea dintre corpul studiat şi mediul înconjurător. Conform unei l*egii a lui Newton*, cantitatea de căldură care trece prin porţiunea $d\sigma$ din suprafaţa ∂D a unui corp în unitatea de timp este proporţională cu diferenţa dintre temperatura corpului $T(x, y, z)$ în centrul porţiunii $d\sigma$ şi temperatura $T_e(x, y, z)$ a mediului exterior în acelaşi punct considerat ca aparţinând exteriorului, factorul de proporţionalitate depinzând de gradul de izolare al suprafeţei. Acesta poate fi funcţie de punctul de pe suprafaţă sau poate fi constant pe întreaga suprafaţă. Din bilanţul de căldură pe orice porţiune S a lui ∂D rezultă

$$-\iint\limits_{S} k\frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = \iint\limits_{S} \alpha\,(T(x, y, z) - T_e(x, y, z, t))\, d\sigma.$$

Cum S este arbitrar, rezultă că pe suprafaţa ∂D trebuie să aibă loc relaţia

$$-k\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha\,(T - T_e)\,.$$

Dacă $\alpha = 0$, adică prin suprafaţa ∂D nu se transferă căldură, pe suprafaţa ∂D vom avea condiţia $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$, se spune că avem o *problemă de tipul lui Neuman.* Dacă $\alpha = \infty$, adică suprafaţa ∂D nu este deloc izolată, pe suprafaţa ∂D vom avea condiţia $T = T_e$, se spune că avem o *problemă a lui Dirichlet.*

Dacă temperatura exterioară T_e şi intensitatea i a surselor interioare nu depind de timp, este de aşteptat că după un anumit timp temperatura în punctele corpului nu se mai modifică în timp, adică devine, cum se spune, *staţionară.* In acest caz problema transferului staţionar de căldură revine la rezolvarea ecuaţiei lui Poisson

$$\Delta T(x, y, z) = -\frac{1}{a^2 \rho c} i(x, y, z)$$

cu una din condiţiile la frontieră amintite. Se subînţelege că valoarea iniţială a temperaturii nu mai contează.

Dacă corpul care ocupă domeniul D este o bară cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Ox, dimensiunile unei secţiuni transversale fiind mici în comparaţie cu lungimea barei, dacă presupunem că prin suprafaţă laterală nu are loc transfer de căldură, că intensitatea surselor depinde numai de abscisa x a secţiunii transversale $i(x, t)$, că temperatura iniţială depinde numai de abscisa secţiunii $T_0(x)$ se poate presupune şi că în toate punctele unei secţiuni transversale temperatura este aceeaşi $T(x, t)$. In acest caz se obţine ecuaţia unidimensională a transferului de căldură

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho c} i.$$

Aceasta trebuie rezolvată ţinând cont de condiţia iniţială $T(x, 0) = T_0(x)$ şi de condiţiile la capete în cazul când bara este finită $0 \leq x \leq l$. Aceste condiţii la capete se deduc uşor din condiţiile cazului general. Cazul staţionar revine la rezolvarea ecuaţiei

$$T''(x) = -\frac{1}{a^2 \rho c} i(x)$$

cu condiţii la capetele barei.

13.3 Ecuaţia undelor sonore

O perturbaţie oarecare, cum ar fi sunetul produs de o persoană, se propagă în aer sub forma undelor sonore. Dacă într-un capăt al unui tub cu gaz se mişcă un piston, perturbaţia produsă de acesta se propagă de-a lungul tubului. Ne propunem să stabilim ecuaţiile care guvernează un asemenea fenomen.

Presupunem că în starea de echilibru la momentul 0, aerul (gazul) are o densitate ρ_0 constantă în întreaga masă. Dacă considerăm în gaz o suprafaţă mică $d\sigma$ de normală $\vec{n}$ particulele din partea unde este dirijată normala acţionează asupra particulelor din partea cealaltă cu o forţă $-p\vec{n}d\sigma$, mărimea $p > 0$ numindu-se *presiune*. Ea este nenulă chiar în poziţia de echilibru. Vom presupune că valoarea acesteia la echilibru p_0 este constantă în întreaga masă.

Vom raporta mişcarea la un sistem de coordonate rectangular $Oxyz$ cu versorii axelor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. O particulă oarecare are la momentul 0 vectorul de poziţie $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$. La momentul t aceeaşi particulă are vectorul de poziţie $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, unde coordonatele x, y, z sunt evident funcţii de coordonatele iniţiale X, Y, Z şi timpul t. Vectorul $\vec{U} = \vec{r} - \vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ este vectorul deplasare al particulei. Viteza particulei este $\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$. Având în vedere că două particule oarecare distincte trebuie considerate distincte tot timpul mişcării, funcţiile amintite mai sus sunt bijecţii, adică se pot explicita şi coordonatele iniţiale X, Y, Z ca funcţii de coordonatele x, y, z şi timpul t. In acest fel orice mărime caracteristică a mişcării poate fi exprimată fie ca funcţie de coordonatele iniţiale X, Y, Z şi timpul t, fie ca funcţie de coordonatele x, y, z şi timpul t . Coordonatele X, Y, Z şi timpul t se numesc *coordonate materiale* sau *coordonate lagrangiene*; coordonatele x, y, z şi timpul t se numesc *coordonate spaţiale* sau *coordonate euleriene*. In cazul nostru deplasările $\vec{U} = \vec{r} - \vec{R}$ ale particulelor sunt mici de un ordin de mărime ε astfel încât mărimile de ordinul lui ε^2 vor fi neglijabile. Din acest motiv este de preferat să folosim coordonatele materiale.

Datorită mişcării, în punctul x, y, z corespunzător poziţiei la momentul t a particulei care avea poziţia iniţială X, Y, Z, densitatea va avea valoarea $\rho(x, y, z, t) = \rho(X, Y, Z, t)$, în general diferită de valoarea ρ_0 . Deasemenea presiunea va avea o valoare $p(x, y, z, t) = p(X, Y, Z, t)$, în general diferită de p_0. (Am notat funcţiile depinzând de x, y, z, t sau X, Y, Z, t cu aceeaşi literă pentru a nu complica notaţia.) Abaterile densităţii şi presiunii de la valorile de echilibru $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$, $\tilde{p} = p - p_0$ vor fi tot mici de ordinul de mărime ε. Intre presiune şi densitate există o relaţie de forma $p = p(\rho)$. Dacă am considera că mişcarea este izotermă, cum a considerat Newton, am avea o relaţie de forma

$$p = \frac{p_0}{\rho_0}\rho.$$

Experienţa arată că mişcarea nu este izotermă, ci adiabatică: deplasările sunt mici, dar mult mai mari decât drumul liber mijlociu parcurs de moleculele de gaz în mişcarea termică, aşa că în timpul mişcării nu are loc un schimb de căldură. Vom presupune valabilă relaţia

$$p = \frac{p_0}{\rho_0 \gamma}\rho\gamma,$$

γ fiind o constantă care pentru aer are valoarea $\gamma = 1.4$. Rezultă că între abaterile presiunii şi densităţii de la valorile de echilibru vom avea relaţia

$$\tilde{p} = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}\tilde{\rho}.$$

(Am ţinut cont că pentru u mic avem $(1+u)\gamma \cong 1+\gamma u$.)

Particulele care la momentul iniţial 0 ocupă un domeniu $D(0)$ vor avea masa $m(D(0)) = \int\limits_{D(0)} \rho_0 dV$. La momentul t aceste particule vor ocupa un domeniu $D(t)$ şi vor avea masa $m(D(t)) = \int\limits_{D(t)} \rho(x,y,z,t)dv$. Cum iacobianul

$$\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & 1+\frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & 1+\frac{\partial w}{\partial Z} \end{vmatrix}$$

se poate scrie, abstracţie făcând de termenii de ordinul lui ε^2

$$\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)} = 1 + \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Z} = 1 + \mathrm{DIV}\,\vec{U}$$

vom avea

$$m(D(t)) = \int\limits_{D(t)} \rho(x,y,z,t)dv = \int\limits_{D(0)} \rho(X,Y,Z,t)(1+\mathrm{DIV}\,\vec{U})dV.$$

Notăm cu iniţiale mari operatorii diferenţiali în raport cu variabilele X, Y, Z.

Masa se conservă în timpul mişcării şi deci vom avea pentru orice domeniu $D(0)$

$$\int\limits_{D(0)} \rho_0 dV = \int\limits_{D(0)} \rho(X,Y,Z,t)(1+\mathrm{DIV}\,\vec{U})dV.$$

Rezultă aşa numita *ecuaţie de continuitate* în coordonate materiale pe care trebuie să o verifice densitatea şi deplasarea:

$$\rho_0 = \rho(X, Y, Z, t)(1 + \mathrm{DIV}\,\vec{U}),$$

sau în abaterea densităţii

$$\tilde{\rho} + \rho_0\,\mathrm{DIV}\,\vec{U} = 0.$$

Particulele care la momentul 0 ocupă domeniul $D(0)$ au la momentul t cantitatea de mişcare

$$\vec{H}(D(0)) = \int\limits_{D(t)} \rho(x, y, z, t)\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}dv = \int\limits_{D(0)} \rho(X, Y, Z, t)\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(1 + \mathrm{DIV}\,\vec{U})dV,$$

sau ţinând cont de ecuaţia de continuitate

$$\vec{H}(D(0)) = \int\limits_{D(0)} \rho_0\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}dV.$$

Forţele care acţionează asupra particulelor din domeniul $D(0)$ la momentul t sunt datorate presiunii din partea particulelor exterioare (neglijăm forţele exterioare cum ar fi de exemplu greutatea gazului)

$$\vec{F}(D(0)) = -\int\limits_{D(t)} p(x, y, z, t)\vec{n}d\sigma = -\int\limits_{D(t)} \mathrm{grad}\ p dv = -\int\limits_{D(t)} \mathrm{grad}\ \tilde{p} dv.$$

Cum avem

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}(1 + \frac{\partial u}{\partial X}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial X} \cong \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$$

şi relaţiile analoage, adică GRAD $\tilde{p}(X, Y, Z, t) \cong$ grad $\tilde{p}(x, y, z, t)$, expresia forţelor este

$$\vec{F}(D(0)) = -\int\limits_{D(0)} \mathrm{GRAD}\ \tilde{p}(X, Y, Z, t)(1 + \mathrm{DIV}\,\vec{U})dV.$$

Dacă nu am neglija forţele exterioare, ar mai trebui adăugat un termen de forma $\int\limits_{D(0)} \vec{f}(X, Y, Z, t)\rho_0 dV$, $\vec{f}$ fiind densitatea forţelor exterioare.

Conform teoremei variaţiei cantităţii de mişcare avem

$$\frac{d}{dt}\vec{H}(D(0)) = \vec{F}(D(0)),$$

sau

$$\int\limits_{D(0)} \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} dV = - \int\limits_{D(0)} \text{GRAD } \tilde{p}(X,Y,Z,t)(1 + \text{DIV}\,\vec{U}) dV.$$

Domeniul $D(0)$ fiind oarecare, obţinem ecuaţia de mişcare

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = -\,\text{GRAD } \tilde{p}(X,Y,Z,t)(1 + \text{DIV}\,\vec{U}) \cong -\,\text{GRAD } \tilde{p}(X,Y,Z,t),$$

sau

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = -\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \text{GRAD } \tilde{\rho}.$$

Dacă în ultima relaţie aplicăm operatorul DIV şi ţinem cont de ecuaţia de continuitate, obţinem ecuaţia verificată de abaterea densităţii

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Delta \tilde{\rho}$$

şi ecuaţia verificată de abaterea presiunii

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Delta \tilde{p},$$

unde am notat prin Δ operatorul DIV GRAD. In cazul unui tub dispus după axa $Ox = OX$ acesta devine $\frac{\partial^2}{\partial X^2}$.

Dacă aplicăm ecuaţiei de mişcare

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = -\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \text{GRAD } \tilde{\rho}$$

operatorul ROT şi ţinem cont că ROT GRAD $\tilde{\rho} = 0$ rezultă că $\frac{\partial}{\partial t}$ROT $\vec{v} = 0$, adică ROT $\vec{v} = const$. Presupunând că la momemtul iniţial ROT $\vec{v} = 0$ rezultă că această relaţie va avea loc la orice moment şi deci există o funcţie $\varphi(X,Y,Z,t)$ astfel încât $\vec{v} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} =$ GRAD φ. Funcţia $\varphi(X,Y,Z,t)$ determinată abstracţie făcând de o funcţie de timp se numeşte *potenţialul mişcării.* Din ecuaţia de mişcare rezultă GRAD$(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \tilde{\rho}) = 0$, şi deci putem scrie $\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \tilde{\rho} = 0$. Dacă ecuaţiei de continuitate aplicăm $\frac{\partial}{\partial t}$ obţinem ecuaţia verificată de potenţialul mişcării

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Delta \varphi = 0.$$

Dacă în ecuaţia de mişcare $\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = -\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \operatorname{GRAD}\ \tilde{\rho}$ înlocuim abaterea densităţii prin valoarea dată de ecuaţia de continuitate, obţinem

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = \gamma p_0 \operatorname{GRAD} \operatorname{DIV} \vec{U} = \gamma p_0 \left(\Delta \vec{U} + \operatorname{ROT} \operatorname{ROT} \vec{U} \right).$$

Din relaţia $\operatorname{ROT} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{ROT} \vec{U} = 0$ rezultă că dacă la momentul iniţial avem $\operatorname{ROT} \vec{U} = 0$ vom avea aceeaşi relaţie la orice moment şi vectorul deplasare verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \Delta \vec{U} = 0.$$

Am obţinut faptul că în fenomenul studiat, abaterile densităţii şi presiunii, potenţialul mişcării şi componentele vectorului deplasare sau viteză satisfac o aceeaşi ecuaţie de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0,$$

unde constanta $a = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$ are evident dimensiunea LT^{-1} a unei viteze. Ea se numeşte *viteza sunetului*. Ecuaţia de mai sus se numeşte *ecuaţia undelor sonore*. Dacă nu am fi neglijat forţele exterioare, în dreapta ecuaţiei ar fi apărut un termen legat de densitatea $\overrightarrow{f}$. O ecuaţie asemănătoare se obţine şi în cazul undelor electromagnetice, din acest motiv ecuaţia este numită pur şi simplu *ecuaţia undelor*.

Pentru aer, unde $\gamma = 1.4, p_0 = 1\ atm = 1.01 \times 10^5 N/m^2, \rho_0 = 1.29 kg/m^3$ găsim pentru viteza sunetului valoarea $a \cong 332\ m/s$. Newton, presupunând mişcarea izotermă obţinuse valoarea $a \cong 280\ m/s$.

Dacă luăm ca necunoscute abaterea presiunii $\tilde{p}$ şi vectorul viteză $\vec{v}$ vom avea sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho_0 a^2 \operatorname{DIV}\ \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{GRAD}\ \tilde{p} = 0 \end{cases}$$

Vom semnala acum o importantă consecinţă a ecuaţiilor de mişcare stabilite. Dacă înmulţim scalar cu $\vec{v} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ ecuaţia $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{GRAD}\ \tilde{p} = 0$, ţinem cont de formula $\operatorname{DIV}(\tilde{p}\vec{v}) = \tilde{p} \operatorname{DIV} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{GRAD} \tilde{p}$ şi de ecuaţia de continuitate $\operatorname{DIV} \vec{U} = -\frac{1}{\gamma p_0} \tilde{p}$ obţinem

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0\vec{v}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma p_0}\tilde{p}^2\right)+\mathrm{DIV}\left(\tilde{p}\vec{v}\right)=0,$$

sau

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\mathrm{DIV}(\tilde{p}\vec{v})=0,$$

unde

$$E=\frac{1}{2}\rho_0\vec{v}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma p_0}\tilde{p}^2$$

este evident densitatea energiei. Ecuaţia stabilită este forma locală a conservării energiei. De aici obţinem forma integrală

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_D EdV=\int\limits_{\partial D}\tilde{p}\vec{v}\cdot\vec{n}d\Sigma,$$

adică viteza de variaţie a energiei oricărui domeniu este egală cu minus fluxul prin frontiera domeniului al vectorului $\tilde{p}\vec{v}$, vector numit *vectorul lui Umov.*

Cum mişcarea unui punct material este determinată de cunoaşterea poziţiei şi a vitezei sale iniţiale, este de aşteptat ca şi aici din ecuaţia $\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}-\gamma\frac{p_0}{\rho_0}\Delta\vec{U}=0$ şi din cunoaşterea valorilor iniţiale $\vec{U}(X,Y,Z,0)$, $\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}(X,Y,Z,0)$ să putem determina valorile lui $\vec{U}(X,Y,Z,t)$ la orice moment. De aici rezultă că la fel din ecuaţia $\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial t^2}-\gamma\frac{p_0}{\rho_0}\Delta\tilde{\rho}$ şi din cunoaşterea valorilor iniţiale $\tilde{\rho}(X,Y,Z,0)$, $\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}(X,Y,Z,0)$ este de aşteptat ca să putem determina valorile $\tilde{\rho}(X,Y,Z,t)$ la orice moment. La fel în ce priveşte abaterea presiunii sau potenţialul. Am considerat că mişcarea are loc în întreg spaţiul.

In cazul unui tub de secţiune S dispus după axa $OX=Ox$ toate mărimile considerate mai sus vor fi funcţii numai de abscisa x a unei secţiuni şi de timp şi vor verifica ecuaţii de ordinul doi lineare de forma

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0.$$

La această ecuaţie trebuie ataşate condiţii iniţiale $u(x,0)=u_0(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=v_0(x)$.

In cazul unui tub de secţiune S dispus după axa $OX=Ox$ între $x=0$ şi $x=l$ la condiţiile iniţiale de mai sus trebuie adăugate condiţii care să precizeze comportarea la capete. Aceste condiţii se numesc *condiţii la limită.* Dacă de exemplu, capetele tubului sunt închise atunci trebuie verificate condiţii de forma

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, v(0,t) = v(l,t) = 0,$$
$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}(l,t) = 0, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}(l,t) = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(l,t) = 0.$$

Dacă capetele tubului sunt deschise, atunci trebuie verificate condiţii de forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(l,t) = 0,$$
$$\tilde{\rho}(0,t) = \tilde{\rho}(l,t) = 0, \tilde{p}(0,t) = \tilde{p}(l,t) = 0,$$
$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = 0.$$

Dacă la capătul $x = 0$ al tubului avem un piston de masă neglijabilă susţinut de un arc cu coeficientul de elasticitate χ atunci vom avea condiţii de forma

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - \frac{\chi}{S\gamma p_0}u(0,t) = 0, \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) - \frac{\chi}{S\gamma p_0}v(0,t) = 0, \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2}(0,t) - \frac{\chi}{S\rho_0}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}(0,t) = 0,$
$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}(0,t) - \frac{\chi}{S\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}(0,t) = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(0,t) - \frac{\chi}{S\rho_0}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,t) = 0.$

La fel pentru capătul $x = l$ cu deosebirea că semnul - se înlocuieşte cu $+$. In relaţiile scrise, v este componenta vitezei.

13.4 Ecuaţia oscilaţiilor transversale ale unei corzi

Prin *coardă* se înţelege un mediu continuu unidimensional, omogen, elastic, perfect flexibil. Unidimensional înseamnă faptul că lungimea corzii este mult mai mare în comparaţie cu dimensiunile secţiunii sale. Omogen înseamnă faptul că vom presupune că peste tot secţiunea corzii este aceeaşi σ şi că densitatea corzii-masa unităţii de volum-este o constantă ρ. Perfect flexibil înseamnă faptul că dacă luăm un punct M pe coardă acţiunea parţii din dreapta punctului M asupra părţii din stânga punctului M poate fi reprezentată numai printr-o forţă (vom arăta că aceasta trebuie să fiedirijată după tangenta la coardă în punctul M), deci coarda nu opune nici o rezistenţă la încovoieri. Elastic înseamnă că acea forţă este după legea lui Hooke proporţională cu alungirea relativă a corzii în punctul M. Vom presupune că în poziţia de echilibru coarda este dispusă după axa Ox şi că ea este tensionată, adică porţiunea din dreapta punctului M de abscisă x acţionează asupra porţiunii din stânga punctului M cu o forţă $T_0\sigma\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{i}$ fiind versorul axei Ox, T_0 o constantă. Vom studia numai oscilaţiile transversale ale corzii, adică vom presupune că punctul M care în poziţia de echilibru avea vectorul de poziţie $x\overrightarrow{i}$, la momentul t în timpul oscilaţiilor va avea vectorul de poziţie $x\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x,t)}$ unde $\overrightarrow{u(x,t)}$ este un vector perpendicular pe Ox. Vectorul tangent la coardă în punctul M la momentul t este $\overrightarrow{i}+\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x}$. Porţiunea care la echilibru ocupa segmentul $(x,x+dx)$ va avea la momentul t lungimea $ds=\sqrt{1+(\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x})^2}dx$. Vom presupune că oscilaţiile sunt în aşa fel încât mărimea $(\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x})^2$ este neglijabilă. In acest caz $ds\approx dx$, adică în timpul oscilaţiilor alungirea relativă este nulă şi deci mărimea forţei cu care porţiunea din dreapta punctului M acţionează asupra porţiunii din stânga nu depinde de timp, ci cel mult de abscisă. Să notăm cu $\overrightarrow{F(x,t)}$ forţa cu care porţiunea din dreapta abscisei x acţionează asupra porţiunii din stânga abscisei x. Conform principiului acţiunii şi reacţiunii, porţiunea din stânga abscisei x va acţiona asupra porţiunii din dreapta cu forţa $-\overrightarrow{F(x,t)}$. La momentul t în oscilaţie punctul M va avea viteza $\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t}$ şi acceleraţia $\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t^2}$. Pentru a găsi ecuaţiile de mişcare vom aplica teoremele fundamentale ale mecanicii pentru o porţiune oarecare de coardă cuprinsă între abscisele $x_1<x_2$. Conform teoremei variaţiei cantităţii de mişcare, derivata cantităţii de mişcare a unui sistem este egală cu suma forţelor care acţionează asupra sistemului. In cazul nostru vom avea

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}\rho\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t}\sigma dx=\overrightarrow{F(x_2,t)}-\overrightarrow{F(x_1,t)}+\int_{x_1}^{x_2}\rho\overrightarrow{f(x,t)}\sigma dx.$$

Am notat prin $\rho\overrightarrow{f(x,t)}$ densitatea forţelor exterioare care acţionează în punctul de abscisă x la momentul t asupra corzii. Cum putem scrie

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t^2}\sigma dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\overrightarrow{F(x,t)}}{\partial x}dx+\int_{x_1}^{x_2}\rho\overrightarrow{f(x,t)}\sigma dx$$

şi cum intervalul (x_1,x_2) este arbitrar rezultă că trebuie să avem

$$\rho\sigma\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t^2}=\frac{\partial\overrightarrow{F(x,t)}}{\partial x}+\rho\sigma\overrightarrow{f(x,t)}.$$

Conform teoremei variaţiei momentului cinetic, derivata momentului cantităţii de mişcare a unui sistem este egală cu momentul rezultant al forţelor care acţionează asupra sistemului. In cazul nostru vom avea

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}\rho(x\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x,t)})\times\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t}\sigma dx=(x_2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x_2,t)})\times\overrightarrow{F(x_2,t)}-$$

$$-(x_1\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x_1,t)})\times\overrightarrow{F(x_1,t)}+\int\limits_{x_1}^{x_2}\rho(x\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x,t)})\times\overrightarrow{f(x,t)}\sigma dx$$

sau

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\rho(x\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x,t)})\times\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t^2}\sigma dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left((x\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x,t)})\times\overrightarrow{F(x,t)}\right)dx+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x_2}\rho(x\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x,t)})\times\overrightarrow{f(x,t)}\sigma dx$$

Cum intervalul (x_1,x_2) este arbitrar, rezultă

$$\rho\sigma(x\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x,t)})\times\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t^2}=(\overrightarrow{i}+\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x})\times\overrightarrow{F(x,t)}+$$

$$+(x\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x,t)})\times\frac{\partial\overrightarrow{F(x,t)}}{\partial x}+\rho\sigma(x\overrightarrow{i}+\overrightarrow{u(x,t)})\times\overrightarrow{f(x,t)}$$

Ţinând cont de prima relaţie obţinută avem

$$(\overrightarrow{i}+\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x})\times\overrightarrow{F(x,t)}=0$$

adică forţa $\overrightarrow{F(x,t)}$ este dirijată după tangentă şi dacă notăm cu $T(x)\sigma$ mărimea sa independentă de timp avem

$$\overrightarrow{F(x,t)}=T(x)\sigma(\overrightarrow{i}+\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x}).$$

Introducând în prima relaţie avem

$$\rho\sigma\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t^2}=T'(x)\sigma(\overrightarrow{i}+\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x})+T(x)\sigma\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x^2}+\rho\sigma\overrightarrow{f(x,t)}$$

Presupunând că forţa exterioară este şi ea transversală rezultă că $T(x)$ este o constantă şi ea nu poate fi decât tensiunea care era la echilibru T_0. Rezultă

$$\rho\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x^2}+\rho\overrightarrow{f(x,t)}$$

sau notând $a^2=\frac{T_0}{\rho}$ avem ecuaţia verificată de $\overrightarrow{u(x,t)}$

$$\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x^2}+\overrightarrow{f(x,t)}$$

Notând cu $u(x,t)$ şi $f(x,t)$ componentele corespunzătoare lui $\overrightarrow{u(x,t)}$ respectiv $\overrightarrow{f(x,t)}$ pe una din direcţiile transversale avem pentru fiecare din ele aşa numita ecuaţie a oscilaţiilor corzii

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Mărimea introdusă a are dimensiunea $\sqrt{\frac{MLT^{-2}L^{-2}}{ML^{-3}}} = \frac{L}{T}$ adică a unei viteze.

Ca să putem cunoaşte oricare componentă $u(x,t)$ trebuie să ştim valorile iniţiale

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v_0(x)$$

ale poziţiei şi vitezei iniţiale. Când coarda este fixată la capete avem condiţiile la capete

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0.$$

Când capetele corzii se mişcă după anumite legi avem condiţii la capete de forma

$$u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t).$$

Elementul corzii cuprins în intervalul $(x, x+dx)$ are energia cinetică $dT = \frac{1}{2}\rho\sigma dx(\frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t})^2$, deci întreaga coardă cuprinsă în $(0,l)$ are energia cinetică $T = \frac{1}{2}\rho\sigma \int\limits_0^l (\frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t})^2 dx$. Energia potenţială a corzii este egală cu opusul lucrului mecanic necesar aducerii corzii din poziţia de echilibru în poziţia dată. Asupra elementului $(x, x+dx)$ acţionează forţa $T_0\sigma\left(\overrightarrow{i} + \frac{\partial \overrightarrow{u(x+dx)}}{\partial x}\right) - T_0\sigma\left(\overrightarrow{i} + \frac{\partial \overrightarrow{u(x)}}{\partial x}\right) = T_0\sigma \frac{\partial^2 \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x^2} dx$. In timpul $(t, t+dt)$ elementul se deplasează cu $\frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t} dt$. Deci lucrul mecanic efectuat de forţele interioare în acest interval de timp este

$$\int\limits_0^l T_0\sigma \frac{\partial^2 \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x^2} \frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t} dxdt = T_0\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_0^l dt - \int\limits_0^l T_0\sigma \frac{\partial^2 \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x \partial t} \frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x} dxdt =$$

$$= T_0\sigma \frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x} \frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t}\bigg|_0^l dt - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l T_0\sigma \left(\frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x}\right)^2 dxdt.$$

In intervalul de timp $(0,t)$ lucrul mecanic al forţelor interioare va fi

$$-\frac{1}{2}T_0\sigma \int\limits_0^l \left(\frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x}\right)^2 dx\bigg|_0^t + T_0\sigma \int\limits_0^t \frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x} \frac{\partial \overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t}\bigg|_0^l dt =$$

$$= -\frac{1}{2}T_0\sigma\int_0^l \left(\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x}\right)^2 dx + T_0\sigma\int_0^t \frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x}\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t}\Bigg|_0^l dt$$

Am ţinut cont că la echilibru $u(x,t)=0$. Când coarda este fixată la capete $\frac{\partial\overrightarrow{u(0,t)}}{\partial t}=0$, $\frac{\partial\overrightarrow{u(l,t)}}{\partial t}=0$ şi lucrul mecanic necesar forţelor interioare să aducă coarda din poziţia de echilibru în poziţia curentă este

$$-\frac{1}{2}T_0\sigma\int_0^l \left(\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x}\right)^2 dx$$

Deci enegia potenţială a forţelor interioare este

$$U = \frac{1}{2}T_0\sigma\int_0^l \left(\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x}\right)^2 dx$$

şi deci energia totală a coardei este

$$E = T + U = \frac{1}{2}T_0\sigma\int_0^l \left(\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\rho\sigma\int_0^l \left(\frac{\partial\overrightarrow{u(x,t)}}{\partial t}\right)^2 dx.$$

13.5 Ecuaţia oscilaţiilor transversale ale membranei

Prin *membrană* se înţelege un mediu continuu bidimensional, omogen, elastic, perfect flexibil. Prin bidimensional se înţelege faptul ca membrana are de fapt forma unei suprafeţe cu grosimea foarte mică. Omogen înseamnă faptul că vom presupune că peste tot grosimea membranei este aceeaşi şi că densitatea superficială a membranei-masa unităţii de arie-este o constantă ρ. Perfect flexibil înseamnă faptul că dacă luăm un punct M pe membrană şi în acest punct considerăm o secţiune curbilinie, acţiunea parţii din dreapta punctului M asupra părţii din stânga punctului M poate fi reprezentată numai printr-o forţă dirijată după normala la secţiune în punctul M şi situată în planul tangent la membrană în punctul M, deci membrana nu opune nici o rezistenţă la încovoieri şi la compresiuni. Elastic înseamnă că acea forţă este după legea lui Hooke proporţională cu alungirea relativă a secţiunii în punctul M. Vom presupune că în poziţia de echilibru membrana este dispusă după planul Oxy şi că ea este tensionată uniform, adică dacă luăm un punct M pe membrană şi în acest punct considerăm o secţiune curbilinie de lungime ds, porţiunea din dreapta punctului M acţionează asupra porţiunii din stânga punctului M cu o forţă de mărime $T_0 ds$, T_0 o constantă, dirijată după normala la secţiune. Cu o precizie satisfăcătoare membranele de cauciuc reprezintă modelul unor asemenea membrane.

Vom presupune că asupra membranei acţionează o forţă normală la planul de echilibru $p(x,y,t)\overrightarrow{k}$. Vom studia numai oscilaţiile transversale ale membranei, adică vom presupune că punctul M care în poziţia de echilibru avea vectorul de poziţie $x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$, la momentul t în timpul oscilaţiilor va avea vectorul de poziţie $x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+u(x,y,t)\overrightarrow{k}$ unde $u(x,y,t)\overrightarrow{k}$ este un vector perpendicular pe Oxy. Să considerăm o porţiune din membrană care în poziţia de echilibru ocupă în planul Oxy domeniul D cu frontiera ∂D de ecuaţie parametrică $\overrightarrow{r}=x(s)\overrightarrow{i}+y(s)\overrightarrow{j}$, s fiind abscisa curbilinie pe ∂D. La momentul t această porţiune de membrană va ocupa suprafaţa D' cu ecuaţia parametrică $\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+u(x,y,t)\overrightarrow{k}$, $(x,y)\in D$. Frontiera acestei porţiuni este curba $\partial D'$ cu ecuaţia parametrică $\overrightarrow{r}=x(s)\overrightarrow{i}+y(s)\overrightarrow{j}+u(x(s),y(s),t)\overrightarrow{k}$. Vom presupune că vibraţiile membranei sunt în aşa fel încât se pot neglija mărimile de ordinul doi în raport cu $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. In acest caz elementul de arc pe curba $\partial D'$ coincide cu elementul de arc de pe curba ∂D, deci mărimea tensiunii nu va depinde de timp, ea fiind cel mult de forma $T(x,y)$. Deasemenea elementul de arie de pe D' coincide cu $dxdy$. Versorul tangentei la curba $\partial D'$ în punctul de abscisă s este

$$\overrightarrow{\tau}(s)=x'(s)\overrightarrow{i}+y'(s)\overrightarrow{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}x'(s)+\frac{\partial u}{\partial y}y'(s)\right)\overrightarrow{k}.$$

Versorul normalei la suprafaţa D' în acelaşi punct este

$$\overrightarrow{\nu}(s)=-\frac{\partial u}{\partial x}\overrightarrow{i}-\frac{\partial u}{\partial y}\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}.$$

Cei doi versori fiind perpendiculari, tensiunea care acţionează asupra elementului de lungime ds din acest punct va fi

$$\begin{aligned}T(x(s),y(s))\overrightarrow{\tau}(s)\times\overrightarrow{\nu}(s)ds &= T(x(s),y(s))\left[\overrightarrow{n_e(s)}+\left(-x'(s)\frac{\partial u}{\partial y}+y'(s)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overrightarrow{k}\right]ds=\\ &= T(x(s),y(s))\left[\overrightarrow{n_e(s)}+\operatorname{grad}u.\overrightarrow{n_e(s)}\overrightarrow{k}\right]ds\end{aligned}$$

$\overrightarrow{n_e(s)}$ fiind versorul normalei exterioare la ∂D în punctul de abscisă s. Scriind teorema variaţiei cantităţii de mişcare, vom avea

$$\rho\iint\limits_D\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dxdy\overrightarrow{k}=\int\limits_{\partial D}T(x(s),y(s)\left[\overrightarrow{n_e(s)}+\operatorname{grad}u.\overrightarrow{n_e(s)}\overrightarrow{k}\right]ds+\iint\limits_D p(x,y,t)dxdy\overrightarrow{k}$$

unde am notat cu $p(x,y,t)dxdy\overrightarrow{k}$ forţa exterioară care acţionează asupra elementului de arie $dxdy$ al suprafeţei $\partial D'$. După formula lui Gauss-Ostrogradski vom avea

$$\begin{aligned}\rho\iint\limits_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dxdy\overrightarrow{k} &= \iint\limits_D \operatorname{grad} T(x,y)dxdy + \iint\limits_D \operatorname{div}\left(T(x,y)\operatorname{grad} u(x,y)\right)dxdy\overrightarrow{k} + \\ &+\iint\limits_D p(x,y,t)dxdy\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

Cum domeniul D este arbitrar, rezultă că în tot domeniul ocupat de membrană vom avea

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \operatorname{div}\left(T(x,y)\operatorname{grad} u(x,y)\right) + p(x,y,t),\\ \operatorname{grad} T(x,y) &= 0.\end{aligned}$$

Din a doua relaţie rezultă că $T(x,y)$ este peste tot constant egal evident cu mărimea iniţială a tensiunii T_0. Prima relaţie devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\triangle u + p(x,y,t),$$

unde am notat $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, constanta a având dimensiunea unei viteze LT^{-1}.

Dacă renotăm cu D domeniul ocupat de proiecţia membranei pe planul Oxy problema determinării vibraţiilor membranei revine la determinarea funcţiei $u(x,y,t)$ care în domeniul D verifică ecuaţia de mai sus. Trebuie să ne mai dăm poziţia iniţială

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), (x,y)\in D$$

şi viteza iniţială

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(x,y), (x,y)\in D.$$

Dacă pe frontiera domeniului D membrana este fixată, atunci vom avea şi condiţia la limită

$$u(x,y,t)|_{(x,y)\in\partial D} = 0.$$

13.6 Ecuaţia oscilaţiilor longitudinale ale unei bare

Studiem acum oscilaţiile longitudinale ale unei *bare elasice* omogene dispusă după segmentul $(0,l)$ al axei reale. Punctele secţiunii de abscisă x vor suferi deplasări de mărime $u(x,t)$ de-a lungul barei. Elementul de bară din intervalul iniţial $(x, x+dx)$ se va găsi la momentul t în intervalul

$$(x+u(x,t), x+dx+u(x+dx,t)) = (x+u(x,t), x+dx+u(x,t)+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx).$$

Alungirea specifică a acestui element va fi

$$\frac{[x+dx+u(x,t)+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx-(x+u(x,t))]-dx}{dx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Ca atare după legea lui Hooke, porţiunea de bară din dreapta secţiunii de abscisă x va acţiona asupra porţiunii din stânga secţiunii de abscisă x cu o forţă egală cu $ES\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ dirijată după Ox, E fiind modulul lui Young corespunzător materialului barei, S fiind aria secţiunii barei. Pentru a fi în condiţiile de linearitate cerute de legea lui Hooke vom presupune că $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ este aşa de mic încât putem neglija pătratul său şi produsele în care apare el împreună cu alte derivate. In aceste condiţii secţiunea S este practic constantă. Dacă notăm cu ρ_0 densitatea în starea neperturbată într-o secţiune oarecare şi cu $\rho(x,t)$ densitatea în secţiunea de absciisă x la momentul t scriind că masa se conservă vom avea

$$\rho(x,t)(dx+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx)S = \rho_0 dxS$$

de unde

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0}{1+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}} \approx \rho_0\left(1-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)$$

Dacă aplicăm teorema cantităţii de mişcare porţiunii de bară cuprinsă între secţiunile $x_1 < x_2$ vom avea

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}\rho_0\left(1-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)S\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx = ES\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x} - ES\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x} + \int_{x_1}^{x_2}\rho_0 Sf(x,t)dx$$

sau neglijând produsele despre care am amintit

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho_0 S\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dx = ES\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx + \int_{x_1}^{x_2}\rho_0 Sf(x,t)dx.$$

Am notat prin $f(x,t)$ mărimea forţei exterioare dirijată după Ox care acţionează asupra unităţii de masă iniţială a barei. Cum intervalul (x_1, x_2) este arbitrar rezultă

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),$$

sau notând $a^2 = \frac{E}{\rho_0}$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t).$$

Constanta a introdusă are dimensiunea $\sqrt{\frac{MLT^{-2}L^{-2}}{ML^{-3}}} = LT^{-1}$, adică dimensiunea unei viteze.

Dacă derivăm relaţia de mai sus în raport cu x avem

$$\frac{\partial^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\partial x^2} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$$

şi cum

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\rho_0 - \rho(x,t)}{\rho_0}$$

obţinem că densitatea verifică o ecuaţie de aceaşi formă

$$\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} - \rho_0 \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}.$$

Funcţia $u(x,t)$ trebuie determinată când cunoaştem valorile iniţiale $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v_0(x)$ şi anumite relaţii la capete. Dacă extremitatea stângă $x = 0$ este fixată atunci $u(0,t) = 0$. Dacă extremitatea stângă se mişcă după o anumită lege atunci $u(0,t) = \mu_1(t)$. Dacă extremitatea dreaptă $x = l$ este liberă şi nu există nici o forţă exterioară atunci tensiunea în această secţiune este nulă şi deci avem $-ES\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0$, dacă asupra capătului $x = l$ acţionează o forţă $F(t)$ atunci $-ES\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = F(t)$. Dacă extremitatea dreaptă $x = l$ este legată elastic la un sistem mobil atunci $-ES\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -k(u(l,t) - \theta(t))$, k fiind coeficientul de elasticitate, iar $\theta(t)$ dând mişcarea sistemului.

13.7 Ecuaţiile de mişcare ale unui fluid perfect

Prin *fluid perfect* se înţelege un mediu continuu în care au loc deformaţii mari şi în care dacă considerăm într-un punct $M(x,y,z)$ un element de suprafaţă $d\sigma$ de versor al normalei $\overrightarrow{n}$ atunci acţiunea fluidului din partea în care este dirijată normala asupra fluidului din cealaltă parte se reduce la o forţă egală cu $-p(x,y,z,t)\overrightarrow{n}d\sigma$. $p(x,y,z,t)$ se numeşte *presiune* şi este nenulă chiar în starea de echilibru a fluidului. Altfel spus în fluidele perfecte nu există vâscozitate.

O particulă fluidă care la momentul iniţial are vectorul de poziţie $\overrightarrow{R} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\overrightarrow{k}$ va avea la momentul t vectorul de poziţie $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ unde x, y, z sunt funcţii de X, Y, Z, t

$$\begin{aligned} x &= x(X, Y, Z, t) \\ y &= y(X, Y, Z, t) \\ z &= z(X, Y, Z, t) \end{aligned}$$

Având în vedere că două particule oarecare distincte trebuie considerate distincte tot timpul mişcării, funcţiile amintite mai sus sunt bijecţii, adică se pot explicita şi coordonatele iniţiale X, Y, Z ca funcţii de coordonatele x, y, z şi timpul t

$$\begin{aligned} X &= X(x, y, z, t) \\ Y &= Y(x, y, z, t) \\ Z &= Z(x, y, z, t). \end{aligned}$$

In acest fel orice mărime caracteristică a mişcării poate fi exprimată fie ca funcţie de coordonatele iniţiale X, Y, Z şi timpul t, fie ca funcţie de coordonatele x, y, z şi timpul t . Coordonatele X, Y, Z şi timpul t se numesc *coordonate materiale* sau *coordonate lagrangiene*; coordonatele x, y, z şi timpul t se numesc *coordonate spaţiale* sau *coordonate euleriene.*

Determinantul funcţional

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}$$

va păstra semn constant şi cum la momentul $t = 0$ el este egal cu 1, rezultă că va fi totdeuna strict pozitiv.

Dat fiind că în fluide deformaţiile sunt mari sunt de preferat coordonatele euleriene. Viteza unei particole fluide care la momentul iniţial ocupa poziţia (X, Y, Z) va fi în coordonale lagrangiene

$$\overrightarrow{V}(X, Y, Z, t) = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial t} = \frac{\partial x(X, Y, Z, t)}{\partial t}\overrightarrow{i} + \frac{\partial y(X, Y, Z, t)}{\partial t}\overrightarrow{j} + \frac{dz(X, Y, Z, t)}{\partial t}\overrightarrow{k}.$$

Inlocuind X, Y, Z ca funcţii de x, y, z obţinem pentru viteză expresia în coordonate euleriene

$$\overrightarrow{V}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\overrightarrow{i} + v(x, y, z, t)\overrightarrow{j} + w(x, y, z, t)\overrightarrow{k}.$$

Dacă cunoaştem componentele euleriene ale vitezei atunci cunoaştem mişcarea particolelor fluide pentru că traiectoria particolei care la momentul iniţial se găsea în (X, Y, Z) este soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{u(x,y,z,t)} = \frac{dz}{u(x,y,z,t)} = dt$$

care verifică condiţia iniţială $x(0) = X$, $y(o) = Y$, $z(0) = Z$.

Prin *linii de curent*, respectiv *suprafeţe de curent* se înţeleg liniile respectiv suprafeţele care la un moment dat sunt tangente la vectorul viteză. Evident suprafeţele de curent sunt generate de linii de curent. O linie de curent este soluţie a sistemului

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{u(x,y,z,t)} = \frac{dz}{u(x,y,z,t)}$$

în care t este un parametru.

Coordonatele euleriene permit să definim mişcările staţionare sau permanente. Anume, mişcare staţionară sau permanentă este acea mişcare în care viteza în orice punct legat rigid de sistemul de referinţă nu depinde de timp, altfel spus conponentele vitezei depind numai de x, y, z şi nu de timp. In cazul mişcărilor staţionare liniile de curent coincid cu traiectoriile.

In cazul coordonatelor lagrangeiene derivata unei mărimi în raport cu timpul pentru o particolă fixată este pur şi simplu o derivată parţială în raport cu timpul. Derivata unei mărimi în raport cu timpul pentru o particolă fixată se numeşte *derivată totală* sau *derivată materială*. Dacă o mărime scalară $f(x, y, z, t)$ este exprimată în coordonate euleriene derivata sa materială este

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}u(x,y,z,t) + \frac{\partial f}{\partial y}v(x,y,z,t) + \frac{\partial f}{\partial z}w(x,y,z,t)$$

sau

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \overrightarrow{V}\,\mathrm{grad}\, f.$$

In cazul mărimilor vectoriale trebuie aplicată această relaţie pentru fiecare componentă. In particular, pentru acceleraţia unei particole, derivata materială a vitezei particolei, obţinem

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + (\overrightarrow{V}\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{V}$$

unde am introdus operatorul de derivare în direcţia lui $\overrightarrow{V}$

$$\overrightarrow{V}\overrightarrow{\nabla} = (u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j} + w\overrightarrow{k})(\overrightarrow{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial z}) = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}.$$

Cum

$$(\overrightarrow{V}\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{V} = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\overrightarrow{V}^2) + \mathrm{rot}\,\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{V}$$

rezultă pentru acceleraţie

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\overrightarrow{V}^2) + \mathrm{rot}\,\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{V}.$$

Dacă considerăm o suprafaţă variabilă $\Sigma(t)$ de ecuaţie

$$G(x, y, z, t) = 0$$

ale cărei puncte se deplasează cu o viteză $\overrightarrow{W} = W\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n}$ fiind normala la suprafaţă scriind că la momentul $t + dt$ punctul se află pe suprafaţă vom avea neglijând termenii de ordin superior lui dt

$$G(x + W_x dt, y + W_y dt, z + W_z dt, t + dt) =$$

$$= G(x, y, z, t) + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{\partial G}{\partial x}W_x dt + \frac{\partial G}{\partial y}W_y dt + \frac{\partial G}{\partial z}W_z dt = 0$$

şi deci

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \overrightarrow{W}\,\mathrm{grad}\,G = 0$$

adică mărimea vitezei de deplasare este

$$W = -\frac{\frac{\partial G}{\partial t}}{|\mathrm{grad}\,G|}.$$

Pentru particolele care se află tot timpul pe suprafaţă vom avea

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \overrightarrow{V}\,\mathrm{grad}\,G = (\overrightarrow{V} - \overrightarrow{W})\,\mathrm{grad}\,G = 0$$

adică avem condiţia

$$\overrightarrow{V}\overrightarrow{n} = \overrightarrow{W}\overrightarrow{n}.$$

In cazul unei suprafeţe fixe vom avea condiţia

$$\overrightarrow{V}\overrightarrow{n} = 0.$$

De asemenea vom avea formule speciale pentru calculul derivatei în raport cu timpul pentru integralele pe domenii materiale sau pe suprafeţe materiale. Pentru integrala

$$I(t) = \int\limits_{D(t)} \varphi(x, y, z, t) dv$$

vom avea într-o deducere euristică

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lim_{t' \to t} \frac{1}{t' - t} \left(\int\limits_{D(t')} \varphi(x, y, z, t') dv - \int\limits_{D(t)} \varphi(x, y, z, t) dv \right)$$

Domeniile $D(t'), D(t)$ vor avea o porţinune comună $D_I = D(t') \cap D(t)$ şi două porţiuni $D_{II} = D(t') \setminus D(t)$, $D_{III} = D(t) \setminus D(t')$. Neglijând termeni de ordinul doi în $t' - t$ se vede că elementul de volum al lui D_{II} este $\overrightarrow{n}\overrightarrow{V} d\sigma(t' - t)$, iar elementul de volum al lui D_{III} este $-\overrightarrow{n}\overrightarrow{V} d\sigma(t' - t)$, unde d$\sigma$ este elementul de arie pe frontiera $\partial D(t)$. Avem deci

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \int\limits_{D(t)} \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} dv + \int\limits_{\partial D(t)} \varphi(x, y, z, t) \overrightarrow{n}\overrightarrow{V} d\sigma = \\ &= \int\limits_{D(t)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \overrightarrow{V}) \right) dv. \end{aligned}$$

O demonstraţie riguroasă a acestei relaţii pleacă de la formula de schimbare de variabile în integrală. Vom avea nevoie de derivata determinantului funcţional

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}.$$

Conform regulii de derivare a unui determinant avem

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{D(u, y, z)}{D(X, Y, Z)} + \frac{D(x, v, z)}{D(X, Y, Z)} + \frac{D(x, y, w)}{D(X, Y, Z)}$$

şi deci

$$\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt} = \frac{D(u, y, z)}{D(x, y, z)} + \frac{D(x, v, z)}{D(x, y, z)} + \frac{D(x, y, w)}{D(x, y, z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \overrightarrow{V}$$

Acum vom putea scrie

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int\limits_{D(0)} J\varphi dX dY dZ = \int\limits_{D(0)} \frac{d(J\varphi)}{dt} dX dY dZ = \int\limits_{D(t)} \frac{1}{J} \frac{d(J\varphi)}{dt} dx dy dz = \\ &= \int\limits_{D(t)} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} \overrightarrow{V} \right) dv = \int\limits_{D(t)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \overrightarrow{V}) \right) dv. \end{aligned}$$

Observăm că în expresia derivatei apare un termen datorat variaţiei în timp a funcţiei şi un termen datorat variaţiei domeniului. Acest ultim termen se numeşte *termenul convectiv.*

O aplicaţie imediată a formulei stabilite este stabilirea aşa numitei *ecuaţii de continuitate* prin care exprimăm faptul că masa unui domeniu material se conservă în mişcare. In adevăr putem scrie pentru orice domeniu material $D(t), \rho(x,y,z,t)$ fiind densitatea fluidului

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} \rho(x,y,z,t)dv = \int\limits_{D(t)} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\overrightarrow{V})\right) dv = 0.$$

Cum domeniul $D(t)$ este arbitrar rezultă ecuaţia de continuitate

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\overrightarrow{V}) = 0$$

sau

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\overrightarrow{V} = 0.$$

In cazul unui fluid incompresibil $\rho = \rho_0$ rezultă ecuaţia de continuitate pentru fluide incompresibile

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V} = 0$$

Folosind ecuaţia de continuitate rezultă formula de derivare a integralelor care conţin densitatea ρ

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} \rho(x,y,z,t)f(x,y,z,t)dv = \int\limits_{D(t)} \rho(x,y,z,t)\frac{df(x,y,z,t)}{dt}dv.$$

Ca să găsim ecuaţiile de mişcare vom scrie pentru un domeniu material oarecare $D(t)$ teoremele variaţiei cantităţii de mişcare şi a momentului cantităţii de mişcare

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} \rho\overrightarrow{V}dv = -\int\limits_{\partial D(t)} p\overrightarrow{n}d\sigma + \int\limits_{D(t)} \rho\overrightarrow{f}dv$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} \rho\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{V}dv = -\int\limits_{\partial D(t)} p\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{n}d\sigma + \int\limits_{D(t)} \overrightarrow{r}\times\rho\overrightarrow{f}dv.$$

Am notat prin $\overrightarrow{f}$ densitatea masică a forţelor exterioare- forţa exterioară care acţionează asupra unităţii de masă a fluidului. După formulele de derivare de mai sus rezultă

$$\int\limits_{D(t)} \rho\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}dv = -\int\limits_{D(t)} (\operatorname{grad} p + \rho\overrightarrow{f})dv$$

$$\int_{D(t)} \overrightarrow{r} \times \rho \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} dv = -\int_{D(t)} \overrightarrow{r} \times (\operatorname{grad} p + \rho \overrightarrow{f}) dv.$$

Am ţinut cont că

$$\int_{\partial D(t)} p \overrightarrow{n} d\sigma = \int_{D(t)} \operatorname{grad} p dv$$

$$\int_{\partial D(t)} p \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{n} d\sigma = -\int_{D(t)} \operatorname{rot}(p \overrightarrow{r}) dv$$

şi că

$$\operatorname{rot}(p \overrightarrow{r}) = p \operatorname{rot} \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r} \times \operatorname{grad} p = -\overrightarrow{r} \times \operatorname{grad} p$$

Cum domeniul $D(t)$ este arbitrar rezultă că în fiecare punct al domeniului mişcării are loc ecuaţia lui Euler

$$\rho \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \overrightarrow{f}$$

sau

$$\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \overrightarrow{V}^2) + \operatorname{rot} \overrightarrow{V} \times \overrightarrow{V} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \overrightarrow{f}.$$

Am obţinut astfel un sistem de patru ecuaţii cu derivate parţiale - ecuaţia de continuitate şi cele trei proiecţii ale *ecuaţiei lui Euler*- cu cinci necunoscute- presiunea, densitatea şi cele trei componente ale vitezei. Dacă fluidul este incompresibil atunci avem patru ecuaţii cu patru necunoscute. In cazul fluidului compresibil mai trebuie adăugată o ecuaţie. Fluidul se cheamă *barotrop* dacă există o relaţie între presiune şi densitate. O asemenea relaţie este de forma

$$p = \frac{p_0}{\rho_0 \gamma} \rho \gamma,$$

γ fiind o constantă care pentru aer are valoarea $\gamma = 1.4$.

Dacă considerăm că suntem în cazul unui fluid barotrop asupra căruia acţionează o forţă exterioară potenţială $\overrightarrow{f} = -\operatorname{grad} F$ şi aplicăm rotorul ecuaţiei de mişcare a lui Euler şi notăm $\overrightarrow{\omega} = \operatorname{rot} \overrightarrow{V}$ obţinem

$$\frac{\partial \overrightarrow{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{V}).$$

Cum

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{V}) = (\overrightarrow{V} \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{\omega} - (\overrightarrow{\omega} \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\omega} \operatorname{div} \overrightarrow{V} - \overrightarrow{V} \operatorname{div} \overrightarrow{\omega}$$

şi $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overrightarrow{V}=0$ rezultă

$$\frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}-(\overrightarrow{\omega}\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{V}+\overrightarrow{\omega}\operatorname{div}\overrightarrow{V}=0$$

sau ţinând cont şi de ecuaţia de continuitate

$$\frac{d\frac{\overrightarrow{\omega}}{\rho}}{dt}-\frac{1}{\rho}(\overrightarrow{\omega}\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{V}=0$$

sau pe componente cu folosirea indicilor muţi

$$\frac{d\frac{\omega_i}{\rho}}{dt}=\frac{1}{\rho}\omega_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}.$$

Făcând o schimbare de variabile

$$\frac{\omega_i}{\rho}=c_j\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

rezultă

$$\frac{dc_j}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial X_j}+c_j\frac{\partial V_i}{\partial X_j}=c_k\frac{\partial x_j}{\partial X_k}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=c_k\frac{\partial V_i}{\partial X_k}$$

adică $\frac{dc_j}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial X_j}=0$ şi deci c_j =constant. Rezultă

$$\frac{\omega_i}{\rho}=\frac{\omega_j^0}{\rho^0}\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

adică, dacă la momentul 0 mişcarea este irotaţională ea va fi tot timpul irotaţională.

Suntem astfel conduşi să studiem mişcările irotaţionale în care va exista o funcţie $\varphi(x,y,z,t)$ astfel încât

$$\overrightarrow{V}=\operatorname{grad}\varphi(x,y,z,t).$$

O asemenea mişcare se mai numeşte şi *potenţială* şi funcţia $\varphi(x,y,z,t)$ se numeşte *potenţialul mişcării*.In cazul mişcării potenţiale ale unui fluid incompresibil ecuaţia de continuitate conduce la ecuaţia lui Laplace

$$\triangle\varphi(x,y,z,t)=0.$$

Aceasta trebuie rezolvată ţinând cont de condiţiile pe suprafeţele obstacol şi de alte condiţii care definesc mişcarea (condiţii la mari distanţe, diferite singularităţi ale mişcării, etc).

Dacă ne situăm în cazul mişcării fluidului barotrop sau incompresibil în prezenţa unor forţe exterioare potenţiale şi înmulţim scalar cu $\overrightarrow{V}$ ecuaţia lui Euler

$$\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}(\operatorname{grad}\overrightarrow{V}^2)+\operatorname{rot}\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{V}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p-\operatorname{grad}F$$

obţinem

$$\overrightarrow{V}\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \overrightarrow{V}\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{V}^2 + \int \frac{dp}{\rho} + F\right) = 0$$

Dacă notăm

$$B = \frac{1}{2}\overrightarrow{V}^2 + \int \frac{dp}{\rho} + F$$

în cazul mişcării staţionare obţinem

$$\frac{dB}{dt} = 0$$

adică avem prima teoremă a lui Bernoulli

In cazul mişcării staţionare a unui fluid perfect asupra căruia acţionează forţe exterioare potenţiale, *funcţia lui Bernoulli* $B = \frac{1}{2}\overrightarrow{V}^2 + \int \frac{dp}{\rho} + F$ rămâne constantă de-a lungul traiectoriilor.

De exemplu, dacă aplicăm această teoremă în cazul unui fluid care se scurge dintr-un vas cu suprafaţa liberă printr-un orificiu situat sub suprafaţa liberă la distanţa h, presiunea la suprafaţa liberă şi la ieşirea prin orificiu fiind p_0, dacă orificiul este mic în comparaţie cu suprafaţa liberă putem presupune că la suprafaţa liberă viteza este nulă. dacă notăm cu V viteza la ieşirea din orificiu vom avea pentru funcţia lui Bernoulli valorile: la suprafaţa liberă $B_1 = \frac{p_0}{\rho}$, la ieşirea din orificiu $B_2 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V^2}{2} - gh$. Din egalare rezultă *formula lui Torricelli* $V = \sqrt{2gh}$.

Din relaţia

$$\mathrm{div}(\rho B\overrightarrow{V}) = B\,\mathrm{div}(\rho\overrightarrow{V}) + \rho\overrightarrow{V}\,\mathrm{grad}\,B$$

şi din ecuaţia de continuitate avem

$$\mathrm{div}(\rho B\overrightarrow{V}) = -\left[B\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial \frac{\overrightarrow{V}^2}{2}}{\partial t}\right] = -\frac{\partial \rho\frac{\overrightarrow{V}^2}{2}}{\partial t} - \left(\int \frac{dp}{\rho} + F\right)\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Integrând pe un domeniu oarecare $D(t)$ din fluid de suprafaţă $\partial D(t)$ avem

$$\int\limits_{\partial D(t)} \rho B(\overrightarrow{V}\,\overrightarrow{n})d\sigma = -\int\limits_{D(t)} \left[\frac{\partial \rho\frac{\overrightarrow{V}^2}{2}}{\partial t} + \left(\int \frac{dp}{\rho} + F\right)\frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dv.$$

Dacă mişcarea este staţionară atunci membrul drept este nul şi deci fluxul funcţiei lui Bernoulli prin orice suprafaţă închisă este nul. Acesta este enunţul formei integrale a teoremei lui Bernoulli.

Dacă mişcarea este irotaţională atunci

$$\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} = \frac{\partial\, \mathrm{grad}\, \varphi}{\partial t} = \mathrm{grad}\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

şi ecuaţia de mişcare a lui Euler în cazul fluidului barotrop sau incompresibil în prezenţa forţelor exterioare potenţiale devine

$$\mathrm{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{V}^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + F \right) = 0,$$

de unde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{V}^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + F = C(t)$$

în întreg domeniul mişcării. In cazul mişcării staţionare

$$\frac{\overrightarrow{V}^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + F = C.$$

Aceasta este a doua teoremă a lui Bernoulli.

13.8 Problema lui Cauchy, clasificarea ecuaţiilor

Prin *problema lui Cauchy* pentru ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul 2

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) = 0$$

se înţelege problema determinării unei soluţii $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ pentru care se cunosc valorile sale u şi ale derivatei normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ pe o hipersuprafaţă S din spaţiul variabilelor independente de ecuaţie $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, ..., x_n)|_S &= \varphi_0(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S &= \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

Din punct de vedere geometric problema lui Cauchy revine la determinarea unei hipersuprafeţe integrale $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ care să treacă prin suprafaţa n–1-dimensională din R^{n+1}

$$u = \varphi_0(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

şi pentru care se cunosc planele tangente.

O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul doi se numeşte *normală în raport cu variabila independentă* x_1 dacă ecuaţia este de formă explicită în raport cu derivata $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}).$$

De exemplu, ecuaţia corzii vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

poate fi adusă la formă normală atât în raport cu variabila t cât şi cu variabila x; ecuaţia căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

poate fi adusă la formă normală în raport cu variabila x, dar nu poate fi adusă la formă normală în raport cu variabila t; ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

nu poate fi adusă la formă normală nici în raport cu variabila x, nici în raport cu variabila y.

Prin problemă a lui Cauchy pentru o ecuaţie cu derivate parţiale normală în raport cu variabila x_1 se înţelege problema determinării soluţiei $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ pentru care se cunosc valorile sale şi ale derivatei normale pe hiperplanul $x_1 = x_1^0$:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, ..., x_n)\big|_{x_1 = x_1^0} &= \varphi_0(x_2, ..., x_n), \\ \left.\frac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1}\right|_{x_1 = x_1^0} &= \varphi_1(x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

O problemă a lui Cauchy pentru o ecuaţie cu derivate parţiale normală în raport cu o variabilă se mai numeşte şi *problemă cu date iniţiale*.

Observăm că dacă într-o problemă a lui Cauchy pentru o ecuaţie cu derivate parţiale normală în raport cu variabila x_1 funcţiile $\Phi, \varphi_0, \varphi_1$ sunt analitice în vecinătatea punctului $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ atunci în acest punct putem calcula:

- din prima condiţie iniţială toate derivatele parţiale $\frac{\partial^{i_2+i_3+...+i_n} u}{\partial x_2^{i_2} x_3^{i_3} ... x_n^{i_n}}$;
- din a doua condiţie iniţială toate derivatele $\frac{\partial^{1+i_2+...+i_n} u}{\partial x_1 \partial x_2^{i_2} ... \partial x_n^{i_n}}$;

- din ecuaţie şi din primele doua tipuri de calcule toate derivatele.

Bazându-ne pe aceste calcule se poate demonstra

Teorema lui Cauchy-Kovalevskaia: Dacă funcţiile Φ, φ_0, φ_1 sunt analitice în vecinătatea punctului $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ atunci problema lui Cauchy pentru ecdpo2 normală în raport cu variabila x_1 admite într-o vecinătate a acestui punct o soluţie analitică unică.

Să considerăm acum ecdpo2 cvasiliniară

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, A_{ij}(x) = A_{ji}(x).$$

Să facem o schimbare de variabile trecând de la vechile variabile independente $x_1, x_2, ..., x_n$ la noile variabile independente $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ prin relaţiile

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \xi_2 &= \xi_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &..... \\ \xi_n &= \xi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \\ x_2 &= x_2(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \\ &..... \\ x_n &= x_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \end{aligned}$$

cu funcţii cu derivate parţiale de ordinul doi continue şi cu iacobianul nenul în vecinătatea punctului $(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0)$ corespunzător lui $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Să ne punem mai întâi problema în ce se transformă ecuaţia dată prin această schimbare de variabile. Vom nota cu $u(\xi) = u(x(\xi))$ noua funcţie.

Cum avem

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_p}\frac{\partial \xi_p}{\partial x_i}, i = 1, 2, ..., n,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p \partial \xi_q}\frac{\partial \xi_p}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_q}{\partial x_j} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_p}\frac{\partial^2 \xi_p}{\partial x_i \partial x_j}$$

ecuaţia dată devine

$$\sum_{p,q=1}^{n} A^*_{p,q}(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_p\partial\xi_q} + f^*(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,u,\frac{\partial u}{\partial\xi_1},...,\frac{\partial u}{\partial\xi_n}) = 0,$$

unde

$$A^*_{p,q}(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\frac{\partial\xi_p}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_q}{\partial x_j}.$$

Suntem conduşi să introducem forma patratică

$$\triangle(l_1,l_2,...,l_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)l_i l_j$$

numită *forma pătratică caracteristică* a ecuaţiei cvasilineare în punctul $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$. Să presupunem că trecem de la variabilele $l_1,l_2,...,l_n$ la noile variabile $l_1^*,l_2^*,...,l_n^*$ prin relaţiile

$$\begin{aligned} l_i &= \sum_{p=1}^{n} s_{ip}l_p^*, \\ l_j &= \sum_{q=1}^{n} s_{jq}l_q^*. \end{aligned}$$

Forma pătratică devine

$$\triangle^*(l_1^*,l_2^*,...,l_n^*) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\sum_{p=1}^{n} s_{ip}l_p^*\sum_{q=1}^{n} s_{jq}l_q^* = \sum_{p,q=1}^{n} A^*_{p,q}l_p^*l_q^*$$

unde

$$A^*_{p,q} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}s_{ip}s_{jq}$$

Observăm că dacă luăm

$$s_{i,p} = \left.\frac{\partial\xi_p}{\partial x_i}\right|_{(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)}$$

atunci formulele de schimbare a coeficienţilor formei pătratice şi formulele de schimbare a coeficienţilor eccdpo2 coincid. Ştim de la algebră lineară că pentru orice formă pătratică există cel puţin o schimbare de variabile astfel că forma pătratică se reduce la sumă de pătrate. Alegând o asemenea schimbare de variabile -coeficienţii $s_{i,p}$- forma pătratică va deveni

$$\triangle^*(l_1^*,l_2^*,...,l_n^*) = \sum_{p=1}^{n}\varepsilon_p l_p^{*2}$$

unde numerele ε_p au una din valorile -1,0,1. Conform teoremei de inerţie oricum am face reducerea la sumă de pătrate numărul coeficienţilor ε_p pozitivi rămâne constant, numărul coeficienţilor ε_p negativi rămâne constant şi numărul coeficienţilor ε_p nuli rămâne constant. Alegănd derivatele parţiale ale schimbării de variabilă astfel încât

$$\left.\frac{\partial \xi_p}{\partial x_i}\right|_{(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)} = s_{i,p}$$

în punctul $(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0)$ ecdpo2 va avea forma

$$\sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p^2} + f^*(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial \xi_n}) = 0$$

Invarianţa celor trei numere de mai sus permite o clasificare ecdpo2 aproape lineare. Dacă toţi coeficienţii ε_p sunt strict pozitivi sau strict negativi ecuaţia se numeşte de *tip eliptic* în punctul $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Dacă nu există coeficienţi ε_p nuli şi numai unul este de semn contrar celorlalţi ecuaţia se numeşte de *tip hiperbolic*. Dacă nu există coeficienţi ε_p nuli dar există mai mulţi de semn contrar celorlalţi ecuaţia se numeşte de *tip ultrahiperbolic*. Dacă există coeficienţi ε_p nuli ecuaţia se numeşte de *tip parabolic*. Dacă în toate punctele unui domeniu D ecdpo2 are acelaşi tip se spune că ecdpo2 are acel tip în domeniul D.

In cazul ecdpo2 aproape lineare cu coeficienţi constanţi prin schimbarea de variabile

$$\xi_i = \sum_{p=1}^{n} s_{ip} x_p$$

ecdpo2 devine

$$\sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p^2} + f^*(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial \xi_n}) = 0$$

adică are tip constant în toate punctele.

Exemplul 1. Fie ecdpo2 lineară cu coeficienţi constanţi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Forma pătratică asociată este

$$\triangle = l_1^2 + 2l_1 l_2 + 2l_2^2 + 4l_2 l_3 + 5l_3^2.$$

Prin procedeul lui Gauss de reducere la formă canonică găsim

$$\triangle^* = l_1^{*2} + l_2^{*2} + l_3^{*2}$$

unde

$$\begin{aligned} l_1^* &= l_1 + l_2 \\ l_2^* &= l_2 + 2l_3 \\ l_3^* &= l_3 \end{aligned}$$

sau invers

$$\begin{aligned} l_1 &= l_1^* - l_2^* + 2l_3^* \\ l_2 &= l_2^* - 2l_3^* \\ l_3 &= l_3^* \end{aligned}$$

Dacă vom face schimbarea de variabile

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \\ \xi_2 &= -x_1 + x_2 \\ \xi_3 &= 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

ecuaţia devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi_1} = 0.$$

adică este peste tot de tip eliptic.

Ecuaţia lui Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

este de tip eliptic în tot R^n. Ecuaţiile undelor sonore, vibraţiilor membranei sau corzii sunt de tip hiperbolic în R^4, R^3, R^2 respectiv. Ecuaţia căldurii este de tip parabolic în R^4, R^3, R^2 după cum suntem în spaţiul tridimensional, în plan sau pe axa reală.

Pentru ecdpo2 cvasiliniară în două variabile x, y

$$A_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

forma pătratică caracteristică este

$$\triangle(l,m) = A_{11}(x,y)l^2 + 2A_{12}(x,y)lm + A_{22}(x,y)m^2$$

Discriminantul acestei forme pătratice este

$$\delta(x,y) = A_{12}(x,y)^2 - A_{11}(x,y)A_2(x,y)$$

In domeniul în care $\delta(x,y) > 0$ forma pătratică este o diferenţă de pătrate şi deci ecdpo2 este de tip hiperbolic; în domeniul în care $\delta(x,y) = 0$ forma pătratică se reduce la un singur pătrat şi deci ecdpo2 este de tip parabolic; în domeniul în care $\delta(x,y) < 0$ forma pătratică se reduce la o sumă de pătrate şi deci ecdpo2 este de tip eliptic.

Reluăm ecdpo2 cvasilineară generală

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0.$$

şi facem o schimbare de variabile trecând de la vechile variabile independente $x_1, x_2, ..., x_n$ la noile variabile independente $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ prin relaţiile

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \xi_2 &= \xi_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &..... \\ \xi_n &= \xi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \\ x_2 &= x_2(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \\ &..... \\ x_n &= x_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \end{aligned}$$

cu funcţii cu derivate parţiale de ordinul doi continue şi cu iacobianul nenul în vecinătatea punctului $(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0)$ corespunzător lui $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Să ne punem acum problema cum trebuie aleasă schimbarea de variabile astfel încât noua ecuaţie să fie normală în raport cu variabila ξ_1 în vecinătatea punctului $(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0)$. Conform relaţiilor stabilite mai sus este necesar ca funcţia $\xi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ să verifice în vecinătatea punctului $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ relaţia

$$A_{11}^* = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_j} \neq 0.$$

Suntem conduşi să introducem următoarele definiţii

O funcţie $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ se numeşte *variabilă caracteristică* pentru ecdpo2 cvasiliniară dacă satisface *ecuaţia variabilelor caracteristice*

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$$

cu condiţia

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 \neq 0.$$

Dacă funcţia $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ este o variabilă caracteristică, hipersuprafaţa din R^n de ecuaţie $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \xi_1^0$ (ξ_1^0 o constantă) se numeşte *suprafaţă caracteristică.* De aceea ecuaţia variabilelor caracteristice este numită şi *ecuaţia suprafeţelor caracteristice.* Dacă în ecuaţia caracteristicilor punem $l_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ obţinem aceeaşi formă pătratică de mai sus

$$\begin{aligned} \triangle(l_1, l_2, ..., l_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) l_i l_j, \\ \sum_{i=1}^{n} l_i^2 &\neq 0. \end{aligned}$$

Hiperplanul de ecuaţie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - x_i^0) &= 0, \\ \triangle(l_1, l_2, ..., l_n) &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

este hiperplanul tangent suprafeţei caracteristice în punctul dat, $l_1, l_2, ..., l_n$ fiind parametrii directori ai normalei la suprafaţa caracteristică.

Noţiunea de suprafaţă caracteristică este evident legată de problema Cauchy. Intradevăr, dacă suprafaţa $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \xi_1^0$ este o suprafaţă necaracteristică conţinând punctul $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ atunci în vecinătatea acestui punct vom avea $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \neq 0$ şi alegând o schimbare de variabile în care $\xi_1 = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ecdpo2 devine o ecdpo2 normală în raport cu variabila ξ_1 şi în condiţiile teoremei lui Cauhy-Kovalevskaia problema lui Cauchy va avea o soluţie unică analitică în vecinătatea punctului $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Dacă suprafaţa $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \xi_1^0$ este o suprafaţă caracteristică printr-o schimbare de variabile în care $\xi_1 = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ecdpo2 devine în vecinătatea $\xi_1 = \xi_1^0$ a punctului $(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_n^0)$ de forma

$$\sum_{i,j=2}^{n} A_{ij}^* \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^* \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_j} + f^*(\xi_1^0, \xi_2, ..., \xi_n, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial \xi_n}) = 0$$

sau, ţinând cont de condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u|_{\xi_1=\xi_1^0} &= \varphi_0(\xi_2, ..., \xi_n) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_1=\xi_1^0} &= \varphi_1(\xi_2, ..., \xi_n) \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j=2}^{n} A_{ij}^* \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^* \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_j} + f^*(\xi_1^0, \xi_2, ..., \xi_n, \varphi_0, \varphi_1, ..., \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi_n}) = 0$$

Observăm că datele iniţiale nu mai pot fi arbitrare. Dacă ele verifică relaţia de mai sus soluţia problemei lui Cauchy poate să nu fie unică, dacă datele iniţiale nu verifică relaţa de mai sus problema lui Cauchy este imposibilă.

Dacă funcţia u este cunoscută de-a lungul suprafeţei caracteristice $u|_{\xi_1=\xi_1^0} = \varphi_0(\xi_2, ..., \xi_n)$ atunci ecuaţia cu derivate parţiale iniţială devine o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi relativ la funcţia necunoscută $\left.\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_1=\xi_1^0} = \varphi_1(\xi_2, ..., \xi_n)$. Aceasta este o proprietate foarte importantă a suprafeţelor caracteristice.

Exemplul 2. Să lămurim situaţia în cazul problemei lui Cauchy pentru ecdpo2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,\, u(x,y)|_{x=0} = \varphi_0(y),\, \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(y).$$

Ecuaţia caracteristicilor este

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

deci caracteristicile sunt dreptele $x = x_0$ sau $y = y_0$. Problema lui Cauchy dată este o problemă a lui Cauchy pe o caracteristică $x = 0$. Observăm că pe caracteristică avem din data iniţială $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_1(y)$ şi deci $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x=0} = \varphi_1'(y)$. Pe de altă parte ecuaţia implică $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x=0} = 0$, adică ecuaţia dată se reduce la ecuaţia $\varphi_1'(y) = 0$. Deci problema lui Cauchy este posibilă numai dacă $\varphi_1(y) = k$=constant. Dar soluţia generală a ecuaţei date este $u(x,y) = \alpha(x) + \beta(y)$ cu α, β funcţii arbitrare. Din datele iniţiale avem $u(0,y) = \alpha(0) + \beta(y) = \varphi_0(y)$ şi deci $\beta(y) = \varphi_0(y) - \alpha(0)$. Dar avem şi $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha'(0) = \varphi_1(y)$. Regăsim condiţia $\varphi_1(y) = k =$ constant. Dacă aceasta condiţie este îndeplinită atunci soluţia este

$$u(x,y) = \alpha(x) + \varphi_0(y) - \alpha(0)$$

unde $\alpha(x)$ este funcţie supusă la condiţia $\alpha'(0) = k$. Dacă nu avem $\varphi_1(y) = k =$ constant problema lui Cauchy este imposibilă.

In concluzie, putem spune că suprafeţele caracteristice sunt acele suprafeţe pentru care problema lui Cauchy este sau imposibilă sau nedeterminată.

Pentru ecuaţia lui Poisson tridimensională

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

suprafeţele caracteristice ar trebui să fie date de relaţiile

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 &= 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 &\neq 0, \end{aligned}$$

adică suprafeţe caracteristice reale nu există.

Pentru ecuaţia căldurii în spaţiu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(x, y, z, t)$$

caracteristicile sunt date de relaţiile

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 &= 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 &\neq 0, \end{aligned}$$

adică suprfeţele caracteristice sunt tangente planelor $t - t_0 = 0$, aceste plane fiind si ele suprafeţe caracteristice.

Pentru ecuaţia undelor în spaţiu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(x, y, z, t)$$

caracteristicile sunt date de relaţiile

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - a^2 \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 &\neq 0, \end{aligned}$$

adică suprafeţele caracteristice sunt tangente hiperplanelor ale căror normale fac cu axa Ot unghiuri egale cu arccos $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$, deci suprafeţe caracteristice sunt aceste hiperplane şi hiperconurile de rotaţie în jurul paralelelor la axa Ot înfăşuratoare ale hiperplanelor cu unghiul din vârf egal cu 2arccos $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Pentru ecuaţia vibraţiilor membranei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t)$$

suprafeţele caracteristice vor fi planele din spaţiul xyt ale căror normale fac cu axa Ot unghiuri egale cu arccos $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ şi conurile de rotaţie în jurul paralelelor la axa Ot cu unghiul din vârf egal cu 2arccos $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Pentru ecdpo2 în două variabile

$$A_{11}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{12}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{22}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

vom avea în planul xOy curbe caracteristice de ecuaţie $\varphi(x, y) = C$ funcţia $\varphi(x, y)$ verificând relaţiile

$$\begin{aligned} A_{11}(x, y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + A_{22}(x, y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 &= 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 &\neq 0. \end{aligned}$$

De-alungul unei asemenea curbe caracteristice vom avea

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$$

şi deci vom avea

$$A_{11}(x, y)dy^2 - 2A_{12}(x, y)dxdy + A_{22}(x, y)dx^2 = 0.$$

Rezultă că orice curbă caracteristică este linia de nivel constant a unei integrale prime a ecuaţiei diferenţiale de mai sus. Aceasta se numeşte şi ea ecuaţia caracteristicilor. Notând $y' = \frac{dy}{dx}$ ecuaţia caracteristicilor se scrie

$$A_{11}(x, y)y'^2 - 2A_{12}(x, y)y' + A_{22}(x, y) = 0$$

ecuaţie ale cărei rădăcini sunt reale distncte, reale egale sau imaginar conjugate după cum realizantul $\delta(x, y) = A_{12}(x, y)^2 - A_{11}(x, y)A_{22}(x, y)$ este pozitiv, nul sau negativ.

Rezultă că ecdpo2 aproape lineară în două variabile admite două familii de caracteristice reale în domeniul de hiperbolicitate, o singură familie de caracteristici reale în domeniul de parabolicitate sau două familii de caracteristici imaginar conjugate în domeniul de elipticitate.

Pentru ecuaţia vibraţiilor corzii

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

ecuaţia caracteristicilor este

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

sau

$$(dx - adt)(dx + adt) = 0$$

şi deci avem două familii de caracteristici date de familiile de drepte

$$x \pm at = C.$$

Observaţie. Puteam găsi ecuaţia caracteristicilor pentru ecdpo2 aproape lineară în două variabile raţionând astfel:

Fie curba plană C de ecuaţii parametrice $x = x(s)$, $y = y(s)$, s fiind o abscisă curbilinie. Atunci versorul tangentei la curbă are componentele $x'(s), y'(s)$, iar versorul normalei are componentele $-y'(s), x'(s)$. Datele problemei lui Cauchy sunt

$$\begin{aligned} u(x(s), y(s)) &= \varphi_0(s) \\ \left.\frac{du}{dn}\right|_C &= -u_x|_C y'(s) + u_y|_C x'(s) = \varphi_1(s) \end{aligned}$$

Cum din prima relaţie rezultă

$$u_x|_C x'(s) + u_y|_C y'(s) = \varphi_0'(s)$$

rezultă că din datele problemei lui Cauchy putem determina în mod unic valorile pe curba C ale derivatelor de primul ordin $u_x|_C, u_y|_C$. Derivând aceste valori de-alungul curbei C avem

$$\begin{aligned} u_{xx}|_C x'(s) + u_{xy}|_C y'(s) &= \frac{d}{ds} u_x|_C \\ u_{xy}|_C x'(s) + u_{yy}|_C y'(s) &= \frac{d}{ds} u_y|_C \end{aligned}$$

In plus de-alungul curbei C ecuaţia se scrie

$$A_{11}(x(s),y(s))u_{xx}|_C + 2A_{12}(x(s),y(s))u_{xy}|_C + A_{22}(x(s),y(s))u_{yy}|_C + f|_C = 0.$$

Ultimele trei relaţii constituie un sistem în necunoscutele $u_{xx}|_C, u_{xy}|_C, u_{yy}|_C$. Dacă problema lui Cauchy are soluţie unică determinantul coeficienţilor acestui sistem

$$\begin{vmatrix} A_{11}(x(s),y(s)) & 2A_{12}(x(s),y(s)) & A_{22}(x(s),y(s)) \\ x'(s) & y'(s) & 0 \\ 0 & x'(s) & y'(s) \end{vmatrix}$$

este nenul, când curba C este o curbă caracteristică determinantul este nul. Regăsim ecuaţia curbelor caracteristice

$$A_{11}(x,y)dy^2 - 2A_{12}(x,y)dxdy + A_{22}(x,y)dx^2 = 0.$$

13.9 Exerciţii

Să se reducă la formă canonică ecuaţiile lineare cu coeficienţi constanţi:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

R. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0$, $\xi = x + \frac{1}{2}y - z$, $\eta = -\frac{1}{2}y$, $\zeta = z$.

2. $u_{xx} + u_{tt} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{tx} + u_{xz} + u_{ty} - 2u_{yz} = 0.$

R. $u_{t't'} - u_{x'x'} - u_{y'y'} - u_{z'z'} = 0$, $t' = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$,
$x' = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, $y' = -\frac{1}{2\sqrt{3}}t + \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}y - \frac{1}{2\sqrt{3}}z$,
$z' = -\frac{1}{2\sqrt{5}}t + \frac{1}{2\sqrt{5}}x - \frac{1}{2\sqrt{5}}y + \frac{1}{2\sqrt{5}}z$.

13.10 Ecdpo2 cvasilineare în două variabile.

Am văzut că o ecdpo2 cvasilineară în n variabile cu coeficienţi constanţi poate fi redusă la forma canonică. In cazul coeficienţilor variabili pentru a reduce la formă canonică, funcţiile $\xi_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ care dau schimbarea de variabile ar trebui să verifice

- $\frac{n(n-1)}{2}$ condiţii $A^*_{p,q} = 0, p \neq q, p, q = 1, 2, ..., n$;
- $n - 1$ condiţii $A^*_{pp} = \varepsilon_p A^*_{11}, p = 1, 2, ..., n - 1$.

Problema va fi posibila numai dacă numărul total de condiţii este mai mic decât numărul de funcţii necunoscute $\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \leq n$ adică $n \leq 2$. Vom arăta că în cazul ecdpo2 cvasilineare cu doua variabile x, y putem stabili anumite forme canonice. Fie o asemenea ecuaţie

$$A_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$$

Ecuaţia curbelor caracteristice ca linii de nivel constant este

$$\begin{aligned} A_{11}(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + A_{22}(x,y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 &= 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 &\neq 0, \end{aligned}$$

iar în diferenţiale este

$$A_{11}(x,y)dy^2 - 2A_{12}(x,y)dxdy + A_{22}(x,y)dx^2 = 0.$$

Discriminantul care dă tipul ecuaţiei este

$$\delta(x,y) = A_{12}(x,y)^2 - A_{11}(x,y)A_2(x,y).$$

Dacă ambii coeficienţi $A_{11}(x,y), A_{22}(x,y)$ sunt nuli în domeniu atunci ecdpo2 este în domeniu de tip hiperbolic şi după împăţire cu $2A_{12}$ se scrie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f^*(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

sau cu schimbarea de variabile $\xi = x + y, \eta = x - y$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + f^{**}(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0.$$

In cazul general putem presupune $A_{11}(x,y)$ nenul în domeniu.

Prin schimbarea de variabile

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x,y), \\ \eta &= \eta(x,y) \end{aligned}$$

unde $\xi(x,y), \eta(x,y)$ sunt funcţii oarecare cu derivate parţiale de ordinul 2 continue şi cu iacobianul nenul ecuaţia devine

$$A_{11}^*(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2A_{12}^*(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + A_{22}^*(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f^*(\xi,\xi,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0,$$

unde

$$A_{11}^* = A_{11}(x,y)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + A_{22}(x,y)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$$
$$A_{12}^* = A_{11}(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + A_{12}(x,y)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + A_{22}(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$
$$A_{22}^* = A_{11}(x,y)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}(x,y)\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + A_{22}(x,y)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2.$$

Intre discriminanţi are loc relaţia

$$\delta^*(\xi,\eta) = \delta(x,y)\left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right)^2$$

In ipoteza $A_{11}(x,y) \neq 0$ ecuaţia caracteristicilor se scrie

$$y' = \frac{A_{12}(x,y) \pm \sqrt{\delta(x,y)}}{A_{11}(x,y)}$$

Dacă suntem într-un domeniu de hiperbolicitate $\delta(x,y) > 0$ acestea reprezintă două ecuaţii diferenţiale şi dacă coeficienţii sunt continui cele două ecuaţii admit două integrale prime $\xi(x,y) = C, \eta(x,y) = C$ date prin funcţii cu derivate de ordinul doi continue. Ele satisfac ecuaţia caracteristicilor şi ecuaţiile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial x} &= -\frac{A_{12}(x,y) + \sqrt{\delta(x,y)}}{A_{11}(x,y)}\frac{\partial\xi}{\partial y} \\
\frac{\partial\eta}{\partial x} &= -\frac{A_{12}(x,y) - \sqrt{\delta(x,y)}}{A_{11}(x,y)}\frac{\partial\eta}{\partial y}
\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} = -2\frac{\sqrt{\delta(x,y)}}{A_{11}(x,y)}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Cum derivatele parţiale ale ale fiecărei funcţii $\xi(x,y), \eta(x,y)$ nu se pot anula simultan rezultă că iacobianul este nenul şi putem considera schimbarea de variabile $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$. Atunci avem $A_{11}^*(\xi,\eta) = 0, A_{22}^*(\xi,\eta) = 0$ şi $A_{12}^*(\xi,\eta) \neq 0$ pentru că $\delta^*(\xi,\eta) = A_{12}^*(\xi,\eta)^2 \neq 0$. După împarţire cu $A_{12}^*(\xi,\eta)$ ecuaţia devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + f^*(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}) = 0.$$

Dacă facem schimbarea de variabile $\xi' = \xi+\eta, \eta' = \xi-\eta$ ecuaţia capătă forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\eta'^2} + f^{**}(\xi',\eta',u,\frac{\partial u}{\partial\xi'},\frac{\partial u}{\partial\eta'}) = 0.$$

Oricare din aceste forme se numeşte *forma canonică a ecdepo2 cvasilineare în două variabile de tip hiperbolic.*

Dacă ecdpo2 este de tip parabolic $\delta(x,y) = 0$ atunci avem o singură familie de caracteristici

$$y' = \frac{A_{12}(x,y)}{A_{11}(x,y)} = \frac{A_{22}(x,y)}{A_{12}(x,y)}.$$

Când coeficienţii sunt continui avem o integrală primă $\xi(x,y) = C$ dată printr-o funcţie de două ori derivabilă care verifică relaţiile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\frac{A_{12}(x,y)}{A_{11}(x,y)}\frac{\partial \xi}{\partial y} \\
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\frac{A_{22}(x,y)}{A_{12}(x,y)}\frac{\partial \xi}{\partial y}
\end{aligned}$$

Alegând schimbarea de variabile $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$ unde funcţia $\eta(x,y)$ este supusă numai condiţiei $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$, totdeauna posibilă, coeficienţii noi ecuaţii vor fi astfel încât $A^*_{11}(\xi,\eta) = 0$. Rezultă şi $A^*_{12}(\xi,\eta) = 0$ şi $A^*_{22}(\xi,\eta) \neq 0$. După împărţire cu $A^*_{22}(\xi,\eta)$ ecdpo2 devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f^*(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0,$$

formă numită *forma canonică a ecdpo2 cvasilineare în două variabile de tip parabolic.*

In cazul ecdpo2 de tip eliptic $\delta(x,y) < 0$ ecuaţia caracteristicilor se descompune în două ecuaţii complex conjugate

$$y' = \frac{A_{12}(x,y) \pm i\sqrt{-\delta(x,y)}}{A_{11}(x,y)}$$

De aceea vom căuta integralele prime tot sub formă complexă conjugată $\varphi(x,y) = \xi(x,y) \pm i\eta(x,y)$. Inlocuind în relaţia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{A_{12}(x,y) + i\sqrt{-\delta(x,y)}}{A_{11}(x,y)}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

şi separând parţile reală şi imaginară obţinem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\frac{A_{12}}{A_{11}}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\sqrt{-\delta}}{A_{11}}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\
\frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{A_{12}}{A_{11}}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\sqrt{-\delta}}{A_{11}}\frac{\partial \xi}{\partial y}
\end{aligned}$$

Se poate arăta, ca la teorema lui Cauchy-Kovalesckaia, că dacă coeficienţii ecdpo2 sunt funcţii analitice atunci acest sistem are soluţie dată de funcţii analitice, ceea ce îndreptăţeşte ipoteza cu privire la integrala primă $\varphi(x,y)$. Observăm că

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\sqrt{-\delta}}{A_{11}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}^2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}^2\right) = \frac{\sqrt{-\delta}}{A_{11}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2 \neq 0$$

Deci se poate face schimbarea de variabile $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$. Dacă separăm părţile reală şi imaginară în ecuaţia verificată de $\varphi(x,y) = \xi(x,y) + i\eta(x,y)$ obţinem relaţiile $A^*_{11}(\xi,\eta) = A^*_{22}(\xi,\eta) \neq 0, A^*_{12}(\xi,\eta) = 0$. Impărţind cu $A^*_{11}(\xi,\eta)$ ecuaţia devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + f^*(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}) = 0,$$

formă numită *forma canonică a ecdpo2 cvasilineare în două variabile de tip eliptic.*

Exemplul 1. Să reducem la formă canonică ecdpo2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Avem în întreg planul xOy $\delta(x,y) = 1$, adică în întreg planul ecuaţia este de tip hiperbolic.Din ecuaţia caracteristicilor în diferenţiale

$$dy^2 - 2\cos xy' - \sin^2 x = 0$$

avem $y' = \cos x \pm 1$ de unde obţinem cele două familii de caracteristici

$$\begin{aligned} y - \sin x - x &= C, \\ y - \sin x + x &= C. \end{aligned}$$

E uşor de observat că prin fiecare punct al planului trece o câte o curbă din fiecare familie. Făcând schimbarea de variabile

$$\begin{aligned} \xi &= y - \sin x - x, \\ \eta &= y - \sin x + x \end{aligned}$$

vom putea scrie

$$\begin{array}{ll}
0 & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi}(-\cos x - 1) + \frac{\partial u}{\partial\eta}(-\cos x + 1) \\
-\sin x & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta} \\
1 & \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(1+\cos x)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}(-\sin^2 x) + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}(1-\cos x)^2 + \\ +\frac{\partial u}{\partial\xi}\sin x + \frac{\partial u}{\partial\eta}\sin x \end{array} \\
2\cos x & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(-\cos x - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}(-2\cos x) + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}(-\cos x + 1) \\
-\sin^2 x & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}
\end{array}$$

Introducând în ecuaţie (de asta am scris în stânga coeficienţii cu care intră în ecuaţie fiecare derivată) vom avea forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

De aici găsim soluţia generală a ecdpo2 $u(\xi,\eta) = \alpha(\xi) + \beta(\eta)$, cu α, β funcţii arbitrare de două ori derivabile. Revenind la vechile variabile avem

$$u(x, y) = \alpha(y - \sin x - x) + \beta(y - \sin x + x).$$

Să presupunem că pentru ecdpo2 dată trebuie să rezolvăm problema lui Cauchy: să se determine acea soluţie a ecdpo2 pentru care cunoaştem

$$\begin{aligned} u(x,y)\big|_{y=\sin x} &= \varphi_0(x) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\sin x} &= \varphi_1(x) \end{aligned}$$

unde $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ sunt funcţii date. Aceasta este o problemă a lui Cauchy pentru că din cunoşterea funcţiei u şi a derivatei sale $\frac{\partial u}{\partial y}$ de-alungul curbei $y = \sin x$ rezultă şi cunoaşterea derivatei normale de-alungul curbei. Curba $y = \sin x$ nefiind curbă caracteristică, această problemă are soluţie unică. In adevăr din prima condiţie folosind soluţia generală obţinem

$$\alpha(-x) + \beta(x) = \varphi_0(x).$$

Din a doua condiţie avem

$$\alpha'(-x) + \beta'(x) = \varphi_1(x)$$

pe care integrând-o devine

$$-\alpha(-x) + \beta(x) = \int_0^x \varphi_1(t)dt + C.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \alpha(-x) &= \frac{1}{2}\left(\varphi_0(x) - \int_0^x \varphi_1(t)dt + C\right), \alpha(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi_0(-x) + \int_{-x}^0 \varphi_1(t)dt + C\right), \\ \beta(x) &= \frac{1}{2}\left(\varphi_0(x) + \int_0^x \varphi_1(t)dt - C\right) \end{aligned}$$

şi deci găsim singura soluţie

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\varphi_0(-y+\sin x + x) + \varphi_0(y - \sin x + x)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{-y+\sin x+x}^{y-\sin x+x} \varphi_1(t)dt.$$

Exemplul 2. Să reducem la formă canonică ecdpo2

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Discriminantul este $\delta(x,y) = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$, deci ecuaţia este de tip parabolic în întreg planul xoy. Ecuaţia caracteristicilor

$$x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 = 0$$

se mai scrie

$$xdy - ydx = 0$$

adică avem singura familie de curbe caracteristice

$$\frac{y}{x} = C$$

definite în semiplanele $x > 0$ sau $x < 0$. Facem schimbarea de variabile

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{y}{x}, \\ \eta &= x. \end{aligned}$$

Prin fiecare punct al fiecăruia din semiplanele de mai sus trece câte o dreaptă din fiecare familie $\xi =$constant, $\eta =$ constant. Vom avea

$$\begin{array}{l|l}
0 & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
0 & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{x} \\
x^2 & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{y^2}{x^4} - 2\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{2y}{x^3} \\
2xy & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-\frac{y}{x^3}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{1}{x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
y^2 & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{x^2}
\end{array}$$

Introducând în ecuaţie obţinem forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Putem obţine soluţia generală

$$u(\xi, \eta) = \alpha(\xi) + \eta\beta(\xi)$$

sau în vechile variabile

$$u(x, y) = \alpha\left(\frac{y}{x}\right) + x\beta\left(\frac{y}{x}\right),$$

α, β fiind funcţii arbitrare de două ori derivabile.

Dacă notăm cu $\theta(x, y), r(x, y)$ coordonatele polare ale punctului (x, y), observăm că $\theta(x, y) =$ constant sunt caracteristici ale ecuaţiei de mai sus. Dacă facem schimbarea de variabile

$$\begin{aligned}\theta &= \theta(x, y),\\ r &= r(x, y)\end{aligned}$$

vom obţine forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$$

din care obţinem soluţia generală

$$u(x, y) = \alpha(\theta(x, y)) + r(x, y)\beta(\theta(x, y))$$

tot cu α, β funcţii arbitrare.

Exemplul 3. Fie ecdpo2

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Discriminantul $\delta(x, y) = -x^2y^2$ este strict negativ în fiecare cadran al planului, deci aici ecuaţia este de tip eliptic. Ecuaţia caracteristicilor

$$x^2y'^2 + y^2 = 0$$

se poate scrie

$$xdy = iydx$$

cu integrala primă complexă

$$\ln|y| - i\ln|x| = C.$$

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{aligned}\xi &= \ln|y|,\\ \eta &= \ln|x|.\end{aligned}$$

Avem

$$
\begin{array}{ll}
0 & \mid \ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{x} \\
0 & \mid \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{y} \\
x^2 & \mid \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
y^2 & \mid \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{y^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{1}{y^2}\right)
\end{array}
$$

Inlocuind în ecuaţie obţinem forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

13.11 Exerciţii

1. Să se reducă la forma canonică urmatoarele ecuaţii şi să se găsească soluţia lor generală:

a. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$

R. $u_{\xi\eta} - \frac{1}{2}u\eta = 0$, $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$; $u = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\psi(\frac{y}{x})$.

b. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$

R. $u_{\eta\eta} = 0$, $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = y$; $u = \varphi(\frac{y}{x}) + y\psi(\frac{y}{x})$.

c. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$

R. $u_{\xi\eta} = 0$, $\xi = x + y - \cos x, \eta = x - y + \cos x$;

$u = \varphi(x + y - \cos x) + \psi(x - y + \cos x)$.

2. Să se găsească soluţia ecuaţiei

$$(a - x)u_{xx} - \frac{1}{2}u_x - u_{yy} = 0, 0 < x < a,$$

cu condiţiile $u(x, 0) = f(x), u_y(x, 0) = g(x)$.

R. $u = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int \alpha\beta\frac{g(z)}{\sqrt{a-z}}dz$, unde $\alpha = x - \sqrt{a - x} - \frac{1}{4}y^2$,

$\beta = x + \sqrt{a - x} - \frac{1}{4}y^2$.

3. Să se arate că soluţia $u(x, t)$ a ecuaţiei $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ cu condiţiile $u(vt, t) = 0$, $u_x(vt, t) = f(t)$ este

$$u(x, t) = \frac{a(1 - \beta^2)}{2}\int_{\frac{t-\frac{x}{a}}{1-\beta}}^{\frac{t+\frac{x}{a}}{1+\beta}} f(z)dz, \ unde\, \beta = \frac{v}{a}.$$

4. Să se reducă la forma canonică ecuaţiile:

a. $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$

R. $u_{\xi\eta} + \frac{\eta-\xi}{32}(u\xi - u\eta) = 0$, $\xi = 2x + \sin x + y, \eta = 2x - \sin x - y.$

b. $u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2u_{yy} - 2u_y = 0.$

R. $u_{\eta\eta} - u\xi = 0$, $\xi = \frac{x^2}{2} + y$, $\eta = x.$

c. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$

R. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$, $\xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $y = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$

CAPITOLUL 14

FUNCŢII ARMONICE

14.1 Scurt istoric

Vom încerca în acest paragraf să prezentăm pe scurt cum au apărut funcţiile armonice în istoria ştiinţei. Facem acest lucru pentru că ideile lui Laplace s-au dovedit deosebit de folositoare, ele punând bazele apariţiei ecuaţiilor lui Maxwell ale câmpului electromagnetic şi mai târziu ale ecuaţiilor câmpurilor legate de particulele elementare.

Cred că nu greşim dacă afirmăm că marea aventură a ştiinţei a început odată cu formularea de către Kepler între anii 1609 şi 1618, pe baza observaţiilor lui Ticho Brache, a legilor care îi poartă numele:

- planetele asimilate cu puncte materiale descriu în jurul soarelui traiectorii plane şi anume elipse, soarele fiind plasat în focarul elipsei;
- mişcarea se face după legea ariilor, adică raza vectoare a planetei în raport cu soarele mătură arii egale în intervale de timp egale;
- raportul dintre cubul axei mari a elipsei şi pătratul timpului de revoluţie este acelaşi pentru toate planetele.

Din aceste legi frumoase, dar complicate, Newton a dedus o lege mult mai simplă, dar şi surprinzătoare, legea numită *a atracţiei universale*: între orice două corpuri acţionează forţe de atracţie direct proporţionale cu masele lor şi invers proporţionale cu pătratul distanţei dintre ele. Cunoscând azi legile lui Newton ale mecanicii putem stabili uşor legea atracţiei universale plecând de la legile lui Kepler. Să presupunem că planeta descrie o elipsă cu semiaxa mare a, cu distanţa de la focar la centru c şi axa mică $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Raportând planul elipsei la un sistem de coordonate rectangular cu originea în focarul F şi cu axa Fx după dreapta care uneşte centrul elipsei cu focarul, coordonatele planetei $M(x, y)$, funcţii de timp, vor verifica ecuaţia

$$(*) \quad r + \frac{c}{a}x = \frac{b^2}{a}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(Am scris că elipsa este locul punctelor pentru care raportul dintre distanţa la focar si distanţa la directoarea focarului, dreapta perpendiculară pe axa focarelor de ecuaţie $x = \frac{b^2}{c}$, este constant egal cu excentricitatea $e = \frac{c}{a}$).

In timpul dt raza vectoare $\overrightarrow{FM}$ mătură aria

$$dA = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x + dx & y + dy & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

şi deci după a doua lege a lui Kepler vom avea

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2}C.$$

(Prin $\dot{x}$ am notat derivata lui x în raport cu t, etc).

Cum aria totală a elopsei este $A = \int_0^T \frac{dA}{dt}dt = \frac{1}{2}CT = \pi ab$ rezultă $C = \frac{2\pi ab}{T}$ şi deci pe traiectorie vom avea relaţia

$$(**) \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Dacă notăm cu $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ forţa care acţionează asupra planetei, vom avea după a două lege a mecanicii a lui Newton

$$\ddot{x} = \frac{X}{m}, \ddot{y} = \frac{Y}{m},$$

m fiind masa planetei. Derivând în raport cu timpul relaţia $(**)$ avem $x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$ şi deci avem $X = x\Phi, Y = y\Phi$, adică forţa este centrală (trece prin origine). Derivând de două ori relaţia $(*)$ obţinem

$$\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}\frac{1}{r^3} + \frac{\Phi}{m}\left(r + \frac{c}{a}x\right) = 0$$

sau

$$\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}\frac{1}{r^3}+\frac{\Phi}{m}\frac{b^2}{a}=0$$

de unde $\Phi=-4\pi^2\frac{a^3}{T^2}m\frac{1}{r^3}$. Ţinând cont şi de legea a treia a lui Kepler rezultă că forţa cu care acţionează soarele de masă M asupra planetei de masă m are mărimea $F=Km\frac{1}{r^2}$, K fiind o constantă care depinde numai de soare. După legea acţiunii-reacţiunii a lui Newton, planeta acţionează asupra soarelui cu o forţă egală în mărime, dar şi egală cu $kM\frac{1}{r^2}$, k depinzând numai de planetă, şi deci $Km=kM$. Rezultă $\frac{K}{M}=\frac{k}{m}$. Cum planeta poate fi oricare, rezultă că raportul $f=\frac{K}{M}$ este o constantă universală şi deci mărimea forţei cu care un corp de masă M acţionează asupra unui corp de masă m situat la distanţa r este

$$F=fMm\frac{1}{r^2}$$

adică legea lui Newton a atracţiei universale.

In legea lui Newton a atracţiei universale este surprinzătoare acţiunea instantanee la distanţă între cele două corpuri. Acest lucru l-a surprins şi pe Laplace. Pentru a explica acest lucru, Laplace ajunge la concluzia că prezenţa în punctul (x_0,y_0,z_0) a oricărui corp de masă M implică apariţia în întreg spaţiu a ceva substanţial, material, ceva pe care astăzi îl numim *câmp* şi căruia îi asociem ca şi Laplace un potenţial, adică o funcţie

$$u(x,y,z)=fM\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

al cărui gradient este forţa de atracţie cu care corpul acţionează asupra unui corp de masă unitate plasat în (x,y,z) . Ideea genială a lui Laplace a fost aceea de a considera nu numai potenţialul u şi gradientul său ci şi ecuaţia cu derivate parţiale pe care o verifică potenţialul.

Ori dacă notăm $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ se vede imediat că

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_0}{r}$$

şi deci

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-fM\frac{x-x_0}{r}.$$

Mai derivând odată

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-fM\left[-\frac{1}{r^3}+3\frac{(x-x_0)^2}{r^5}\right].$$

Adunând formulele analoage ultimei găsim

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

adică ceea ce astăzi numim *ecuaţia lui Laplace*.

Ideea lui Laplace de a înlocui formula explicită care dă acţiunea la mare distanţă prin câmp şi prin ecuaţia cu derivate parţiale verificată de potenţialul câmpului, adică prin acţiunea la mică distanţă dintre domeniile vecine ale câmpului, a fost deosebit de fructuoasă.

14.2 Funcţii armonice, definiţii

Vom începe prin a generaliza definiţia dată funcţiilor armonice în capitolul de teoria funcţiilor de variabilă complexă.

Definiţia 1. Fie D un domeniu în spaţiul n-dimensional R^n. O funcţie reală $u(M) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ definită în punctele $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ ale domeniului D se numeşte *armonică în acest domeniu* dacă ea este continuă în D, admite derivate parţiale continue în D până la ordinul doi inclusiv şi satisface în D ecuaţia cu derivate parţiale a lui Laplace

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Definiţia 2. Fie $\bar{D}$ închiderea unui domeniu D în spaţiul n-dimensional R^n . O funcţie reală $u(M) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ definită în punctele $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ ale lui $\bar{D}$ se numeşte *armonică în* $\bar{D}$ dacă ea este continuă în $\bar{D}$ şi este armonică în D.

Definiţia 3. O funcţie reală $u(M) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ definită în punctele unui domeniu D se numeşte armonică în punctul $M_0 \in D$ dacă ea este armonică într-o vecinătate a lui M_0 (deci şi într-o sfer ă cu centrul în M_0).

14.3 Funcţii armonice de o variabilă .

Dacă $n = 1$, domeniul D este un interval (a, b) şi deci o funcţie armonică în D este o funcţie reală $u(x)$ definită în punctele $M(x)$ ale intervalului, continuă în acest interval, cu derivata de ordinul doi continuă şi nulă $u''(x) = 0$ în acest interval. Funcţia $u(x)$ poate fi interpretată ca temperatura staţionară, independentă de timp, în secţiunea de abscisă x a unei bare dispuse după intervalul $[a, b]$, în bară neexistând surse de căldură. O asemenea funcţie este o funcţie lineară $u(x) = \alpha x + \beta$. Vom observa acum că aceste funcţii lineare - funcţiile armonice de o variabilă - au o serie de proprietăţi caracteristice.

Dacă $u(x)$ este o funcţie lineară pe un interval, atunci valoarea sa în mijlocul oricărui subinterval $[c, d]$ este media valorilor funcţiei pe acest interval şi totodată media aritmetică a valorilor funcţiei în capetele intervalului:

$$u\left(\frac{c+d}{2}\right) = \frac{1}{d-c}\int_c^d u(x)dx = \frac{u(c)+u(d)}{2}.$$

Dacă se ia ca direcţie a normalei exterioare $\vec{n}$ la frontiera segmentului $[c, d]$ pe axa Ox în d direcţia acestui segment şi în c - direcţia opusă, atunci suma valorilor derivatelor după direcţia lui $\vec{n}$ în capetele segmentului $[c, d]$ ($u\prime(d) - u\prime(c) = 0$) ale oricărei funcţii lineare este nulă.

Vom observa că aceste proprietăţi sunt caracteristice funcţiilor lineare de o variabilă: orice funcţie continuă pe un interval cu una din aceste proprietăţi este funcţie lineara.

Să mai observăm că dacă o funcţie este lineară pe intervalul $[a, b]$, atunci ea nu-şi poate atinge valoarea minimă sau maximă in interiorul intervalului, exceptând cazul când este constantă în acest interval.

Dacă o funcţie este lineară pe $[a, b]$ atunci valorile sale pe acest interval sunt perfect determinate de valorile în capetele intervalului (frontiera intervalului):

$$u(x) = u(a)\frac{b-x}{b-a} + u(b)\frac{x-a}{b-a}.$$

Relaţia de mai sus poate fi interpretată ca dând temperatura staţionară în bară când se cunosc valorile sale la capete, în bară neexistând surse de căldură. Dacă am considera că în bară există şi surse de intensitate dată $f(x)$ am avea de determinat funcţia $u(x)$ soluţie a ecuaţiei $u''(x) = f(x)$ care în capete are valorile $u(a), u(b)$. După formula lui Taylor cu rest integral avem

$$u(x) = u(a) + u'(a)(x-a) + \int_a^x (x-y)u''(y)dy.$$

Punând $x = b$ determinăm necunoscuta $u'(a)$ şi după înlocuire obţinem

$$\begin{aligned} u(x) &= u(a)\frac{b-x}{b-a} + u(b)\frac{x-a}{b-a} + \int_a^x \frac{(b-x)(a-y)}{b-a} f(y)dy + \\ &+ \int_x^a \frac{(a-x)(b-y)}{b-a} f(y)dy, \end{aligned}$$

sau notând

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{(b-x)(a-y)}{b-a}, \ pentru \quad y \le x, \\ \frac{(a-x)(b-t)}{b-a}, \ pentru \quad y \ge x, \end{cases}$$

vom avea

$$u(x) = u(a)\frac{b-x}{b-a} + u(b)\frac{x-a}{b-a} + \int_a^b G(x,y)f(y)dy.$$

Pentru a vedea semnificaţia formulei stabilite să procedăm altfel. Anume, plecând de la relaţiile evidente

$$\int_\alpha^\beta u''(y)v(y)dy + \int_\alpha^\beta u'(y)v'(y)dy = u(y)v'(y)\,\Big|_\alpha^\beta$$

$$\int_\alpha^\beta v''(y)u(y)dy + \int_\alpha^\beta u'(y)v'(y)dy = v(y)u'(y)\,\Big|_\alpha^\beta\,,$$

prin scădere obţinem relaţia de reciprocitate

$$\int_\alpha^\beta \left(u''(y)v(y) - v''(y)u(y)\right)dy = \left(u(y)v'(y) - v(y)u'(y)\right)\Bigg|_\alpha^\beta \ .$$

Aplicând această relaţie funcţiilor $u(y), v(x,y)$ pe intervalele $[a, x-\varepsilon],\ [x+\varepsilon, b]$ şi făcând $\varepsilon \to 0$ se vede că dacă şi numai dacă funcţia $v(x,y)$ satisface condiţiile

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0, y \in (a,x) \cup (x,b),\ \forall x \in (a,b),$$

$$v(x,a) = 0,\ v(x,b) = 0,$$

$$v(x, x-0) = v(x, x+0),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, x+0) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, x-0) = 1,$$

atunci

$$u(x) = -u(a)\frac{\partial v}{\partial y}(x,a) + u(b)\frac{\partial v}{\partial y}(x,b) + \int_a^b v(x,y)f(y)dy.$$

Dar se vede uşor că singura funcţie $v(x,y)$ care satisface condiţiile de mai sus este funcţia $G(x,y)$ definită mai sus şi că cele două relaţii care dau pe $u(x)$ coincid. Condiţiile verificate de $G(x,y)$ arată că aceasta ca funcţie de y este temperatura în secţiunea y datorată unei surse unitare plasate în x, capetele fiind menţinute la temperatură nulă. Distribuţia generată de $G(x,y)$ verifică evident ecuaţia

$$\Delta_y G(x,y) = \delta(y-x),$$

care atestă încă odată cele spuse mai sus. Funcţia $G(x,y)$ se numeşte *funcţia de sursă* sau *funcţia Green* pentru cazul unidimensional.

Vom arăta că proprietăţi asemănătoare celor de mai sus sunt caracteristice funcţiilor armonice de oricâte variabile.

14.4 Funcţii armonice de două variabile

Dacă $n=2$, o funcţie armonică în domeniul D este o funcţie reală $u(x,y)$ definită în punctele $M(x,y)$ ale domeniului D, continuă în D, cu derivate parţiale până la ordinul doi inclusiv continue în D şi satisfăcând în D ecuaţia lui Laplace în două variabile

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Am văzut că există o foarte strânsă legătură între funcţiile armonice în domeniul D şi funcţiile olomorfe sau mai general funcţiile analitice în domeniul D: dacă $u(x,y)$ este o funcţie armonică în domeniul simplu conex D atunci există o funcţie $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ olomorfă în D, determinată abstracţie făcând de o constantă aditivă imaginară şi a cărei parte reală este funcţia armonică $u(x,y)$; dacă $u(x,y)$ este o funcţie armonică în domeniul multiplu conex D atunci există o funcţie $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitică în D, în general multiformă, a cărei parte reală este funcţia armonică $u(x,y)$. Pe baza acestui fapt putem demonstra uşor că funcţiile armonice de două variabile au proprietăţi de genul celor de la funcţiile lineare de o variabilă.

Fie $u(x,y)$ o funcţie armonică într-un domeniu D şi fie $z_0 = x_0 + iy_0$ un punct din D. Dacă cercul $|z - z_0| \le r$ este complet conţinut în D, atunci există conjugata armonică $v(x,y)$ astfel încât funcţia $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ este olomorfă în acest cerc. Conform formulei lui Cauchy avem

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0=r|} \frac{w(z)}{z-z_0} dz,$$

sau notând

$$z - z_0 = re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, ds = rd\varphi,$$

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} w\left(z_0 + re^{i\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z-z_0|=r} w(z) ds.$$

Luând partea reală obţinem

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z-z_0|=r} u(x,y) ds,$$

adică am demonstrat prima proprietate întâlnită la funcţiile lineare:

T1. (*Teorema de medie a lui Gauss*) Dacă o funcţie $u(x,y)$ este armonică într-un domeniu D, atunci ea are proprietatea de medie, adică valoarea sa în orice punct este media valorilor sale pe orice cerc cu centrul în acest punct şi complet conţinut în D.

Fie acum $u(x,y)$ o funcţie armonică într-un domeniu şi un subdomeniu mărginit simplu conex D cu frontieră ∂D netedă pe porţiuni. Atunci există o funcţie $v(x,y)$ - conjugata armonică a funcţiei $u(x,y)$ în D. Funcţia $v(x,y)$ este uniformă şi funcţia $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ este olomorfă în D . In virtutea relaţiilor lui Cauchy-Riemann vom putea scrie

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int\limits_{\partial D} \frac{\partial v}{\partial s} ds = -\operatorname*{var}_{\partial D} v(x,y) = 0.$$

Dacă acum D este un domeniu mărginit multiplu conex cu frontieră ∂D netedă pe porţiuni, aplicând rezultatul de mai sus domeniului simplu conex $\tilde{D}$, obţinut din D prin practicarea de tăieturi, şi ţinând cont că sensurile pe cele două borduri ale tăieturilor sunt opuse, rezultă următoarea proprietate asemănătoare celei de a două proprietăţi a funcţiilor lineare:

T2. Dacă $u(x,y)$ este o funcţie armonică într-un domeniu, atunci oricare ar fi subdomeniul marginit D cu frontieră ∂D netedă pe porţiuni, integrala pe frontiera ∂D a derivatei normale a lui $u(x,y)$ este nulă: $\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$.

Componentele frontierei ∂D sunt aici parcurse în aşa fel încât domeniul D să rămână la stânga.

Din teorema de medie a lui Gauss rezultă o altă proprietate importantă a funcţiilor armonice:

T3. *(Principiul de maxim şi minim pentru funcţii armonice) Dac*ă funcţia $u(x, y)$ este armonică în domeniul D ea nu-şi poate atinge nicăieri în interiorul domeniului cea mai mică şi cea mai mare valoare cu excepţia cazului când este constantă.

Presupunem prin absurd că există un punct M_0 interior domeniului D astfel încât oricare ar fi $M \in D$ să avem $u(M) \leq u(M_0)$. Există un cerc cu centrul în M_0 de raza ε. Arătăm ca în toate punctele acestui cerc valoarea funcţiei coincide cu $u(M_0)$. Dacă ar exista pe cerc un punct M^* astfel că $u(M^*) < u(M_0)$ atunci ar exista o întreagă vecinătate a sa în care să aibă loc inegalitatea strictă; atunci pe cerc există două mulţimi de puncte: una s_1 în care are loc inegalitatea strictă, alta s_2 în care are loc inegalitatea nestrictă. După proprietatea de medie

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int\limits_{s_1+s_2} u(m) ds_M < \frac{1}{2\pi\varepsilon}(u(M_0)l(s_1) + u(M_0)l(s_2)) = u(M_0).$$

Am ajuns la o contradicţie. Deci pe tot cercul funcţia are valoarea $u(M_0)$. Rezultă că de fapt în interiorul cercului funcţia are aceeaşi valoare. Dacă M este un alt punct al domeniului D, îl unim pe M_0 cu M printr-o curbă C conţinută în domeniu. Fie ε un număr mai mic decât distanţa dela C la ∂D. In interiorul cercului cu centrul în M_0 de rază ε funcţia are valoare constantă $u(M_0)$. Dacă punctul M se află în acest cerc atunci $U(M) = u(M_0)$. Dacă nu, luăm un cerc cu centrul într-un punct M_1 din primul cerc de rază ε. In acest cerc funcţia ia valoarea $u(M_0)$. Dacă M se află in acest al doilea cerc, $u(M) = u(M_0)$, dacă nu, continuăm raţionamentul. Cum curba C are o lungime finită, ea este acoperită cu un număr finit de cercuri de rază ε şi la sfârşit ajungem la concluzia că $u(M) = u(M_0)$. Deci în tot domeniul funcţia este o constantă.

Din principiul de maxim şi minim rezultă

T4. (*Teorema maximului şi minimului funcţiilor armonice*). Dacă funcţia $u(x, y)$ este armonică în domeniul mărginit D, continuă până la frontieră şi neconstantă în D, atunci maximul şi minimul său se ating numai pe frontieră.

De aici rezultă că dacă funcţia $u(x, y)$ este armonică în domeniul mărginit D, continuă până la frontieră şi dacă m, M sunt marginea inferioară, respectiv superioară a lui u pe frontiera ∂D , atunci peste tot în domeniul D au loc inegalităţile $m \leq u(x, y) \leq M$, pentru că în caz contrar, maximul şi minimul lui u s-ar atinge în interiorul lui D. In particular, dacă $m = M = 0$ atunci $u(x, y) = 0$ în D. Deci

T5. Două funcţii armonice în domeniul mărginit D, continue până la frontieră coincid în D dacă au aceleaşi valori pe frontiera lui D.

In cazul unui domeniu nemărginit inegalitatea $m \leq u(x, y) \leq M$ nu are totdeauna loc. De exemplu funcţia $u(x, y) = x$ armonică în semiplanul $x \geq 0$ fiind nemărginită în acest semiplan ia valori nule pe frontieră. Are totuşi loc următoarea teoremă:

T6. Dacă funcţia $u(x, y)$ este armonică în domeniul nemărginit D şi este continuă şi mărginită în închiderea domeniului $\overline{D}$ atunci are loc relaţia

$$m = \inf_{(x,y)\in\partial D} u(x, y) \leq u(x, y) \leq \sup_{(x,y)\in\partial D} u(x, y) = M.$$

Pentru demonstraţie fie $P_0 \in D$ şi $P^* \notin \overline{D}$. Fie $D_{\varepsilon R}$ domeniul mărginit de cercurile cu centrul în P^* de raze $\varepsilon < dist(M^*, \partial D)$ respectiv $R > dist(P^*, P_0)$. Pentru punctele P de pe frontiera intersecţiei $D \cap D_{\varepsilon R}$ are loc relaţia

$$u(P) - M \leq 2 \sup_{P\in\overline{D}} u(P) \frac{\ln \frac{r_{P^*P}}{\varepsilon}}{\ln \frac{R}{\varepsilon}} = v(P).$$

Am notat prin r_{P^*P} distanţa de la P^* la P. Cum $v(P)$ este o funcţie armonică din principiul de maxim rezultă

$$u(P_0) - M \leq 2 \sup_{P\in\overline{D}} u(P) \frac{\ln \frac{r_{P^*P_0}}{\varepsilon}}{\ln \frac{R}{\varepsilon}} = v(P_0),$$

inegalitate valabilă oricare ar fi $R > dist(P^*, P_0)$. Făcând $R \to \infty$ rezultă $u(P_0) \leq M$. Considerând funcţia $-u(P)$ avem $u(P_0) \geq m$, cctd.

Avem evident teorema

T7. Două funcţii armonice în domeniul nemărginit D, continue şi mărginite în închiderea domeniului, coincid în D dacă au aceleaşi valori pe frontiera lui D.

14.5 Problema lui Dirichlet

Problema determinării unei funcţii armonice într-un domeniu D când se cunosc valorile sale pe frontieră se numeşte *problema lui Dirichlet pentru funcţii armonice.*

Teoremele precedente se pot enunţa şi sub forma

T8. Soluţia problemei lui Dirichlet pentru domenii mărginite şi date continue pe frontieră este unică.

T9. Soluţia mărginită a problemei lui Dirichlet pentru domenii nemărginite şi date continue pe frontieră este unică.

Dacă nu se impune condiţia de mărginire în cazul domeniilor nemărginite soluţia poate să nu fie unică. De exemplu funcţia $u(x,y) = y$ este armonică în semiplanul $y > 0$, este continuă până la frontieră şi este nulă pe frontieră; în acelaşi timp funcţia nulă peste tot satisface aceleaşi condiţii. La fel în cazul domeniilor mărginite dacă nu se impune condiţia de mărginire chiar în cazul unui singur punct de discontinuitate soluţia poate să nu fie unică; de exemplu, funcţia $u(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} = \Re e\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ este armonică în cercul unitate, continuă până la frontieră cu excepţia punctului $(1,0)$, este nulă în toate punctele cercului cu excepţia punctului $(1,0)$; funcţia peste tot nulă este armonică în cercul unitate şi e nulă pe frontieră.

14.6 Analiticitatea funcţiilor armonice de două variabile

Dat fiind că o funcţie armonică într-un domeniu plan este în vecinătatea oricărui punct din domeniu partea reală a unei funcţii olomorfe în acel punct, rezultă o proprietate a funcţiilor armonice care nu se putea pune în evidenţă în cazul funcţiilor lineare din cauza banalităţii sale: analiticitatea sa. Anume, are loc următoarea teoremă:

T10. Dacă o funcţie $u(x,y)$ este armonică într-un domeniu, atunci în vecinătatea oricărui punct (x_0,y_0) din domeniu ea se scrie ca o serie absolut şi uniform convergentă de puteri ale diferenţelor $x-x_0, y-y_0$:

$$u(x,y) = \sum_{m=0,n=0}^{\infty} c_{m,n}\,(x-x_0)^m\,(y-y_0)^n$$

14.7 Invarianţa funcţiilor armonice prin reprezentare conformă

Vom arăta acum că prin reprezentare conformă o funcţie armonică se transformă tot într-o funcţie armonică; mai precis:

T11. Fie $u(x,y)$ o funcţie armonică în domeniul D_z din planul complex $z = x + iy$ şi fie funcţia $z = z(\varsigma) = x(\xi,\eta) + iy(\xi,\eta)$ olomorfă în domeniul $D\varsigma$ din planul complex $\varsigma = \xi + i\eta$ şi care reprezintă conform domeniul $D\varsigma$ pe domeniul D_z. Atunci funcţia compusă $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ este armonică în domeniul $D\varsigma$.

Intr-adevăr, oricare ar fi subdomeniul simplu conex $\tilde{D}_\varsigma$ al lui D_ς el este transformat prin funcţia $z = z(\varsigma)$ în subdomeniul simplu conex $\tilde{D}_z$ al lui D_z . Dacă $w(z)$ este funcţia olomorfă în D_z a cărei parte reală este $u(x,y)$, atunci funcţia compusă $w(z(\varsigma))$ este olomorfă în $\tilde{D}_\varsigma$ şi deci partea sa reală $\tilde{u}(\xi,\eta)$ este armonică în $\tilde{D}_\varsigma$. Cum subdomeniul $\tilde{D}_\varsigma$ este arbitrar rezultă că $\tilde{u}(\xi,\eta)$ este armonică în domeniul D_ς.

Această proprietate de invarianţă a funcţiilor armonice prin reprezentarea conformă permite să rezolvăm problemele pentru funcţii armonice într-un domeniu dacă ştim să rezolvăm aceleaşi probleme pentru funcţii armonice într-un domeniu "*canonic*", cercul unitate sau semiplanul superior sau un alt domeniu simplu, şi dacă ştim funcţia de reprezentare conformă a domeniului dat pe domeniul canonic.

Exemplul 1. Să considerăm următoarea problemă a lui Dirichlet: să se determine funcţia $u(x,y) = u(z)$ armonică în domeniul $D = \{z|\ \Im m(z) \leq 0\} \cap \{z|\ |z + il| \geq r\}$ ştiind că $u(z)\big|_{\Im m(z)=0} = 0$, $u(z)\big|_{||z+il|=r} = T$ =constant . Aceasta este problema staţionară plană a disipării căldurii în sol - semiplanul $\Im m(z) < 0$ - dintr-un canal termic circular - $|z + il| \leq r$ - când se presupune că temperatura la suprafaţă solului este nulă, - este luată ca temperatură de referinţă-, şi temperatura la suprafaţa canalului este T; $u(z)$ este temperatura în punctul z din sol.

Funcţia

$$\varsigma = \varsigma(z) = \frac{z + i\alpha}{z - i\alpha}$$

cu $\alpha = \sqrt{l^2 - r^2}$ reprezintă conform domeniul D pe coroana circulară

$$r_1 = \frac{r - l - \alpha}{r + l + \alpha} \leq |\varsigma| \leq 1,$$

axa reală $\Im m(z) = 0$ trecând în cercul $|\varsigma| = 1$, cercul $|z + il| = r$ trecând în cercul $|\varsigma| = r_1$. (Punctele $z = \pm i\alpha$ sunt simetrice atât faţă de dreapta $\Im m(z) = 0$ cât şi faţă de cercul $|z + il| = r$). Problema noastră revine la determinarea funcţiei armonice în coroană $\tilde{u}(\varsigma) = u(z(\varsigma))$, $z = z(\varsigma)$ fiind inversa funcţiei $\varsigma = \varsigma(z)$, ştiind că $\tilde{u}(\varsigma)\big|_{|\varsigma|=1} = 0$ şi că $\tilde{u}(\varsigma)\big|_{|\varsigma|=r_1} = T$. Dacă trecem la coordonatele polare $\varsigma = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$, $\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$, ecuaţia lui Laplace se scrie $\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\theta^2} = 0$. Din cauza simetriei, funcţia căutată nu va depinde de θ, şi deci ca funcţie numai de ρ, va verifica ecuaţia $\tilde{u}''(\rho) + \frac{1}{\rho}\tilde{u}'(\rho) = 0$. Soluţia generală a acestei ecuaţii este $\tilde{u}(\rho) = A + B\ln\rho$. Cum $\tilde{u}(1) = 0, \tilde{u}(r_1) = T$ rezultă $\tilde{u}(\varsigma) = \frac{T}{\ln r_1}\ln\rho = \frac{T}{\ln r_1}\ln|\varsigma|$. Revenind la vechile variabile găsim

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u(\varsigma) = \frac{T}{\ln r_1}\ln(|\varsigma(z)|) = \\ &= \frac{T}{\ln r_1}\ln\frac{\sqrt{(x^2+y^2-\alpha^2)^2 + 4\alpha^2x^2}}{x^2+(y-\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Din această expresie se poate calcula cantitatea de căldură care se disipă în sol din canal.

Intre problema lui Dirichlet pentru un domeniu simplu conex D şi problema reprezentării conforme a acestui domeniu pe cercul unitate există o strânsă legătură. Dacă $w = w(z)$ este funcţia care reprezintă conform domeniul D pe cercul unitate $|w| < 1$ astfel încât punctul $z_0 \in D$ să corespundă centrului cercului $w = 0$, atunci $w(z) = (z - z_0)\,\tilde{w}\,(z)$, unde $\tilde{w}(z)$ este o funcţie olomorfă şi nenulă în D. Deci $w(z) = (z - z_0)\,e^{w^*(z)}$, $w^*(z)$ fiind olomorfă în D. Pe frontiera lui D avem $\Re e\,(w^*(z)) = -\ln(|z - z_0|)$, adică determinarea funcţiei de reprezentare conformă revine la rezolvarea unei probleme a lui Dirichlet.

14.8 Soluţia problemei lui Dirichlet pentru cercul unitate

Ne propunem acum să rezolvăm problema lui Dirichlet pentru cercul unitate, adică să determinăm o funcţie armonică $u(x, y) = u(z)$ în cercul unitate $|z| \leq 1$, ştiind valorile sale pe frontieră $u\left(e^{i\varphi}\right)$. Din teorema de medie, cunoaştem valoarea funcţiei în centrul cercului: $u(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi$.

Pentru a găsi valoarea funcţiei u într-un punct oarecare $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, $0 \leq r_0 < 1$ din interiorul cercului unitate, vom reprezenta conform cercul $|z| < 1$ pe cercul $|\varsigma| < 1$ astfel încât punctul $z = z_0$ să treacă în punctul $\varsigma = 0$. Punctul $z = \frac{1}{\bar{z}_0}$, simetricul lui $z = z_0$ faţă de cercul $|z| = 1$, se va duce în punctul $\varsigma = \infty$, simetricul lui $\varsigma = 0$ faţă de cercul $|\varsigma| = 1$. Vom avea deci funcţia de reprezentare conformă

$$\varsigma = \varsigma(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}.$$

Inversa acesteia este

$$z = z(\varsigma) = \frac{\varsigma + z_0}{1 + \varsigma\bar{z}_0}.$$

Funcţia $u(z)$ armonică în $|z| \leq 1$ devine funcţia $\tilde{u}(\varsigma) = u(z(\varsigma))$ armonică în $|\varsigma| \leq 1$. Aplicând teorema de medie acesteia, vom avea

$$u\left(z_0\right) = \tilde{u}\left(0\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \tilde{u}\left(e^{i\psi}\right) d\psi.$$

Dar legătura între $\varsigma = e^{i\psi}$ şi $z = e^{i\varphi}$ este

$$e^{i\psi} = \frac{e^{i\varphi} - z_0}{1 - e^{i\varphi}\bar{z}_0}.$$

Atunci $\tilde{u}\left(e^{i\psi}\right) = u\left(\varsigma\left(e^{i\varphi}\right)\right) = u\left(e^{i\varphi}\right)$. Diferenţiind relaţia de mai sus, avem

$$d\psi = \frac{1 - \left|z_0\right|^2}{\left(e^{i\varphi} - z_0\right)\left(e^{-i\varphi} - \bar{z}_0\right)} d\varphi = \frac{1 - r_0^2}{1 - 2r_0 \cos\left(\varphi_0 - \varphi\right) + r_0^2} d\varphi.$$

Inlocuind, obţinem

$$u\left(z_0\right) = u\left(r_0 e^{i\varphi_0}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u\left(e^{i\varphi}\right) \frac{1 - r_0^2}{1 - 2r_0 \cos\left(\varphi_0 - \varphi\right) + r_0^2} d\varphi.$$

Aceasta se numeşte *formula lui Poisson pentru cercul unitate.* Se poate arăta că într-adevăr formula lui Poisson rezolvă efectiv problema lui Dirichlet. Mai mult, aceasta are loc şi în cazul soluţiei mărginite în cercul unitate a problemei lui Dirichlet cu date continue pe porţiuni. Deci are loc:

T12. Soluţia armonică mărginită a problemei lui Dirichlet pentru cercul unitate cu date continue pe porţiuni este dată de formula lui Poisson:

$$u\left(z_0\right) = u\left(r_0 e^{i\varphi_0}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u\left(e^{i\varphi}\right) \frac{1 - r_0^2}{1 - 2r_0 \cos\left(\varphi_0 - \varphi\right) + r_0^2} d\varphi.$$

Prelucrând nucleul formulei lui Poisson

$$\frac{1-r_0^2}{1-2r_0\cos(\varphi_0-\varphi)+r_0^2}=\frac{1-|z_0|^2}{|e^{i\varphi}-z_0|^2}=\Re e\left(\frac{e^{i\varphi}+z_0}{e^{i\varphi}-z_0}\right)$$

se poate scrie formula lui Poisson sub forma

$$u(z_0)=\Re e\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(e^{i\varphi}\right)\frac{e^{i\varphi}+z_0}{e^{i\varphi}-z_0}d\varphi\right),$$

sau punând $e^{i\varphi}=\varsigma$ (fără nici o legătură cu ς de mai înainte), de unde $d\varphi=\frac{d\varsigma}{i\varsigma}$, şi z în loc de z_0 :

$$u(z)=\Re e\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\varsigma|=1}u(\varsigma)\frac{\varsigma+z}{\varsigma-z}\frac{d\varsigma}{\varsigma}\right).$$

De aici rezultă

T13. Dacă funcţia $w(z)$ este olomorfă în cercul unitate $|z|<1$ şi partea sa reală $u(z)=\Re e\,(w(z))$ este continuă pe porţiuni pe frontiera $|z|=1$, atunci are loc *formula lui Schwartz-Villat*:

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\varsigma|=1}u(\varsigma)\frac{\varsigma+z}{\varsigma-z}\frac{d\varsigma}{\varsigma}+i\Im m\,(w(0)),\,|z|<1.$$

Se putea stabili formula lui Schwartz-Villat şi pornind de la formula integrală a lui Cauchy:

$$\begin{aligned}w(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\varsigma|=1}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\varsigma|=1}\frac{2u(\zeta)+\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta=\\&=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\varsigma|=1}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\varsigma|=1}\frac{\overline{w\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)}}{\zeta-z}d\zeta.\end{aligned}$$

Dar dacă funcţia $w(z)$ este olomorfă în cercul unitate

$$w(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+...,\quad c_0=w(0),$$

funcţia

$$\overline{w\left(\frac{1}{\bar\varsigma}\right)}=\bar c_0+c_1\frac{1}{\varsigma}+c_2\frac{1}{\varsigma^2}+...,$$

este olomorfă în exteriorul cercului unitate şi deci ultima integrală este egală cu

$$\begin{aligned} -\operatorname*{rez}_{\varsigma=\infty}\left(\frac{\overline{w\left(\frac{1}{\bar{\varsigma}}\right)}}{\varsigma - z}\right) &= -\bar{c}_0 = -u(0) + i\Im m\left(w\left(0\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\varsigma|=1} u(\varsigma)\frac{d\varsigma}{\varsigma} + i\Im m\left(w\left(0\right)\right). \end{aligned}$$

Inlocuindu-i valoarea şi făcând calculele, regăsim formula lui Schwartz-Villat.

Formulele lui Poisson şi Schwartz-Villat permit rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru cerc. Ele sunt efective mai ales în cazul datelor raţionale pe frontieră, când integralele se pot uşor calcula cu ajutorul teoremei reziduurilor.

Notăm că datele pe frontiera cercului unitate pot fi date fie ca valori ale unor funcţii de x, y pe cercul unitate, fie ca funcţii de $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$, fie ca funcţii de variabila complexă $\varsigma = e^{i\varphi}$.

Exemplul 2. Să se rezolve problema lui Dirichlet:

$$\Delta u = 0, x^2 + y^2 < 1; \quad u(x,y)\left|_{x^2+y^2=1}\right. = \frac{y}{5+4x}\Big|_{x^2+y^2=1}.$$

Punând pe cerc $\varsigma = e^{i\varphi}$ avem

$$x = \cos\left(\varphi\right) = \frac{\varsigma^2+1}{2\varsigma}, \quad y = \sin\left(\varphi\right) = \frac{\varsigma^2-1}{2i\varsigma}$$

şi deci valoarea funcţiei u pe cerc este

$$u\left(\varsigma\right) = \frac{\varsigma^2-1}{2i\left(2\varsigma^2+5\varsigma+2\right)}.$$

Pentru a rezolva problema prin aplicarea formulei lui Schwartz-Villat trebuie să calculăm integrala

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\varsigma|=1} \frac{\left(\varsigma^2-1\right)\left(\varsigma+z\right)}{2i\left(2\varsigma^2+5\varsigma+2\right)\left(\varsigma-z\right)\varsigma}d\varsigma.$$

Cum funcţia de sub integrală $F\left(\varsigma\right)$ are în interiorul cercului unitate poli de ordinul întâi în punctele $\varsigma = 0, \varsigma = z, \varsigma = -\frac{1}{2}$ rezultă că

$$I = \operatorname*{rez}_{\varsigma=0} F(\varsigma) + \operatorname*{rez}_{\varsigma=z} F(\varsigma) + \operatorname*{rez}_{\varsigma=-\frac{1}{2}} F(\varsigma).$$

Găsim în modul obişnuit:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{rez}_{\varsigma=0} F(\varsigma) &= \frac{1}{4i}, \quad \operatorname*{rez}_{\varsigma=z} F(\varsigma) = \frac{z^2-1}{i\left(2z^2+5z+2\right)}, \\
\operatorname*{rez}_{\varsigma=-\frac{1}{2}} F(\varsigma) &= -\frac{2z-1}{4i\left(2z+1\right)}, \quad I = \frac{z}{2i\left(z+2\right)}
\end{aligned}$$

.

Rezultă că soluţia căutată a problemei lui Dirichlet este

$$u(x,y) = \Re e\left(\frac{z}{2i\left(z+2\right)}\right) = \frac{y}{\left(x+2\right)^2+y^2} = \frac{r\sin\varphi}{r^2+4r\cos\varphi+4}.$$

14.9 Teorema cercului şi aplicaţiile sale

In cazul datelor raţionale o soluţie rapidă a problemei lui Dirichlet este dată de următoarele teoreme:

T14. (*Teorema cercului*) Dacă $R(z)$ este o funcţie raţională reală pe cercul unitate $|z|=1$ fără poli pe frontieră şi dacă $M(z)$ este suma părţilor sale principale relative la polii din interiorul cercului atunci $R(z) = M(z) + \overline{M\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + k$, k fiind o constantă reală.

Intr-adevăr, dacă $M(z)$ este suma părţilor sale principale relative la poli din interiorul cercului atunci $\overline{M\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ este o funcţie olomorfă în interiorul cercului unitate. Funcţia $R(z) - M(z) - \overline{M\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ este o funcţie olomorfă în cercul unitate, cu parte imaginară nulă pe frontieră, deci ea este o constantă reală k, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemplu 3. Valorile pe frontiera cercului unitate ale funcţiei armonice din Exemplul 1. sunt $R(\varsigma) = \frac{\varsigma^2-1}{2i(2\varsigma^2+5\varsigma+2)}$. Această funcţie raţională are un singur pol în interiorul cercului unitate $\varsigma = -\frac{1}{2}$ cu partea principală $M(\varsigma) = -\frac{1}{8i}\frac{1}{\varsigma+\frac{1}{2}}$. După teorema cercului trebuie să avem

$$R\left(\varsigma\right) = -\frac{1}{8i}\frac{1}{\varsigma+\frac{1}{2}} + \overline{-\frac{1}{8i}\frac{1}{\frac{1}{\varsigma}+\frac{1}{2}}} + k = -\frac{1}{8i}\frac{1}{\varsigma+\frac{1}{2}} + \frac{1}{8i}\frac{2\varsigma}{2+\varsigma} + k,$$

sau făcând calculele

$$R(\varsigma) = -\frac{1}{4i}\frac{1}{2\varsigma+1} + \frac{1}{4i}\frac{\varsigma}{\varsigma+2} + k.$$

Punând $\varsigma = 1$ găsim $k = 0$. Relaţia se verifică imediat.

T15. Dacă $R(\varsigma)$ este o funcţie raţională reală pe frontiera cercului unitate $|\varsigma| = 1$ şi este valoarea pe frontiera a parţii reale a unei funcţii $w(z)$ olomorfe în interiorul cercului unitate, atunci $w(z) = 2\overline{M\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + k + ik\prime, \quad k \in R, k\prime \in R,\ M(\varsigma)$ fiind suma părţilor principale ale lui $R(\varsigma)$ relative la polii din interiorul cercului unitate.

Cum după teorema cercului $R(\varsigma) = M(\varsigma) + \overline{M\left(\frac{1}{\bar{\varsigma}}\right)} + k$, putem scrie

$$\Re e\left(w(\varsigma) - M(\varsigma) - \overline{M\left(\frac{1}{\bar{\varsigma}}\right)} - k + M(\varsigma) - \overline{M\left(\frac{1}{\bar{\varsigma}}\right)}\right) = 0.$$

Am adunat pe $M(\varsigma)$ pentru a avea sub paranteză o funcţie olomorfă, am scăzut $\overline{M\left(\frac{1}{\bar{\varsigma}}\right)}$ pentru a nu modifica partea reală. Rezultă că paranteza este o funcţie olomorfă în interiorul cercului unitate, cu parte reală nulă pe frontieră deci o constantă pur imaginară $ik\prime$.

Exemplu 4. Dacă reluăm problema lui Dirichlet de la Exemplul 1., tinând cont de Exemplul 2. avem imediat $w(z) = \frac{z}{2i(z+2)} + ik\prime,\ k\prime \in R$ şi regăsim rezultatul din Exemplul 1.

14.10 Soluţia problemei lui Dirichlet pentru semiplan

Fie cu ajutorul reprezentării conforme a semiplanului superior $\Im m\,(z) > 0$ pe cercul unitate astfel încât punctul $z_0 = x_0 + iy_0, y_0 > 0$ să se ducă în centrul cercului şi apoi aplicând teorema de medie, fie cu ajutorul formulei integrale a lui Cauchy, se poate rezolva problema lui Dirihlet pentru semiplanul superior:

Să se determine funcţia $u(x, y)$ armonică în semiplanul superior $\Im m\,(z) > 0$, mărginită la infinit, cunoscând valorile sale $\tilde{u}(x) = u(x, 0)$ pe frontieră.

Adoptând a două cale, fie cazul când $u(x, y)$ este nulă la infinit şi fie $w(z)$ funcţia olomorfă în semiplanul superior, nulă la infinit, a cărei parte reală este $u(x, y)$. Dacă z este un punct oarecare din semiplanul superior, considerând R suficient de mare ca z să fie interior semicercului cu diametrul$[-R, R]$, după formula integrală a lui Cauchy putem scrie

$$w(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{\widetilde{u}(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{\overline{w(\zeta)}d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Cum $w(z)$ este olomorfă în semiplanul superior, funcţia $\overline{w(\bar{z})}$ este olomorfă în semiplanul inferior şi vom putea scrie

$$w(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{\widetilde{u}(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{\overline{w(\overline{\zeta})}d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_R}\frac{\overline{w(\overline{\zeta})}d\zeta}{\zeta - z} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{w(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_R}\frac{\overline{w(\overline{\zeta})}d\zeta}{\zeta - z},$$

unde am notat cu C'_R semicercul inferior de diametru $[-R, R]$ parcurs în sens invers trigonometric. Suma integralelor a doua şi a treia este nulă conform teoremei integrale a lui Cauchy aplicată funcţiei $\overline{w(\bar{z})}$ olomorfe în semiplanul inferior. Rămâne deci

$$w(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{\tilde{u}(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{w(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C\prime_R}\frac{\overline{w(\bar{\varsigma})}d\varsigma}{\varsigma - z}.$$

Trecând la limită, $R \to \infty$, ultimele integrale tind către infinit, integranzii lor comprtându-se ca $\frac{1}{R}o(1)$. Avem deci

$$w(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{u}(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma,$$

integrala fiind înţeleasă în sens principal, adică limitele de integrare tind simetric spre infinit. Dacă funcţia $\tilde{u}(x) = u(x, 0)$ se comportă la infinit astfel încât $|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(\infty)| < \frac{C}{|x|\alpha}, \alpha > 0$, atunci aplicând cele de mai sus funcţiei $u(x, y) - \tilde{u}(\infty)$ avem

$$w(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{u}(\varsigma) - \tilde{u}(\infty)}{\varsigma - z}d\varsigma + \tilde{u}(\infty),$$

cu aceeaşi precizare asupra integralei. Avem deci:

T16. Soluţia mărginită în semiplanul superior $\Im m\,(z) > 0$ a problemei lui Dirichlet pentru acest semiplan este dată de formula

$$u(z) = \Re e\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{u}(\varsigma) - \tilde{u}(\infty)}{\varsigma - z}d\varsigma\right) + \tilde{u}(\infty),$$

sau, de aşa numita *formulă a lui Poisson pentru semiplan*

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\left(\tilde{u}(\varsigma) - \tilde{u}(\infty)\right) d\varsigma}{(\varsigma - x)^2 + y^2} + \tilde{u}(\infty).$$

unde $z = x + iy, y > 0$.

Când $\tilde{u}(x) = u(x, o)$ este raţională , integrala din formule se calculeză cu ajutorul teoremei reziduurilor.

Exemplu 5. Să se rezolve problema lui Dirichlet pentru semiplanul superior:

$$\Delta u = 0, y > 0; u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Aplicând formula de mai sus avem

$$\begin{aligned} u(z) &= \Re e\left(\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varsigma}{(1 + \varsigma^2)(t - z)}\right) = \Re e\left(2 \operatorname*{rez}_{\varsigma = i} F(\varsigma) + 2 \operatorname*{rez}_{\varsigma = z} F(\varsigma)\right) = \\ &= \Re e\left(-2 \operatorname*{rez}_{\varsigma = -i} F(\varsigma)\right), \end{aligned}$$

unde am notat $F(\varsigma) = \frac{1}{(1+\varsigma^2)(\varsigma - z)}$. Se găseşte imediat

$$u(z) = -2\Re e\left(\frac{1}{2i(z + i)}\right) = \frac{y + 1}{x^2 + (y + 1)^2}.$$

Şi în cazul problemei lui Dirichlet pentru semiplan în cazul datelor raţionale are loc o teoremă care dă soluţia imediat:

T17. Dacă $R(\varsigma)$ este o funcţie raţională, reprezentând valorile la limită pe axa reală ale părţii reale a unei funcţii $w(z)$ olomorfe în semiplanul superior, atunci $w(z) = 2\overline{M(\bar{z})} + k + ik\prime, k \in \mathbf{R}, k\prime \in \mathbf{R}$, $M(z)$ fiind suma părţilor principale ale lui $R(z)$ relative la polii din semiplanul superior.

Exemplul 5. In exemplul precedent, funcţia raţională $R(z) = \frac{1}{z^2+1}$ are partea principală relativă la singurul pol $z = i$ din semiplanul superior $M(z) = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}$. Deci avem $w(z) = 2\overline{\frac{1}{2i}\frac{1}{\bar{z}-i}} = \frac{i}{z+i} + k + ik\prime$. Luând punctul frontieră $z = o$ se găseşte $k = 0$ şi avem rezultatul precedent.

Problema lui Dirichlet pentru funcţii armonice pentru un domeniu oarecare se poate rezolva folosind reprezentarea conformă a domeniului pe unul din domeniile canonice: cercul unitate sau semiplanul superior.

Exemplul 7. Să se rezolve problema lui Dirichlet pentru banda $0 < y < \pi$ cu datele pe frontieră

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & pentru \quad x > 0 \\ 0, & pentru \quad x < 0 \end{cases}, u(x,\pi) = 0.$$

Funcţia $\varsigma = e^z, \varsigma = \xi + i\eta$, reprezintă conform banda $0 < y < \pi$ pe semiplanul superior $\eta > 0$. Condiţiile la limită devin

$$\tilde{u}(\xi,0) = \begin{cases} 1, \ pentru\ \xi > 1 \\ 0, \ pentru\ \xi < 1. \end{cases}$$

Rezolvând această problemă Dirichlet găsim

$$\tilde{u}(\varsigma) = \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{\eta dt}{(\xi - t)^2 + \eta^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} arctg\left(\frac{1-\xi}{\eta}\right).$$

Inlocuind $\xi = e^x \cos(y), \eta = e^x \sin(y)$ obţinem soluţia problemei iniţiale:

$$u(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} arctg\left(\frac{e^{-x} - \cos(y)}{\sin(y)}\right).$$

14.11 Problema lui Neumann

Prin *problema lui Neumann* pentru funcţii armonice se înţelege problema determinării unei funcţii $u(x,y) = u(z)$, armonică într-un domeniu D, continuu diferenţiabilă până la frontiera lui D, când se cunosc valorile derivatei sale normale pe frontieră $\frac{\partial u}{\partial n}|_{z\in\partial D} = f(z)$. In cazul domeniilor nemărginite se presupune că funcţia şi derivatele sale parţiale de primul ordin sunt mărginite în domeniul D.

Din teorema T2. rezultă că pentru ca problema lui Neumann să aibă soluţie, este necesar ca datele pentru derivata normală să verifice condiţia $\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int\limits_{\partial D} f(z) ds_z = 0$. Se poate arăta că dacă această condiţie este îndeplinită, atunci problema lui Neuman are soluţie unică, abstracţie făcând de o constantă aditivă.

Rezolvarea problemei lui Neuman poate fi redusă în mai multe moduri la rezolvarea problemei lui Dirichlet.

Exemplul 8. Să rezolvăm problema lui Neuman pentru semiplanul superior $y \geq 0$, adică să determinăm funcţia $u(x,y)$ armonică în semiplanul superior cunoscând valorile derivatei sale normale pe frontieră $f(x)$, funcţie continuă pe $\mathbf{R}$, astfel încât $f(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon}$ pentru $|x| \to \infty, \varepsilon > 0$. Presupunem că $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$.

Cum $\frac{\partial u}{\partial n_e}|_{y=0} = -\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$ şi cum derivata $\frac{\partial u}{\partial y}$ a unei funcţii armonice este tot armonică, problema Neuman revine la o problemă a lui Dirichlet. Aplicând formula stabilită pentru problema lui Dirichlet pentru semiplan, putem scrie

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t)}{(t-x)^2+y^2}dt,$$

şi deci

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\ln\left[(t-x)^2+y^2\right]dt + C(x).$$

Condiţia verificată la ∞ de $f(x)$ asigură existenţă integralei şi deci această integrală va fi o funcţie armonică. Rezultă că $C''(x) = 0$ adică $C(x) = C_1 + C_2 x$. Putem scrie

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\ln\left[(t-x)^2+y^2\right]dt +$$

$$+\ln(x^2+y^2)\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt + C_1 + C_2 x =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\ln\frac{(t-x)^2+y^2}{x^2+y^2}dt + C_1 + C_2 x.$$

Ultima integrală în modul este mai mică ca $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ln(|t|+1)^2\,dt$, integrală convergentă, deci mărginită. Rezultă că $C_2 = 0$ şi putem scrie formula finală

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u(z) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\ln\left[(t-x)^2+y^2\right]dt + C_1 = \\ &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\ln|t-z|\,dt + C_1, \end{aligned}$$

adică funcţia căutată este partea reală a funcţiei olomorfe

$$w(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\ln(t-z)\,dt + C_1.$$

Formulele stabilite se numesc *formulele lui Dini* de rezolvare a problemei lui Neuman pentru semiplan.

Dacă funcţia $\varsigma = \varsigma(z), \varsigma = \xi + i\eta$ reprezintă conform domeniul simplu conex D pe semiplanul $\eta \geq 0$ şi $z = z(\varsigma)$ este inversa sa, atunci problema lui Neuman pentru domeniu D se reduce la o problemă a lui Neuman pentru semiplanul superior pentru funcţia $\tilde{u}(\varsigma) = u(z(\varsigma))$. Cum prin reprezentare conformă direcţia normalei $\tilde{n}_\varsigma$ trece în direcţia normalei n_z şi coeficientul de conformitate este $|z\prime(\xi)|$ vom putea scrie

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_\varsigma}\,|_{\varsigma=\xi} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_z}\,\Big|_{z=z(\xi)}\,|z\prime(\xi)| = f(z(\xi))\,|z\prime(\xi)| = \tilde{f}(\xi)\,|z\prime(\xi)|$$

şi deci vom avea

$$\tilde{u}(\varsigma) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\,|z\prime(t)|\ln|t-\varsigma|\,dt + C.$$

Revenind la vechea variabilă, punând $\varsigma = \varsigma(z), t = \varsigma(\tau)$ şi ţinând cont că $\varsigma\prime(\tau) = \frac{1}{z\prime(t)}$ găsim formula de rezolvare a problemei lui Neuman pentru domeniul D

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\partial D} f(\tau)\ln|\varsigma(\tau)-\varsigma(z)| \,\cdot\, \frac{\varsigma\prime(\tau)}{|\varsigma\prime(\tau)|}d\tau + C.$$

Exemplul 9. Să rezolvăm problema lui Neuman pentru cercul unitate $|z| \leq 1$.

In acest caz punând $z = re^{i\varphi}$, valoarea derivatei normale este

$$\frac{\partial u}{\partial n_z}\,|_{z=e^{i\varphi}} = \frac{\partial u}{\partial r}\,|_{z=e^{i\varphi}} = f(e^{i\varphi}),$$

cu condiţia $\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})d\varphi = 0$. Funcţia

$$z = z(\varsigma) = \frac{\varsigma - i}{\varsigma + i}$$

reprezintă conform semiplanul $\Im m(\varsigma) \geq 0$ pe cercul $|z| \leq 1$ şi are inversa

$$\varsigma = \varsigma(z) = \frac{1+z}{1-z}i.$$

Cum

$$\varsigma\prime(z) = \frac{2i}{(1-z)^2}$$

vom putea scrie expresia soluţiei

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{|\tau|=1} f(\tau)\ln\left|\frac{1+\tau}{1-\tau}i - \frac{1+z}{1-z}i\right|\frac{i\,|1-\tau|^2}{(1-\tau)^2}d\tau + C,$$

sau punând $\tau = e^{i\theta}$ şi făcând calculele

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \ln \left|e^{i\theta} - z\right| d\theta + I_1 + I_2 + C,$$

unde

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\pi}\ln\frac{2}{|1-z|}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta = 0, \\ I_2 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\ln\left|1 - e^{i\theta}\right| d\theta = \mathrm{cons\,tan\,t} \end{aligned}$$

Putem scrie *formula lui Dini* de rezolvare a problemei lui Neuman pentru cercul unitate

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \ln \left|e^{i\theta} - z\right| d\theta + C,$$

care arată că $u(z)$ este partea reală a funcţiei olomorfe

$$w(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \ln \left(e^{i\theta} - z\right) d\theta + C,$$

sau

$$w(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_{|\varsigma|=1} f(\varsigma) \ln (\varsigma - z) \frac{d\varsigma}{\varsigma} + C.$$

Notăm că această integrală, ca şi cea de la semiplan, se poate calcula cu teorema reziduurilor numai după aplicarea integrării prin părţi.

Evident puteam stabili această formulă observând că $zw\prime(z)\left.\right|_{z=e^{i\varphi}} = \frac{\partial u}{\partial r}\left.\right|_{r=1} + i\frac{\partial v}{\partial r}\left.\right|_{r=1}$ şi deci avem după formula lui Schwartz-Villat

$$zw\prime(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma|=1} f(\varsigma)\frac{\varsigma + z}{\varsigma - z}\frac{d\varsigma}{\varsigma} + iC$$

şi aşa mai departe.

14.12 O idee simplă foarte productivă

Prezentăm acum o idee foarte simplă, dar foarte productivă în multe domenii ale matematicii şi ale aplicaţiilor acesteia.

Fie A o matrice pătratică de ordinul n şi X, Y coloanele componentelor a doi vectori dintr-un spaţiu vectorial n-dimensional. Cum produsul matricilor $Y^t AX$ reprezintă un număr, prin transpunere obţinem acelaşi număr, deci are loc relaţia

$$Y^t AX = X^t A^t Y.$$

Dacă interpretăm coloanele X, Y , ca fiind coloanele componentelor unor deplasări în spaţiul a n coordonate generalizate, AX ca fiind coloana componentelor unei forţe generalizate care apare datorită deplasării X prin matricea A şi $A^t Y$ ca fiind coloana componentelor unei forţe care apare datorită deplasării Y prin matricea transpusă A^t, atunci relaţia de mai sus poate fi interpretată ca o relaţie de reciprocitate: lucrul mecanic efectuat de forţa AX pe deplasarea Y este egal cu lucrul mecanic al forţei $A^t Y$ pe deplasarea X .

Să presupunem acum că avem de rezolvat ecuaţia $AX = F$, adică vrem să găsim deplasarea $X = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)^t$ care generează forţa F prin matricea A. Să notăm cu $D^{(i)}$ coloana componentelor deplasării care generează prin matricea A^t o forţă $E^{(i)} = (0, 0, ..., 1, 0, ...0)^t$ cu singura componentă nenulă egală cu unitatea pe locul i : $A^t D^{(i)} = E^{(i)}$. Scriind relaţia de reciprocitate pentru X, $D^{(i)}$ avem $D^{(i)t} AX = X^t A^t D^{(i)}$ sau $D^{(i)t} F = X^t E^{(i)} = x_i$ sau $x_i = F^t D^{(i)}$. Rezultă că dacă cunoaştem toate soluţiile $D^{(i)}$ ale ecuaţiilor $A^t D^{(i)} = E^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., n$, soluţii numite *soluţiile fundamentale ale matricei* A^t obţinem o reprezentare *"integrală"* a soluţiei căutate X,

$$X^t = (x_{1,}..., x_i, ...x_n) = F^t \left(D^{(1)}, ..., D^{(i)}, ...D^{(n)}\right)$$

sau

$$X = \left(D^{(1)}, ..., D^{(i)}, ...D^{(n)}\right)^t F = A^{-1} F.$$

Obţinem astfel semnificaţia liniilor matricei inverse: transpusele liniilor matricei inverse A^{-1} sunt soluţiile fundamentale ale matricei A^t. Evident, dacă pe o cale oarecare este mai uşor de determinat soluţiile fundamentale sau dacă avem nevoie numai de o componentă x_i şi putem determina soluţia fundamentală $D^{(i)}$, această cale este de preferat faţă de găsirea inversei A^{-1}. Mai notăm că în multe aplicaţii, datorită principiului acţiunii şi reacţiunii, matricea A este simetrică şi deci va fi vorba de soluţiile fundamentale ale matricei A. Aşa se întâmplă, de exemplu în rezistenţa materialelor, când matricea A va fi matricea de rigiditate, iar relaţia de reciprocitate se va numi *principiul de reciprocitate al lui Betti.*

Să mai observăm că dacă X este soluţie a ecuaţiei $AX = F$ şi dacă Y este o soluţie a ecuaţiei $A^tY = 0$, atunci în mod necesar $Y^tF = 0$. Deci dacă ecuaţia $A^tY = 0$, are soluţii nebanale, atunci ecuaţia $AX = F$ are soluţii numai dacă F este ortogonal pe orice soluţie nebanală a ecuaţiei $A^tY = 0$.

Ideea expusă este folosită în multe probleme cu foarte mult profit. Evident, în locul matricei A apare un operator diferenţial, în locul sumelor vor apare integrale. Aşa va fi folosită în paragraful următor.

14.13 Formulele lui Green pentru laplacean

In cazul funcţiilor armonice de două variabile, pentru a studia proprietăţile lor, am folosit din plin legătura dintre acestea şi funcţiile analitice. Pentru funcţii de mai multe variabile va trebui să folosim o altă idee şi anume să folosim o proprietate de reciprocitate a operatorului lui Laplace.

Pentru simplitatea scrierii vom nota punctele din spaţiu prin vectorii lor de poziţie în raport cu un sistem de coordonate rectangular. Astfel vom nota prin $\mathbf{x}$ punctul al cărui vector de poziţie este $\mathbf{x}$ cu compnentele x_1, x_2, x_3. Deci vectorii vor fi notaţi prin caractere bold.

Dacă $U(\mathbf{x})$ şi $V(\mathbf{x})$ sunt două funcţii cu derivate parţiale de ordinul doi într-un domeniu D, atunci putem scrie relaţia

$$\operatorname{grad} U \ \operatorname{grad} V = \operatorname{div}(U \operatorname{grad} V) - U\Delta V,$$

obţinută imediat ţinând cont de formula de derivare a produsului. Schimbând între ele pe U şi V, avem şi relaţia

$$\operatorname{grad} U \ \operatorname{grad} V = \operatorname{div}(V \operatorname{grad} U) - V\Delta U.$$

Scăzând cele două relaţii obţinem *identitatea lui Green-Lagrange pentru operatorul lui Laplace*:

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} V - V \operatorname{grad} U) = U\,\Delta V - V\,\Delta U.$$

Dacă acum aplicăm formula flux-divergenţă

$$\iiint\limits_{D} div\mathbf{v}dv = \iint\limits_{\partial D} \mathbf{v}\mathbf{n}_e d\sigma,$$

valabilă pentru orice funcţie vectorială $\vec{V}$ continuă până la frontiera lui D, derivabilă în D, $\mathbf{n}_e$ fiind normala exterioară la frontieră, obţinem formula

$$\iiint\limits_{D} (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dv = \iint\limits_{\partial D} \left(U\frac{\partial V}{\partial n_e} - V\frac{\partial U}{\partial n_e} \right) d\sigma,$$

numită *formula de reciprocitate a lui Green pentru funcţii armonice.* Este evident că formulele de mai sus rămân valabile cu modificările de rigoare pentru orice număr de variabile.

Dacă funcţia V este o funcţie armonică în domeniul D, atunci obţinem relaţia

$$\iiint\limits_{D} V\Delta U dv = \iint\limits_{\partial D} \left(V\frac{\partial U}{\partial n_e} - U\frac{\partial V}{\partial n_e} \right) d\sigma.$$

In particular, pentru $V = 1$, obţinem

$$\iiint\limits_{D} \Delta U dv = \iint\limits_{\partial D} \frac{\partial U}{\partial n_e} d\sigma.$$

Această relaţie ne dă o definiţie intrinsecă a laplaceanului funcţiei U

$$\triangle U(\mathbf{x}) = \lim \frac{\iint\limits_{\partial d} \frac{\partial U}{\partial n_e} d\sigma}{\operatorname{vol}(d)},$$

limita fiind luată când domeniul d conţinând în interior punctul $\mathbf{x}$ se strânge la $\mathbf{x}$.

Dacă funcţia U este şi ea armonică atunci

$$\iint\limits_{\partial D} \frac{\partial U}{\partial n_e} d\sigma = 0,$$

adică, regăsim şi pentru funcţii de mai multe variabile proprietatea referitoare la derivata normală pe frontieră întâlnită la funcţii armonice de o variabilă şi la funcţii armonice de două variabile. Mai mult, acum rezultă uşor că dacă U este o funcţie cu derivate parţiale de ordinul doi continue în D şi dacă pentru orice subdomeniu $\tilde{D}$ al lui D are loc relaţia $\iint\limits_{\partial\tilde{D}} \frac{\partial U}{\partial n_e} d\sigma = 0$, atunci funcţia U este armonică în D. Deci proprietatea este caracteristică funcţiilor armonice.

Din proprietatea stabilită rezultă că problema lui Neumann pentru funcţii armonice, adică problema determinării unei funcţii armonice într-un domeniu mărginit D când se cunosc valorile derivatei sale normale pe frontieră, nu este posibilă decât dacă integrala derivatei normalei date pe frontiera domeniului este nulă.

Din formula $\operatorname{grad} U \ \operatorname{grad} V = \operatorname{div}(V \operatorname{grad} U) - V\Delta U$ în cazul $U = V$ prin integrare rezultă relaţia

$$\int\limits_D \operatorname{grad} U \operatorname{grad} U dv + \int\limits_D U\Delta U dv = \int\limits_{\partial D} U\frac{\partial U}{\partial n} d\sigma.$$

Din aceasta, aplicată diferenţei a două soluţii, rezultă că problema lui Dirichlet pentru domeniul mărginit D are soluţie unică şi că problema lui Neumann pentru domeniul mărginit D are soluţie unică abstracţie făcând de o constantă aditivă.

14.14 Proprietăţile funcţiilor armonice

Să determinăm acum funcţiile armonice cu simetrie sferică, deci funcţiile armonice care depind numai de distanţa $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ de la punct la originea sistemului de axe: $U = U(|\mathbf{x}|)$. Cum

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = U'(|\mathbf{x}|)\frac{x_1}{|\mathbf{x}|}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = U''(|\mathbf{x}|)\frac{x_1^2}{|x|^2} + U'(|\mathbf{x}|)\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} - \frac{x_1^2}{|\mathbf{x}|^3}\right)$$

rezultă

$$\triangle U = U''(|\mathbf{x}|) + U'(|\mathbf{x}|)\frac{2}{|\mathbf{x}|} = 0.$$

Deci $U'(|\mathbf{x}|) = \frac{C_1}{|\mathbf{x}|^2}$ de unde $U = -\frac{C_1}{|\mathbf{x}|} + C_2$, C_1, C_2 fiind constante reale oarecare. O asemenea funcţie este definită şi armonică în întreg spaţiul fără origine. Cum $\operatorname{grad} U = \frac{C_1}{|\mathbf{x}|^2}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$, $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ fiind versorul direcţiei care uneşte originea O cu punctul curent $\mathbf{x}$, rezultă că o asemenea funcţie armonică cu simetrie sferică este potenţialul unui câmp vectorial a cărui mărime este invers proporţională cu pătratul distanţei de la punct până la origine şi este dirijat după direcţia vectorului de poziţie al lui $\mathbf{x}$ dacă $C_1 > 0$. Funcţia U fiind armonică în orice domeniu care nu conţine originea, fluxul prin frontiera unui asemenea domeniu va fi nul. Fluxul acestui câmp prin suprafaţa unei sfere S cu centrul în origine de rază R este

$$\iint_S \frac{C_1}{R^2}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}d\sigma = C_1 4\pi.$$

Dacă vom considera un domeniu D care conţine în interiorul său originea $\mathbf{0}$ şi vom aplica proprietatea relativă la derivata normală a funcţiilor armonice domeniului limitate de o sfera $S\rho$ cu centrul în $\mathbf{0}$ şi raza ρ şi suprafaţa ∂D vom avea

$$\iint_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n_{e\mathbf{x}}}\frac{-C_1}{|\mathbf{x}|}d\sigma_P = \iint_{S\rho} \frac{C_1}{|\mathbf{x}|^2}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}n_{e\mathbf{x}}d\sigma_{\mathbf{x}} = C_1 4\pi.$$

Mai putem scrie

$$\iint_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n_{e\mathbf{x}}}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}|}d\sigma_{\mathbf{x}} = -1.$$

Rezultă că $\triangle\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}|}$ este o funcţie nulă peste tot exceptând originea şi cu proprietatea că integrala sa pe orice domeniu care conţine în interior originea este -1. Ori o asemenea funcţie în sensul obişnuit nu există, ea există în sensul teoriei distribuţiilor fiind "funcţia" lui Dirac $-\delta(\mathbf{x})$. Putem spune că funcţia $U(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$ verifică ecuaţia în distribuţii $\triangle U(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x})$. Se poate spune că funcţia armonică $\Omega(\mathbf{x},\mathbf{0}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}|}$ este potenţialul unei surse unitate plasate în origine. Analogul în plan este funcţia armonică $\Omega(\mathbf{x},\mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right)$. Se poate regăsi acest lucru procedând ca mai sus, folosind coordonatele polare.

Funcţia armonică în întreg spaţiul fără punctul ξ,

$$\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|},$$

unde am notat cu $|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|$ distanţa de la punctul $\boldsymbol{\xi}$ la punctul $\mathbf{x}$, este potenţialul în $\mathbf{x}$ al unei surse unitate plasate în punctul $\boldsymbol{\xi}$.

Atât în plan cât şi în spaţiu, putem spune că funcţia $\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ reprezintă *soluţia fundamentală a operatorului lui Laplace* $-\Delta$, adică

$$-\triangle_x\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}).$$

Observaţie. Uneori prin potenţialul unui câmp vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ se înţelege o funcţie $\varphi(\mathbf{x})$, astfel încât lucrul mecanic necesar pentru a duce din punctul $\mathbf{x}_1$ în punctul $\mathbf{x}_2$

unitatea de "sarcină" a câmpului este independent de drum şi este egal cu diferenţa $\varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2)$. In acest caz $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x})$. Intr-o asemenea interpretare funcţia $\Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ poate fi interpretată, de exemplu, ca potenţialul câmpului electric creat de o sarcină unitate plasată în punctul $\boldsymbol{\xi}$ într-un mediu cu constanta dielectrică unitate, unităţile fiind luate în aşa numitul sistem raţional.

Funcţia $U(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}_k|}$ este armonică în întreg spaţiul cu excepţia punctelor $\boldsymbol{\xi}_k, k = 1, 2, ..., n$; ea poate fi interpretată ca potenţialul câmpului creat de sursele de mărime Q_k plasate în punctele $\boldsymbol{\xi}_k, k = 1, 2, ..., n$.

In particular, funcţia

$$V(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \lim_{\xi' \to \xi} \frac{\Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}') - \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}' - \boldsymbol{\xi}|} = \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{e} \xi} = \mathbf{e}.grad_{\boldsymbol{\xi}} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$$

este armonică în tot spaţiul, exceptând $\boldsymbol{\xi}$ şi poate fi interptretată ca potenţialul unui dipol cu intensitate unitate plasat în $\boldsymbol{\xi}$ şi având axa $\mathbf{e}$, direcţia după care $\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi}$, sau pe scurt cu momentul (vector) $\mathbf{e}$. Mai general se spune că

$$V(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{p} \cdot grad_{\boldsymbol{\xi}} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{p} \cdot grad_{\mathbf{x}} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$$

reprezintă *potenţialul unui dipol cu momentul (vector)* $\mathbf{p}$ *plasat în* $\boldsymbol{\xi}$. Un câmp $\mathbf{E}(\mathbf{x})$de aceeaşi natură acţionează asupra unui dipol cu momentul $\mathbf{p}$ cu un cuplu de mărime $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi})$ şi cu o forţă $\mathbf{F} = (\mathbf{p} grad_{\boldsymbol{\xi}})\, \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi})$. Din acest motiv, prin aceşti dipoli se poate modela starea de polarizare electrică a unor dielectrici într-un câmp electric sau starea de polarizare magnetică a unor materiale într-un câmp magnetic.

Dacă vom considera că în domeniul D avem dispusă o sarcină continuă astfel că în elementul de volum $dv_{\boldsymbol{\xi}}$ centrat în $\boldsymbol{\xi}$ avem sarcina $\rho(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}}$, $\rho(\boldsymbol{\xi})$ fiind densitatea volumică a acestei sarcini, sarcina totală fiind $\int\limits_D \rho(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}}$, potenţialul într-un punct x al acestei sarcini va fi

$$U(\mathbf{x}) = \int\limits_D \rho(\boldsymbol{\xi}) \Omega(x, \xi) dv_{\boldsymbol{\xi}}.$$

O asemenea funcţie există ca integrală improprie şi în punctele domeniului D şi se numeşte *potenţial de volum cu densitatea volumică* $\rho(\boldsymbol{\xi})$. Ea este evident o funcţie armonică în punctele $\mathbf{x}$ care nu aparţin domeniului D. Din acest punct de vedere al densităţii volumice putem spune că o sarcină q în punctul ξ este dată de o densitate volumică $q\delta(x - \xi)$.

Considerăm că o sarcină continuă este suprapunerea unor sarcini punctiforme pentru că $\rho(\boldsymbol{\xi}) = \int_D \rho(\boldsymbol{\zeta})\delta(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\xi})dv_{\boldsymbol{\zeta}}$.

Fie acum o suprafaţă Σ netedă. Considerăm domeniul $D\varepsilon$ constituit din punctele situate la distanţă cel mult $\frac{\varepsilon}{2}$ de suprafaţa Σ de o parte şi de alta a sa. Considerăm că în punctele $\boldsymbol{\zeta}$ ale domeniului $D\varepsilon$ avem o sarcină cu densitatea volumică $\rho\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{\mu(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon}$ unde $\boldsymbol{\xi}$ este cel mai apropiat punct de pe Σ de $\boldsymbol{\zeta}$. Vom putea scrie că în punctele din exteriorul lui $D\varepsilon$ densitatea volumică este nulă. Dacă considerăm porţiunea din cilindrul care se sprijină pe elementul de arie $d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$ centrat în $\boldsymbol{\xi}$ conţinută în $D\varepsilon$ în această porţiune avem sarcina $\mu(\boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$. Pentru $\varepsilon \to 0$ putem evident spune că această sarcină este concentrată în elementul de arie $d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$. Dacă vom considera o funcţie oarecare $\varphi(\boldsymbol{\zeta})$ definită în întreg spaţiu vom putea scrie pentru integrala luată pe întreg spaţiul

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \varphi(\boldsymbol{\zeta})\rho\varepsilon(\boldsymbol{\zeta})dv_{\boldsymbol{\zeta}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D\varepsilon} \varphi(\boldsymbol{\zeta})\rho\varepsilon(\boldsymbol{\zeta})dv_{\boldsymbol{\zeta}} = \int_{\Sigma} \varphi(\boldsymbol{\xi})\mu(\boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

In particular pentru $\varphi(\boldsymbol{\zeta}) = 1$ vom găsi limita întregii sarcini $\int_{\Sigma} \mu(\boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$, adică regăsim că funcţia $\mu(\boldsymbol{\xi})$ poate fi considerată ca densitatea superficială a sarcinii limită. Limita densităţii $\rho\varepsilon(\boldsymbol{\zeta})$ în sensul obişnuit nu există, dar o putem considera în sensul distribuţiilor ca fiind o distribuţie delta pe suprafaţa Σ, $\mu(\boldsymbol{\xi})\delta_{\Sigma}$ caracterizată prin relaţia de filtrare valabilă pentru orice funcţie

$$\int \varphi(\boldsymbol{\zeta})\mu(\boldsymbol{\zeta})\delta_{\Sigma}dv_{\boldsymbol{\zeta}} = \int_{\Sigma} \varphi(\boldsymbol{\xi})\mu(\boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}},$$

integrala din stânga fiind luată pe tot spaţiul. Dacă vom considera un sistem de coordonate local cu originea în punctul $\boldsymbol{\xi}$ de pe Σ cu axa ξ_3 după normala la Σ atunci distribuţia $\mu(\boldsymbol{\xi})\delta_{\Sigma}$ va avea expresia $\mu(\boldsymbol{\xi})\delta(\xi_3)$. Potenţialul sarcinii limită de mai sus în punctele $\mathbf{x}$ neaparţinând lui Σ va fi

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \mu(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

O asemenea funcţie se numeşte *potenţial de simplu strat cu densitatea superficială* $\mu(\boldsymbol{\xi})$ şi este o funcţie armonică în toate punctele $\mathbf{x}$ neaparţinând lui Σ.

Fie din nou o suprafaţă Σ netedă. Considerăm domeniul $D\varepsilon$ constituit din punctele situate la distanţă cel mult ε de suprafaţa Σ de o parte şi de alta a sa. Considerăm că în punctele $\boldsymbol{\zeta}$ ale domeniului $D\varepsilon$ avem sarcină cu densitatea volumică $\rho\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{\mu(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon^2}$ unde $\boldsymbol{\xi}$ este cel mai apropiat punct de pe Σ de $\boldsymbol{\zeta}$ dacă $\boldsymbol{\zeta}$ este de acea parte în spre care este dirijată normala şi cu densitatea volumică $\rho\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) = -\frac{\mu(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon^2}$ dacă $\boldsymbol{\zeta}$ este de cealaltă parte. Vom putea scrie că în punctele din exteriorul lui $D\varepsilon$ densitatea volumică este nulă. Putem consideră că în porţiunea din cilindrul care se sprijină pe elementul de arie $d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$ centrat în $\boldsymbol{\xi}$ conţinută în $D\varepsilon$ avem un dipol cu momentul $\mu(\boldsymbol{\xi})\mathbf{n}\xi d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$. Dacă vom lua o funcţie $\varphi(\boldsymbol{\zeta})$ definită în întreg spaţiu vom putea scrie pentru integrala luată pe întreg spaţiul

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \varphi(\boldsymbol{\zeta})\rho\varepsilon(\boldsymbol{\zeta})dv_{\boldsymbol{\zeta}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D\varepsilon} \varphi(\boldsymbol{\zeta})\rho\varepsilon(\boldsymbol{\zeta})dv_{\boldsymbol{\zeta}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma}\left(\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{-\mu(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon^2}(\varphi(\boldsymbol{\xi}) + t\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}\xi} + o(t))dt + \int_{0}^{\varepsilon}\frac{\mu(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon^2}(\varphi(\boldsymbol{\xi}) + t\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}\xi} + o(t))dt\right)d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} =$$

$$= \int_{\Sigma}\mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}\xi}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Limita densităţii $\rho\varepsilon(\boldsymbol{\zeta})$ în sensul obişnuit nu există, dar o putem considera în sensul distribuţiilor ca fiind o distribuţie delta pe suprafaţa Σ, $-\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\mu(\boldsymbol{\zeta})\delta_\Sigma$ caracterizată prin relaţia de filtrare valabilă pentru orice funcţie

$$-\int\varphi(\boldsymbol{\zeta})\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\mu(\boldsymbol{\zeta})\delta_\Sigma dv_{\boldsymbol{\zeta}} = \int_\Sigma \mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}\xi}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Dacă vom considera un sistem de coordonate local cu originea în punctul $\boldsymbol{\xi}$ de pe Σ cu axa ξ_3 după normala la Σ atunci distribuţia $-\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\mu(\boldsymbol{\zeta})\delta_\Sigma$ va avea expresia $\mu(\boldsymbol{\xi})\delta'(\xi_3)$.Potenţialul sarcinii limită de mai sus în punctele $\mathbf{x}$ neaparţinând lui Σ va fi

$$U(\mathbf{x}) = \int_\Sigma \mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial\mathbf{n}\xi}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

O asemenea funcţie se numeşte *potenţial de dublu strat cu densitatea superficială* $\mu(\boldsymbol{\xi})$ şi este o funcţie armonică în toate punctele $\mathbf{x}$ neaparţinând lui Σ.

Fie $U(\mathbf{x})$ o funcţie armonică în domeniul D şi fie $\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}$ potenţialul unei surse unitate plasate în punctul $\boldsymbol{\xi}$ din domeniul D. Ultima funcţie este armonică în domeniul D, exceptând punctul $\boldsymbol{\xi}$. Aplicăm formula lui Green funcţiilor $U(\mathbf{x}), \Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ în coroana sferică D_{R_1,R_2} cu centrul în $\boldsymbol{\xi}$ cu razele R_1, R_2, conţinută în D:

$$\iint\limits_{\partial D_{R_1,R_2}} \left(U(\mathbf{x}) \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\mathbf{x}e}} - \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n_{\mathbf{x}e}} \right) d\sigma_{\mathbf{x}} =$$

$$= \iint\limits_{S_{R_2}} \left(U(\mathbf{x}) \frac{1}{4\pi R_2} - \frac{1}{4\pi R_2} \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n_{\mathbf{x}e}} \right) d\sigma_{\mathbf{x}} -$$

$$- \iint\limits_{S_{R_1}} \left(U(\mathbf{x}) \frac{1}{4\pi R_1} - \frac{1}{4\pi R_1} \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n_{\mathbf{x}e}} \right) d\sigma_x = 0,$$

sau ţinând cont de proprietatea derivatei normale aplicată funcţiei U:

$$\frac{1}{4\pi R_2^2} \iint\limits_{S_{R_2}} U(x) d\sigma_x = \frac{1}{4\pi R_1^2} \iint\limits_{S_{R_1}} U(x) d\sigma_{\mathbf{x}}.$$

Făcând $R_1 \to 0$, avem

$$U(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S_R} U(\mathbf{x}) d\sigma_x,$$

S_R fiind o sferă cu centrul în $\boldsymbol{\xi}$, conţinută în D. Relaţia fiind valabilă pentru $r \leq R$ putem scrie

$$U(\boldsymbol{\xi}) r^2 = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|=r} U(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}}$$

şi integrând între 0 şi R avem

$$U(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\frac{4\pi R^3}{3}} \iiint\limits_{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}| \leq R} U(\mathbf{x}) dv_{\mathbf{x}}$$

Am obţinut deci proprietatea de medie a lui Gauss pentru funcţii armonice de trei variabile: valoarea unei funcţii armonice într-un punct este media valorilor pe orice sferă sau în orice sferă cu centrul în punct conţinută în domeniul de armonicitate.

Din proprietatea de medie se deduce proprietatea de maxim şi minim: Dacă funcţia $U(\mathbf{x})$ este armonică în domeniul D ea nu-şi poate atinge nicăieri în interiorul domeniului cea mai mică şi cea mai mare valoare cu excepţia cazului când este constantă. Intr-adevăr, să presupunem că o funcţie armonică în D şi-ar atinge valoarea maximă într-un punct $\boldsymbol{\xi}$ interior lui D: oricare ar fi $\mathbf{x}$ în D, $U(\mathbf{x}) \leq U(\boldsymbol{\xi})$. $\boldsymbol{\xi}$ fiind interior lui D există o sferă S_R cu cemtrul în $\boldsymbol{\xi}$ de rază R conţinută în D. Dacă pe această sferă ar exista un punct $\mathbf{x}^*$ astfel că $U(\mathbf{x}^*) < U(\boldsymbol{\xi})$ atunci ar exista o întreagă porţiune S_R' pe sferă cu această proprietate. Aplicând proprietatea de medie avem

$$U(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi R^2}\left(\iint\limits_{S_R'} U(\mathbf{x})d\sigma_{\mathbf{x}} + \iint\limits_{S_R - S_R'} U(\mathbf{x})d\sigma_x\right) <$$

$$< \frac{1}{4\pi R^2}\left(U(\boldsymbol{\xi})aria(S_R') + U(\boldsymbol{\xi})\,\text{aria}(S_R - S_R')\right) = U(\boldsymbol{\xi})$$

Rezultă că pe întreaga sferă S_R, şi în interiorul său, funcţia U este constantă. Procedând ca la demonstraţia principiului pentru funcţii armonice în plan deducem că funcţia U este constantă în D.

Principiul de maxim şi minim este echivalent cu afirmaţia că dacă m şi M sunt valorea minimă, respectiv maximă a lui U pe frontiera domeniului mărginit D, atunci pentru orice punct $\mathbf{x}$ din D are loc inegalitatea $m \leq U(\mathbf{x}) \leq M$. Această afirmaţie rezultă uşor şi altfel: dacă ar exista un punct interior $\boldsymbol{\xi}$ unde funcţia ar avea un maxim $M^* > M$, luând pe $\boldsymbol{\xi}$ ca origine, posibil totdeauna, vom considera funcţia

$$U^*(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) + \frac{M^* - M}{2d^2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$$

unde am notat cu d diametrul domeniului D. In $\boldsymbol{\xi}$ avem $U^*(\boldsymbol{\xi}) = M^*$, în timp ce pe frontiera lui D avem $U^*(\mathbf{x}) \leq M + \frac{1}{2}(M^* - M) < M^*$, deci există un punct de maxim local al lui U^* în interiorul lui D. In acest punct vom avea

$$\frac{\partial U^*}{\partial x_1} = \frac{\partial U^*}{\partial x_2} = \frac{\partial U^*}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 U^*}{\partial x_1^2} \leq 0, \frac{\partial^2 U^*}{\partial x_2^2} \leq 0, \frac{\partial^2 U^*}{\partial x_3^2} \leq 0$$

contradicţie cu faptul că în acel punct $\Delta U^* = \frac{2(M^* - M)}{d^2} > 0$.

In cazul domeniilor D nemărginite proprietatea de mai sus are loc dacă funcţia $u(\mathbf{x})$ este armonică în D, este continuă în închiderea lui D şi are loc proprietatea $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty} u(\mathbf{x}) = 0$.

In adevăr, dacă $\boldsymbol{\xi}$ este un punct oarecare din domeniul D nemărginit considerăm sfera D_R cu centrul în $\boldsymbol{\xi}$ de rază R. Considerând funcţia $u(\mathbf{x})$ în intersecţia $D \cap D_R$ vom putea scrie

$$m - \varepsilon(R) \leq u(\boldsymbol{\xi}) \leq M + \varepsilon(R)$$

unde $\varepsilon(R)$ este maximul modulului funcţiei $u(\mathbf{x})$ pe acea porţiune a frontierei lui D_R care se găseşte în D. Făcând $R \to \infty$ rezultă proprietatea.

Din ultima proprietate, rezultă că dacă două funcţii armonice continue în închiderea lui D coincid pe frontiera lui D, atunci cele două funcţii coincid în D. Altfel spus, dacă problema lui Dirichlet are soluţie pentru date continue pe frontieră, atunci soluţia este unică. In cazul domeniilor nemărginite mai trebuie impusă condiţia ca la infinit funcţia să tindă către zero.

14.15 Transformarea lui Kelvin

In cazul funcţiilor armonice de două variabile ne-am putut folosi de teoria funcţiilor olomorfe, în particular am vazut că printr-o transformare conformă o funcţie armonică se transformă tot într-o funcţie armonică. O funcţie armonică într-un domeniu plan care conţine originea planului $z = x + iy$ se transformă prin transformarea conformă $\zeta = \frac{1}{z}$ într-o funcţie armonică într-un domeniu care conţine punctul de la infinit din planul $\zeta = \xi + i\eta$ care va fi mărginită la infinit. Am mai întâlnit această condiţie. De aici rezultă că o funcţie armonică de două variabile mărginită la infinit are derivatele în orice direcţie tinzând către zero cel puţin ca $\frac{1}{|z|^2}$.

In cazul funcţiilor armonice de trei variabile nu mai avem aparatul funcţiilor olomorfe, dar avem o transformare punctuală numită *transformarea lui Kelvin* care are aceeaşi proprietate: dacă $U(\mathbf{x})$ este o funcţie armonică într-un domeniu D atunci funcţia

$$V(\mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x}'|}u(\frac{x_1'}{r'^2}, \frac{x_2'}{r'^2}, \frac{x_3'}{r'^2}), r'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2,$$

va fi armonică în domeniul D'care se obţine din D prin transformarea

$$x_1' = \frac{x_1}{r^2}, x_2' = \frac{x_2}{r^2}, x_3' = \frac{x_3}{r^2}, r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Notăm că $rr' = 1$, adică transformarea este de fapt inversiunea faţă de sfera unitate. Dacă în coordonate sferice funcţia U este $U(r, \theta, \varphi)$, funcţia v este

$$V(r', \theta, \varphi) = \frac{1}{r'}U(\frac{1}{r'}, \theta, \varphi).$$

Cum

$$\triangle_{r,\theta,\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

şi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r'^2} + \frac{2}{r'}\frac{\partial v}{\partial r'} = r^5 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

rezultă

$$\triangle_{r',\theta,\varphi} V = r^5 \triangle_{r,\theta,\varphi} U$$

ceea ce confirmă afirmaţia de mai sus. Evident rezultatul nu se modifică dacă se consideră în locul sferei unitate o sferă oarecare.

Dacă $U(\mathbf{x})$ este o funcţie armonică în vecinătatea originii O a spaţiului, prin transformarea lui Kelvin obţinem funcţia $V(\mathbf{x}')$ armonică în vecinătatea punctului de la infinit. In plus produsele $r'V(\mathbf{x}')$, $r'^2\frac{\partial V}{\partial x_1'}$, $r'^2\frac{\partial V}{\partial x_2'}$, $r'^2\frac{\partial V}{\partial x_3'}$ rămân mărginite pentru $r' \to \infty$. Invers dacă avem o funcţie $U(\mathbf{x})$ armonică în vecinătatea punctului de la infinit şi astfel că produsul $rU(\mathbf{x})$ să rămână mărginit pentru $r \to \infty$, prin transformarea lui Kelvin obţinem funcţia $V(\mathbf{x}') = \frac{1}{r'}U(\mathbf{x})$ care va fi armonică în vecinătatea originii. Din raţionamentul de mai înainte rezultă că produsele $r^2\frac{\partial v}{\partial x}$, $r^2\frac{\partial v}{\partial y}$, $r^2\frac{\partial v}{\partial z}$ rămân mărginite pentru $r \to \infty$.

Ne convingem uşor că chiar dacă impunem numai ca funcţia armonică în vecinătatea lui infinit să aibă numai limită nulă la infinit ea va avea neapărat proprietăţile de mai sus. O funcţie care este armonică în vecinătatea punctului de la infinit cu limită nulă la infinit se numeşte *regulată la infinit*. In plan o funcţie armonică în vecinătatea punctului de la infinit se numeşte *regulată la infinit* dacă ea are la infinit o limită finită.

In problemele lui Dirichlet şi Neuman pentru domenii nemărginite se caută soluţii regulate la infinit.

In plan în problema lui Neuman

$$\begin{aligned} \triangle u(P) &= 0, P \in D^-, \\ u(P)|_{P\in\partial D} &= \varphi(P) \end{aligned}$$

pentru D^- exteriorul unui domeniu D este necesară condiţia $\int\limits_{\partial D} f(p)ds_P = 0$ care rezultă din aplicarea proprietăţii derivatei normale a funcţiilor armonice pentru domeniul mărginit de ∂D şi un cerc cu centrul în origine de rază foarte mare R şi făcând $R \to \infty$. Integrala pe cerc tinde la zero pentru că $\frac{\partial u}{\partial n}$ se comportă ca $\frac{1}{R^2}$ iar lungimea cercului este $2\pi R$. Odată îndeplinită această condiţie problema lui Neuman pentru exteriorul domeniului plan are soluţie unică abstracţie făcând de o constantă.

In cazul problemei lui Neuman pentru exteriorul unui domeniu spaţial nu mai este necesară condiţia verificată de date pe frontieră pentru că nu mai putem aplica procedeul de mai sus: derivata $\frac{\partial u}{\partial n}$ a unei funcţii armonice regulate la infinit se comportă ca $\frac{1}{R^2}$ iar aria sferei este $4\pi R^2$. Dar dacă se cere soluţia problemei lui Neuman exterioare înţelegând prin aceasta soluţia regulată la infinit, aceasta este unică pentru că în acest caz este valabilă formula

$$\iiint\limits_{D^-} (\operatorname{grad} u)^2 d\sigma = \iint\limits_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

14.16 Formula de reprezentare prin potenţiali

Fie acum $U(\boldsymbol{\xi})$ o funcţie cu derivate parţiale de ordinul doi continue în D. Să aplicăm formula lui Green funcţiei $U(\boldsymbol{\xi})$ şi funcţiei $V(\boldsymbol{\xi}) = \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x}$ un punct arbitrar în D, luând ca domeniu $D - S\varepsilon$ domeniul D din care scoatem o sferă $S\varepsilon$ cu centrul în $\mathbf{x}$ de rază ε . Avem

$$\iiint\limits_{D-S\varepsilon} \left(U(\boldsymbol{\xi})\Delta\Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Delta U\right) dv\xi =$$

$$= \iint\limits_{\partial D} \left(U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} - \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} \right) d\sigma\xi -$$

$$- \iint\limits_{\partial S\epsilon} \left(U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} - \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)) \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$$

Ţinând cont că pe $\partial S\varepsilon\ \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$, $\frac{\partial\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$ şi că în $D - S\varepsilon\ \Delta_{\boldsymbol{\xi}}\Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) = 0$, rezultă

$$- \iiint\limits_{D-S\varepsilon} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Delta U dv_{\boldsymbol{\xi}} = \iint\limits_{\partial D} \left(U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} - \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint\limits_{S\varepsilon} U(\boldsymbol{\xi}) d\sigma\xi - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint\limits_{S\varepsilon} \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Trecând la limită $\varepsilon \to 0$

$$- \iiint\limits_{D} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Delta U dv_{\boldsymbol{\xi}} =$$

$$= \iint\limits_{\partial D} \left(U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} - \Omega\left(x, \xi\right) \frac{\partial U(\xi)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} \right) d\sigma\xi + U(\mathbf{x}).$$

Deci

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= -\iint\limits_{\partial D} \left(U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} - \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} - \\ &\quad - \iiint\limits_{D} \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \Delta_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned}$$

Această egalitate, numită *identitatea sau formula lui Poisson de reprezentare prin potenţiali*, arată că orice funcţie cu derivate de ordinul doi continue în $D+\partial D$ este suma valorilor a trei funcţii:

a) funcţia $U_1(\mathbf{x}) = \iint\limits_{\partial D} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\xi}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$, *un potenţial de simplu strat cu densitatea superficială* $\frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\xi}}$.

b) funcţia $U_2(\mathbf{x}) = -\iint\limits_{\partial D} U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\xi}} d\sigma\xi$, *un potenţial de dublu strat cu densitatea superficială* $-U(\boldsymbol{\xi})$.

c) funcţia $U_3(\mathbf{x}) = -\iiint\limits_{D} \Delta_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) dv_{\boldsymbol{\xi}}$, *un potenţial de volum cu densitatea volumică* $-\Delta_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi})$.

Vom observa că formula lui Poisson are loc şi dacă considerăm punctul $\mathbf{x}$ pe frontiera domeniului D cu condiţia ca în loc de $U(\mathbf{x})$ să considerăm $\frac{1}{2}U(\mathbf{x})$ şi să considerăm integralele pe frontieră în valoare principală. (Nu avem decât să înconjurăm punctul cu o "semisferă" când suprafaţa ∂D este netedă).

14.17 Integrala lui Gauss

Dacă luăm în formula de reprezentare $U(\mathbf{x}) = 1$ avem valoarea aşa numitei *integrale a lui Gauss*

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = \begin{cases} -1 & pentru \quad x \in D \\ -\frac{1}{2} & pentru \quad x \in \partial D \\ 0 & pentru \quad x \notin D \cup \partial D. \end{cases}$$

14.18 Funcţiile Green

Considerăm din nou formula lui Poisson de reprezentare prin potenţiali a unei funcţii $U(\mathbf{x})$ de două ori derivabilă în domeniul D

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= -\iint\limits_{\partial D} \left(U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} - \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} - \\ &\quad - \iiint\limits_{D} \Omega\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \Delta_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned}$$

Fie $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ o funcţie armonică în $\boldsymbol{\xi}$ pentru orice $\mathbf{x}$. Din formula de reciprocitate a lui Green aplicată funcţiilor $U(\boldsymbol{\xi})$ şi $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ avem

$$\begin{aligned} 0 &= -\iint\limits_{\partial D} \left(U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial g\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} - g\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} - \\ &\quad - \iiint\limits_{D} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \triangle_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned}$$

Adunând cele două relaţii şi notând

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$$

avem

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= -\iint\limits_{\partial D} \left(U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} - G\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} - \\ &\quad - \iiint\limits_{D} G\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \Delta_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned}$$

Dacă funcţia armonică $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ este astfel încât $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|_{\boldsymbol{\xi} \in \partial D} = 0$ atunci avem

$$U(\mathbf{x}) = -\iint\limits_{\partial D} U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right)}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_Q - \iiint\limits_{D} G\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \Delta_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}},$$

adică putem găsi soluţia problemei lui Dirichlet pentru ecuaţia lui Poisson

$$\begin{aligned} \triangle_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) &= f(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \in D, \\ & U(\boldsymbol{\xi})_{\boldsymbol{\xi} \in \partial D} = \varphi(\boldsymbol{\xi}).| \end{aligned}$$

Funcţia $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ se numeşte *funcţia de sursă* sau *funcţia lui Green* pentru problema lui Dirichlet pentru domeniul D. Se poate arăta că ea este simetrică în cele două puncte

$\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$. Ea poate fi interpretată ca potenţialul unei surse electrice unitate plasate în punctul $\mathbf{x}$ din interiorul unui dielectic limitat de frontiera conductoare ∂D legată la pământ.

Pentru a rezolva problema lui Neumann pentru ecuaţia lui Poisson ar trebui să alegem funcţia armonică $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ astfel încât $\left.\frac{\partial G(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}\in\partial D} = 0$, dar asta este imposibil pentru că oricum avem $\iint\limits_{\partial D} \frac{\partial G(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 1$. Vom alege funcţia armonică $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ astfel încât $\left.\frac{\partial G(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}\in\partial D} = k = const.$ Aceasta înseamnă să rezolvăm o problema a lui Neumann pentru funcţia armonică $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ cu datele $k - \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. Cum trebuie să avem $\iint\limits_{\partial D} (k - \frac{\partial \Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = k\Sigma - 1 = 0$ trebuie să alegem $k = \frac{1}{\Sigma}$ unde Σ este aria frontierei ∂D. Cu această alegere putem scrie

$$U(x) = \iint\limits_{\partial D} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} - \iiint\limits_{D} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Delta_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{\Sigma} \iint\limits_{\partial D} U(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$$

adică putem rezolva problema lui Neumann pentru ecuaţia lui Poisson

$$\begin{aligned} \triangle \xi U(\boldsymbol{\xi}) &= f(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \in D, \\ & \left. \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} |_{\boldsymbol{\xi}\in\partial D} = \varphi(\boldsymbol{\xi}) \right| \end{aligned}$$

această soluţie fiind determinată abstracţie făcând de o constantă. Funcţia $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ astfel determinată se numeşte *funcţia lui Green pentru problema lui Neumann* pentru domeniul D.

Pentru unele domenii simple funcţiile lui Green pot fi găsite prin aşa numita metodă a imaginilor. Considerăm cazul în care domeniul D este o sferă de rază R cu centrul în originea $\mathbf{0}$ a sistemului de coordonate. Dacă $\mathbf{x}$ este un punct oarecare în spaţiu vom nota prin $\mathbf{x}^*$ inversul său în raport cu sfera, adică acel punct situat pe aceeaşi rază vectoare cu $\mathbf{x}$ astfel încât $|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{x}^*| = R^2$. Este evident că $(\mathbf{x}^*)^* = \mathbf{x}$, adică inversul inversului unui punct iniţial coincide cu punctul iniţial. Fie prin calcul direct, fie pe cale geometrică se verifică relaţia valabilă pentru două puncte oarecare $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}^* - \mathbf{x}^*|} = \frac{|\mathbf{x}||\boldsymbol{\xi}|}{R^2} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|},$$

In particular luând $\boldsymbol{\xi}^*$ în loc de $\boldsymbol{\xi}$ vom avea

$$\frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}^*|} = \frac{|\mathbf{x}||\boldsymbol{\xi}^*|}{R^2} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}^* - \mathbf{x}|}.$$

Dacă $\boldsymbol{\xi} \in \partial D$ atunci $\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}$ şi deci

$$\left.\frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}^*|}\right|_{\boldsymbol{\xi}\in\partial D} = \frac{|\mathbf{x}|}{R} \left.\frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|}\right|_{\boldsymbol{\xi}\in\partial D}.$$

Rezultă că dacă punem

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|} - \frac{R}{|\mathbf{x}|}\frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}^*|}\right)$$

atunci aceasta va fi o funcţie armonică în $\boldsymbol{\xi}$ în sfera D, funcţie care pe frontieră se anulează. Deci pentru a obţine o funcţie care se anulează pe frontieră este suficient ca sursei unitate din punctul $\mathbf{x}$ să-i adăugăm o sursă de intensitate $\frac{-R}{|\mathbf{x}|}$ în inversul $\mathbf{x}^*$ al lui $\mathbf{x}$.

Dacă notăm cu $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ unghiul dintre razele vectoare x, ξ atunci avem

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| &= \sqrt{|\mathbf{x}|^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2 - 2|\mathbf{x}||\boldsymbol{\xi}|\cos\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \\
|\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\xi}| &= \frac{|\mathbf{x}|}{R}\sqrt{R^2 + \frac{|\mathbf{x}|^2|\boldsymbol{\xi}|^2}{R^2} - 2|\mathbf{x}||\boldsymbol{\xi}|\cos\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}
\end{aligned}$$

şi deci

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2 - 2|\mathbf{x}||\boldsymbol{\xi}|\cos\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{|\mathbf{x}|^2|\boldsymbol{\xi}|^2}{R^2} - 2|\mathbf{x}||\boldsymbol{\xi}|\cos\varphi(P, Q)}}\right).
\end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}}\right|_{\boldsymbol{\xi}\in\partial D} &= \left.\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial |\xi|}\right|_{\boldsymbol{\xi}\in\partial D} = \\
&= -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{\left(R^2 + |\mathbf{x}|^2 - 2R|\mathbf{x}|\cos\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Rezultă că soluţia problemei lui Dirichlet pentru funcţii armonice pentru sfera D

$$\begin{aligned}
\triangle U(\boldsymbol{\xi}) &= 0, \boldsymbol{\xi} \in D, \\
U(\boldsymbol{\xi})|_{\boldsymbol{\xi}\in\partial D} &= \Phi(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}$$

trebuie să fie de forma

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{\partial D} \Phi(\boldsymbol{\xi})\frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{\left(R^2 + |\mathbf{x}|^2 - 2R|\mathbf{x}|\cos\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\right)^{3/2}}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Se poate arăta că în adevăr această formulă numită f*ormula lui Poisson de rezolvare a problemei lui Dirichlet* pentru sferă rezolvă efectiv problema.

Este clar că procedeul de mai sus se poate aplica şi în cazul funcţiilor de două variabile. Pentru cercul D cu centrul în origine de rază R vom fi conduşi să luăm funcţia lui Green pentru problema lui Dirichlet sub forma

$$G(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}-\ln\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}^*|}+\ln\frac{|\mathbf{x}|}{R}\right)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\xi-x^*||\mathbf{x}|}{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|R}.$$

Dacă trecem la afixele punctelor vom avea

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^*-\zeta||z|}{R|z-\zeta|}=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{R^2-\overline{z}\zeta}{R(\zeta-z)}\right|.$$

Dacă $\zeta=\rho e^{i\theta}, z=re^{i\varphi}$ atunci

$$\left.\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_{e\zeta}}\right|_{\zeta\in\partial D}=\left.\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial\rho}\right|_{\zeta\in\partial D}=\frac{1}{2\pi}\Re e\left\{e^{i\theta}\frac{d}{d\zeta}\ln\frac{R^2-\overline{z}\zeta}{R(\zeta-z)}\right\}=$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2\pi}\Re e\left\{e^{i\theta}\left(\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{R^2-\overline{z}\zeta}\right)\right\}=\\&=\frac{R^2-r^2}{2\pi R(R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta))}\end{aligned}$$

Deci soluţia problemei lui Dirichlet pentru funcţii armonice pentru cerc ar trebui să fie

$$U(z)=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\Phi(R\,e^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}d\theta,$$

adică abstracţie făcând de notaţii am regăsit formula lui Poisson de rezolvare a problemei lui Dirichlet pentru funcţii armonice pentru cerc.

14.19 Proprietăţi ale potenţialului de volum

Proprietatea 1. Să presupunem că funcţia $U(\boldsymbol{\xi})$ este o funcţie definită în întreg spaţiul cu derivate de ordinul doi continue în întreg spaţiul şi astfel încât pe orice sferă cu centrul în origine de rază R să aibă loc relaţii de forma

$$|gradU|<\frac{M}{R^{1+\lambda}},|U|<\frac{M}{R\lambda}$$

unde λ este un număr pozitiv. Scriind formula de reprezentare a lui Poisson pentru domeniul D_R mărginit de o asemenea sferă vom avea

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= -\iint\limits_{\partial D_R} \left(U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} - \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{e\boldsymbol{\xi}}} \right) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} - \\ & - \iiint\limits_{D_R} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Delta_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) dv\xi \end{aligned}$$

şi cum evident pentru $\mathbf{x}$ fixat $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}{R} = 1$ vom avea

$$\begin{aligned} \left| \iint\limits_{\partial D_R} \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right| &< \frac{R^2 M}{R R^{1+\lambda}}; \\ \left| \iint\limits_{\partial D_R} U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \right| &< \frac{R^2 M}{R^2 R\lambda}. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\lim_{R\to\infty} \iint\limits_{\partial D_R} \frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{\partial D_R} U(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} d\sigma\xi = 0$$

şi deci formula de reprezentare devine

$$U(\mathbf{x}) = -\lim_{R\to\infty} \iiint\limits_{D_R} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Delta_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}} = -\iiint\limits_{R^3} \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Delta_{\boldsymbol{\xi}} U(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}}$$

ultima integrală fiind extinsă la tot spaţiul.

Proprietatea 2. Fie acum $\rho(\boldsymbol{\xi})$ o funcţie definită pe un domeniu mărginit sau nemărginit D astfel încât să existe potenţialul de volum $U(\mathbf{x}) = \int\limits_D \rho(\boldsymbol{\xi})\Omega(x, \xi) dv_{\boldsymbol{\xi}}$. Acesta este evident o funcţie armonică în exteriorul lui D.

Proprietatea 3. Fie acum $\rho(\boldsymbol{\xi})$ o funcţie definită şi cu derivate de primul ordin continue pe un domeniu mărginit D. Fie potenţialul de volum $U(\mathbf{x}) = \int\limits_D \rho(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dv\xi$. Pentru $\mathbf{x}$ chiar în interiorul lui D putem deriva în raport cu variabilele lui $\mathbf{x}$ sub integrală obţinând

$$grad_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_D \rho(\boldsymbol{\xi}) grad_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dv_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_D \rho(\boldsymbol{\xi}) \frac{\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|^3} dv_{\boldsymbol{\xi}}$$

pentru că ultima integrală este convergentă, sub integrală fiind un infinit de ordin mai mic ca trei. Nu mai putem deriva mai departe pentru că se obţin integrale divergente.

Ca să calculăm laplaceanul funcţiei $U(\mathbf{x})$ într-un punct $\mathbf{x}$ interior lui D vom considera un domeniu d care conţine pe $\mathbf{x}$ în interior şi care este complet conţinut în D. Vom putea scrie

$$\int\limits_{\partial d} \frac{\partial U(\boldsymbol{\zeta})}{\partial n_{\zeta}} d\sigma_{\zeta} = \int\limits_{\partial d} \int\limits_{\partial D} \rho(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\zeta}} dv_{\boldsymbol{\xi}} d\sigma_{\zeta} = \int\limits_{\partial D} \rho(\boldsymbol{\xi}) \int\limits_{\partial d} \frac{\partial \Omega(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\zeta}} d\sigma_{\zeta} dv_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Integrala interioară este egală cu -1 pentru $\boldsymbol{\xi}$ în interiorul lui d şi cu 0 în exteriorul lui d. Deci

$$\int\limits_{\partial d} \frac{\partial U(\boldsymbol{\zeta})}{\partial n_{\zeta}} d\sigma_{\zeta} = -\int\limits_{d} \rho(\boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Trecând la limită astfel ca domeniul d să se strângă la x avem

$$\lim_{d \to x} \frac{\int\limits_{\partial d} \frac{\partial U(\zeta)}{\partial n_{\zeta}} d\sigma_{\zeta}}{\operatorname{vol}(d)} = -\rho(\mathbf{x})$$

adică obţinem teorema:

Teorema 1. Un potenţial de volum $U(\boldsymbol{\xi})$ cu o densitate $\rho(\boldsymbol{\xi})$ continuă pe un domeniu mărginit D este o funcţie armonică în exteriorul domeniului D şi satisface ecuaţia lui Poisson $\Delta_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})$ în interiorul domeniului D .

Acum putem găsi soluţia ecuaţiei lui Poisson $\Delta_{\mathbf{x}} U(P) = -\rho(\mathbf{x})$ în întreg spaţiu dacă funcţia $\rho(\mathbf{x})$ are derivate parţiale de ordinul întâi continue în întreg spaţiul şi pe orice sferă de rază R cu centrul în origine are loc relaţia $\left|R^{2+\lambda}\rho(\mathbf{x})\right| < M$ cu $0 < \lambda < 1$. După proprietatea 1., soluţia nu poate să fie decât potenţialul de volum cu densitatea $\rho(\boldsymbol{\xi})$

$$U(\mathbf{x}) = \int\limits_{R^3} \rho(\boldsymbol{\xi}) \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Aceasta este soluţie pentru că dacă luăm un punct $\mathbf{x}$ fixat şi notăm cu D_1 o vecinătate a lui $\mathbf{x}$ şi cu D_2 restul spaţiului putem scrie

$$U(\mathbf{x}) = U_1(\mathbf{x}) + U_2(\mathbf{x}) = \int\limits_{D_1} \rho(\boldsymbol{\xi}) \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}} + \int\limits_{D2} \rho(\boldsymbol{\xi}) \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}}$$

şi evident $\Delta_{\mathbf{x}} U_1(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})$ după proprietatea 3. şi $\Delta_{\mathbf{x}} U_2(\mathbf{x}) = 0$ după proprietatea 2.

Am obţinut teorema

Teorema 2. Soluţia ecuaţiei lui Poisson $\Delta_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})$ în întreg spaţiu, unde funcţia $\rho(\mathbf{x})$ este continuă în întreg spaţiul şi pe orice sferă de rază R cu centrul în origine are loc relaţia $\left|R^{2+\lambda}\rho(\mathbf{x})\right| < M$ cu $0 < \lambda < 1$, este potenţialul de volum cu densitatea $\rho(\mathbf{x})$, $U(\mathbf{x}) = -\int\limits_{R^3} \rho(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})dv\xi$.

Câmpul electric al unor sarcini electrice $q_1, q_2, \cdots, q_n$ situate în punctele $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ în vid are, conform legii lui Coulomb, potenţialul

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q_1\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_1) + q_2\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_2) + \cdots q_n\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_n)\right),$$

ε_0 fiind o constanta dielectrică a mediului, care depinde de sistemul de unităţi. Câmpul electric al unei distribuţii continue de sarcini cu densitatea $\rho(\boldsymbol{\xi})$ în vid are potenţialul

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{R^3} \rho(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})dv_{\boldsymbol{\xi}}$$

şi după cele demonstrate avem

$$\Delta_{\mathbf{x}}u(P) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{x}).$$

Aceasta este aşa numita *teoremă a lui Gauss relativă la câmpul electric*. In ce priveşte intensitatea câmpului avem

$$rot_{\mathbf{x}}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0, div_{\mathbf{x}}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{x}),$$

adică câmpul electric staţionar este irotaţional şi are surse.

Câmpul unei distribuţii continue de dipoli cu momentele $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})$ va avea potenţialul

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{D} \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})grad_{\boldsymbol{\xi}}\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})dv_{\boldsymbol{\xi}} =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{D} div_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})dv_{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{D} div_{\boldsymbol{\xi}}\left(\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\right)dv_{\boldsymbol{\xi}} =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{D} div_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})dv_{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{\partial D} \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$$

ultima integrală dispărând dacă $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})\left|_{\boldsymbol{\xi}\in\partial D}\right. = 0$ în cazul domeniului mărginit sau dacă $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})$ tinde suficient de repede către zero la mari distanţe în cazul domeniului nemărginit. Deci putem spune că dacă există atât surse electrice cu densitatea $\rho(\boldsymbol{\xi})$ cât şi dipoli electrici cu momentul sau, cum se mai zice, cu polarizarea $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})$, cum se poate presupune în cazul dielectricilor, potenţialul câmpului este dat de

$$u(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_D \left(\rho(\boldsymbol{\xi}) - div_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})\right) \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dv\xi,$$

şi deci pentru întensitatea câmpului $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -grad_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})$ vom avea

$$div_{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho(\mathbf{x}) - div_{\mathbf{x}} \mathbf{P}(\mathbf{x})\right)$$

şi avem deci

$$div_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}).$$

Vectorul $D(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{x})$ se numeşte *vectorul inducţiei câmpului electric în dielectrici.*

Se constată că puţini dielectrici au o polarizare permanentă şi că pentru majoritatea polarizarea apare în prezenţă câmpului electric, adică în cazul dielectricilor omogeni şi izotropi vom putea scrie în aproximaţia lineară

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{x}),$$

χ fiind *susceptivitatea dielectricului.* Dacă punem $\varepsilon_r = 1 + \chi$ vom putea scrie $\mathbf{D} = \varepsilon_r \mathbf{E}$ şi vom obţine legile fundamentale ale electrostaticii:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \operatorname{rot} \mathbf{D} = 0, \mathbf{D} = \varepsilon_r \mathbf{E}.$$

ε_r este *permitivitatea electrică relativă* a mediului.

Prin conductori în electrostatică se înţeleg acele materiale în care câmpul electric este nul, adică cele în care permitivitatea electrică relativă este infinită.

Consideraţii analoage se pot face în ce priveşte câmpul magnetostatic, cu deosebirea că nu există sarcini magnetice, că poate exista polarizare magnetică permanentă, că polarizarea magnetică depinde mult mai complicat de intensitatea câmpului magnetic. In aproximaţia lineară legile fundamentale ale magnetostaticii vor fi

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

unde $\mathbf{B}$ este inducţia magnetică, $\mathbf{H}$ intensitatea câmpului magnetic, μ permeabilitatea magnetică a mediului.

14.20 Proprietăţile potenţialilor de simplu şi dublu strat

O suprafaţă S se numeşte *suprafaţă de tipul lui Liapunov* dacă satisface următoarele trei condiţii:

1. In orice punct $\boldsymbol{\zeta}$ al suprafeţei există planul tangent.

2. Există un număr $d > 0$ astfel încât, dacă $\boldsymbol{\zeta}$ este un punct pe suprafaţă orice sferă cu centrul în $\boldsymbol{\zeta}$ şi raza mai mică decât d, sfera lui Liapunov a punctului $\boldsymbol{\zeta}$, împarte suprafaţa în două porţiuni, una în interiorul sferei şi alta în afara ei; dreptele paralele cu normala cu normala la S în $\boldsymbol{\zeta}$ taie porţiunea din interiorul sferei în cel mult un singur punct. Numărul d se numeşte *raza sferei lui Liapunov.*

3. In orice punct $\boldsymbol{\zeta}$ se poate alege un sistem rectangular de coordonate local $\boldsymbol{\zeta}\xi_1\xi_2\xi_3$, astfel că versorul lui $\boldsymbol{\zeta}\xi_3$ este versorul normalei $\mathbf{n}\zeta$, iar planul $\boldsymbol{\zeta}\xi_1\xi_2$ este planul tangent la suprafaţă în $\boldsymbol{\zeta}$. Porţiunea de suprafaţă cuprinsă în interiorul sferei lui Liapunov are o ecuaţie de forma $\xi_3 = \varphi(\xi_1, \xi_2)$ unde funcţia $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ are derivatele după orice direcţie $\mathbf{t}$ din planul tangent funcţii hölderiene, adică există constantele $a > 0$, $\alpha \leq 1$ astfel încât

$$\left|\frac{\partial\varphi(\xi_1', \xi_2')}{\partial\mathbf{t}} - \frac{\partial\varphi(\xi_1'', \xi_2'')}{\partial\mathbf{t}}\right| \leq a\left[(\xi_1' - \xi_1'')^2 + (\xi_2' - \xi_2'')^2\right]^{\alpha/2}$$

pentru orice două puncte din interiorul sferei lui Liapunov a lui $\boldsymbol{\zeta}$.

Dacă $\boldsymbol{\xi}$ este un alt punct pe suprafaţă în interiorul sferei lui Liapunov a punctului $\boldsymbol{\zeta}$ să notăm $r = |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}|$ şi $\rho = |\boldsymbol{\xi}' - \boldsymbol{\zeta}|$ unde $\boldsymbol{\xi}'$ este proiecţia lui $\boldsymbol{\xi}$ pe planul tangent în $\boldsymbol{\zeta}$. Evident $\rho \leq r$. Avem

$$\left|\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{\xi}')}{\partial\mathbf{t}}\right| \leq a\rho\alpha \leq ar\alpha$$

oricare ar fi direcţia t în planul tangent. Deasemenea

$$|\varphi(\boldsymbol{\xi}')| = \left|\int_0 \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}d\rho\right| \leq \frac{a}{\alpha+1}\rho^{\alpha+1} \leq \frac{a}{\alpha+1}r^{\alpha+1} = br^{\alpha+1},$$

unde am pus $b = \frac{a}{\alpha+1}$. Cum

$$r = \sqrt{\rho^2 + \xi_3^2} \leq \sqrt{\rho^2 + b^2\rho^{2\alpha+2}} \leq \sqrt{1 + b^2d^{2\alpha}}\rho = c\rho$$

unde $c = \sqrt{1 + b^2d^{2\alpha}}$. Deci $\rho \leq r \leq c\rho$. Avem

$$\cos(\mathbf{n}\zeta, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) = \frac{\xi_3}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}|}$$

şi deci

$$|\cos(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\zeta}}, \boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\zeta})| \leq b|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\zeta}|\alpha.$$

Schimbând rolul punctelor $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}$ avem

$$|\cos(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\xi})| \leq b|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\zeta}|\alpha.$$

Mai avem

$$\cos(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{n}_{\boldsymbol{\zeta}}) = \frac{1}{\sqrt{1+|grad_{\xi'}\varphi(\xi')|^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+a^2\rho^{2\alpha}}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+a^2d^{2\alpha}}} = e.$$

$$|\cos(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\zeta}\xi_k)| = \frac{|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}|}{\sqrt{1+|grad_{\xi'}\varphi(\xi')|^2}} \leq a\rho\alpha \leq ar\alpha, k=1,2.$$

O definiţie analoagă şi proprietăţi analoage avem în plan pentru curbele lui Liapunov.

Dacă S este o suprafaţă a lui Liapunov, un potenţial de simplu strat cu densitatea $\mu(\boldsymbol{\xi})$ continuă şi mărginită pe suprafaţa S

$$V(\mathbf{x}) = \iint_S \mu(\xi)\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\mu(\xi)}{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$$

are sens şi pentru punctele $\mathbf{x}=\boldsymbol{\zeta}$ de pe suprafaţa S ca integrală improprie. In adevăr, dacă luăm o sferă s cu centrul în $\boldsymbol{\zeta}$ cu raza mai mică decât raza sferei lui Liapunov vom avea

$$\left|\frac{1}{4\pi}\iint_s \frac{\mu(\xi)}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\zeta}|}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}\right| = \left|\frac{1}{4\pi}\iint_{s'} \frac{\mu(\xi)}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\zeta}|}\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\cos(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}},\mathbf{n}_{\boldsymbol{\zeta}})}\right| \leq \frac{M}{4\pi e}\iint_{s'}\frac{d\xi_1 d\xi_2}{\rho},$$

s' fiind proiecţia lui s pe planul tangent. Ultima integrală poate fi făcută oricât de mică. Se vede uşor că potenţialul de simplu strat este funcţie continuă de $\boldsymbol{\zeta}$ pe S.

Dacă $\boldsymbol{\zeta}$ este un punct pe S putem considera derivata potenţialului de simplu strat într-un punct $\mathbf{x}$ neaparţinând lui S după direcţia normalei în $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{n}\zeta} = \int_S \mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{n}_{\zeta}}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\mu(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x}|^3}(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{x})\mathbf{n}_{\zeta}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Această integrală are sens şi pentru $\mathbf{x}=\boldsymbol{\zeta}$ ca integrală improprie, ea devenind

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{\zeta})}{\partial_{\zeta}\mathbf{n}\zeta} = \int_S \mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\zeta}\mathbf{n}_{\zeta}}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\mu(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\zeta}|^2}\cos(\mathbf{n}_{\zeta},\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\zeta})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

In baza inegalităţilor de mai sus aceasta există ca integrală improprie. Această valoare se numeşte *valoarea directă a derivatei după normală a potenţialului de simplu strat în punctul* $\boldsymbol{\zeta}$. Ea nu este valoarea derivatei după normală în sensul obişnuit. Ne putem aştepta ca potenţialul de simplu strat şi derivatele sale normale să prezinte salturi la traversarea suprafeţei S.

Dacă D este un domeniu care conţine în interior suprafaţa S şi $\mathbf{v}$ este un câmp vectorial cu derivate de ordinul întâi în D cu excepţia lui S unde prezintă saltul $[\mathbf{v}]\mathbf{n}$ atunci teorema flux divergenţă se scrie

$$\int\limits_{\partial D} \mathbf{vn} d\sigma = \int\limits_{D} div\mathbf{v} dv + \int\limits_{S} [\mathbf{v}]\mathbf{n} d\sigma.$$

Pentru funcţii cu salt se va modifica şi formula de reciprocitate pentru laplacean. Scriem această formulă pentru un domeniu D care conţine în interior suprafaţa S pentru o funcţie oarecare $U(\mathbf{x})$ de două ori derivabilă în D şi pentru potenţialul de simplu strat $\mathbf{V}(\mathbf{x})$:

$$\int\limits_{D}\int\limits_{S} \mu(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}\triangle U(x)dv_x =$$

$$= \int\limits_{\partial D}\left(\int\limits_{S} \mu(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}\frac{\partial U}{\partial n_x} - U(\mathbf{x})\int\limits_{S}\mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{n}_{\mathbf{x}}}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}\right)d\sigma_{\mathbf{x}} -$$

$$- \int\limits_{S}\left([V(\mathbf{x})]\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} - U(\mathbf{x})\left[\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}}\right]\right)d\sigma_x$$

sau permutând integralele

$$\int\limits_{S}\mu(\boldsymbol{\xi})\left(\int\limits_{D}\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\triangle U(x)dv_x - \int\limits_{\partial D}\left(\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\frac{\partial U}{\partial n_x} - U(\mathbf{x})\frac{\partial\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{n}_{\mathbf{x}}}\right)d\sigma_{\mathbf{x}}\right)d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} =$$

$$- \int\limits_{S}\left([V(\boldsymbol{\xi})]\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}} - U(\boldsymbol{\xi})\left[\frac{\partial V(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}}\right]\right)d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Cum $\boldsymbol{\xi}$ este în interiorul lui D rezultă ca prima paranteză este $-U(\boldsymbol{\xi})$ şi deci avem

$$\int\limits_{S} U(\boldsymbol{\xi})\left(\mu(\boldsymbol{\xi}) + \left[\frac{\partial V(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}}\right]\right)d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} - \int\limits_{S}[V(\boldsymbol{\xi})]\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}}\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 0.$$

Funcţia $U(\boldsymbol{\xi})$ fiind arbitrară rezultă relaţiile de salt

$$\begin{aligned} [V(\boldsymbol{\xi})] &= 0, \\ \left[\frac{\partial V(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}}\right] &= -\mu(\boldsymbol{\xi}), \end{aligned}$$

adică potenţialul de simplu strat este continuu la traversarea suprafeţei, în timp ce derivata sa normală suferă un salt egal cu minus densitatea.

In aceleaşi condiţii de mai sus potenţialul de dublu strat

$$W(\mathbf{x}) = \int_S \mu(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$$

există chiar şi pentru punctele $\mathbf{x} = \boldsymbol{\zeta}$ de pe suprafaţa S. Ca mai sus se stabilesc relaţiile de salt pe suprafaţa S

$$\begin{aligned} [W(\boldsymbol{\zeta})] &= \mu(\zeta), \\ \left[\frac{\partial W(\boldsymbol{\zeta})}{\partial n_{\boldsymbol{\zeta}}}\right] &= 0, \end{aligned}$$

adică potenţialul de dublu strat suferă la traversarea suprafeţei un salt egal cu densitatea în timp ce derivatele sale normale sunt continue.

Dacă suprafaţa S este frontiera ∂D a unui domeniu putem chiar preciza legătura între valorile limită şi valorile directe. Anume dacă vom scrie potenţialul de dublu strat sub forma

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}) &= \int_{\partial D} \mu(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= \int_{\partial D} [\mu(\boldsymbol{\xi}) - \mu(\boldsymbol{\zeta})] \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} + \mu(\boldsymbol{\zeta}) \int_{\partial D} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}, \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\zeta}$ fiind un punct pe frontiera ∂D, prima integrală reprezintă o funcţie $I(\mathbf{x})$ continuă la traversarea lui ∂D prin $\boldsymbol{\zeta}$. Notând prin $W^e(\boldsymbol{\zeta}), W^i(\boldsymbol{\zeta})$ valorile limită ale potenţialului de dublu strat venind din exterior, respectiv interior şi prin $W(\boldsymbol{\zeta})$ valoarea directă vom avea

$$\begin{aligned} W^e(\boldsymbol{\zeta}) &= I(\boldsymbol{\zeta}), \\ W(\boldsymbol{\zeta}) &= I(\boldsymbol{\zeta}) - \frac{\mu(\boldsymbol{\zeta})}{2}, \\ W^i(\boldsymbol{\zeta}) &= I(\boldsymbol{\zeta}) + \mu(\boldsymbol{\zeta}). \end{aligned}$$

Rezultă *formulele de salt ale potenţialului de dublu strat*

$$\begin{aligned} W^e(\boldsymbol{\zeta}) &= W(\boldsymbol{\zeta}) + \frac{\mu(\boldsymbol{\zeta})}{2}, \\ W^i(\boldsymbol{\zeta}) &= W(\boldsymbol{\zeta}) - \frac{\mu(\boldsymbol{\zeta})}{2}. \end{aligned}$$

Pentru valorile derivatelor după normală ale potenţialului de simplu strat nu mai putem proceda ca mai sus, dar vom observa că funcţia

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial_{\mathbf{x}} n_{\zeta}} + W(\mathbf{x})$$

este continuă la traversarea lui ∂D prin $\boldsymbol{\zeta}$. Atunci cu notaţii evidente vom putea scrie

$$\frac{\partial V^e(\boldsymbol{\zeta})}{\partial_{\mathbf{x}} n_{\zeta}} + W^e(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\boldsymbol{\zeta})}{\partial_{\mathbf{x}} n_{\zeta}} + W(\zeta) = \frac{\partial V^i(\boldsymbol{\zeta})}{\partial_{\mathbf{x}} n_{\zeta}} + W^i(\mathbf{x})$$

de unde rezultă formulele de salt ale derivatelor normale ale potenţialului de simplu strat

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^e(\boldsymbol{\zeta})}{\partial_{\mathbf{x}} n_{\zeta}} &= \frac{\partial V(\boldsymbol{\zeta})}{\partial_{\mathbf{x}} n_{\zeta}} - \frac{\mu(\zeta)}{2}, \\ \frac{\partial V^i(\boldsymbol{\zeta})}{\partial_{\mathbf{x}} n_{\zeta}} &= \frac{\partial V(\boldsymbol{\zeta})}{\partial_{\mathbf{x}} n_{\zeta}} + \frac{\mu(\zeta)}{2}. \end{aligned}$$

Dacă vom plasa originea sistemului de coordonate în interiorul domeniului D şi vom nota prin L diametrul domeniului D, cea mai mare distanţă dintre punctele sale, vom

$$|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \geq |\mathbf{x}| - |\boldsymbol{\xi}| \geq |\mathbf{x}| - L$$

presupunând $|x| > 2L$ vom avea

$$|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| > \frac{|\mathbf{x}|}{2}$$

şi obţinem pentru potenţialul de simplu strat evaluarea la mari distanţe

$$|V(\mathbf{x})| \leq \frac{2}{4\pi|\mathbf{x}|} \int\limits_{\partial D} |\mu(\boldsymbol{\xi})| d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Pentru potenţialul de dublu strat putem scrie

$$|W(x)| \leq \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial D} |\mu(\boldsymbol{\xi})| \frac{1}{|x-\xi|^2} \cos(n\xi, \xi - x) | d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} \leq \frac{2^2}{4\pi|x|^2} \int\limits_{\partial D} |\mu(\boldsymbol{\xi})| d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Dacă un potenţial de simplu strat pe frontiera unui domeniu D este constant pe frontieră atunci el reprezintă o funcţie armonică în întreg spaţiu, constantă în interiorul domeniului D şi poate fi interpretat ca potenţialul unei distribuţii de sarcini electrice pe suprafaţa conductorului D. Din acest motiv în acest caz densitatea $\mu(\boldsymbol{\xi})$ se numeşte în acest caz *densitate electrostatică*.

In plan se definesc potenţiali de simplu strat şi dublu strat pe o curbă **C** prin înlocuirea funcţiei fundamentale din spaţiu cu funcţia fundamentală din plan $\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}$. Se menţin proprietăţile de mai sus relative la salt. In ce priveşte comportarea la infinit potenţialul de simplu strat se comportă ca $\ln|\mathbf{x}|$ iar potenţialul de dublu strat este mărginit.

14.21 Rezolvarea problemelor la limită prin ecuaţii integrale

Proprietăţile potenţialilor de simplu strat şi dublu strat conduc la rezolvarea problemelor lui Dirichlet şi Neumann cu ajutorul lor. Anume pentru rezolvarea problemelor lui Dirichlet vom folosi potenţialul de dublu strat

$$W(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} \mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}},$$

iar pentru problemele lui Neumann vom folosi potenţialul de simplu strat

$$V(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} \nu(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Scriind că acestea satisfac condiţiile problemelor respective obţinem că densităţile trebuie să satisfacă ecuaţiile integrale:

pentru problema lui Dirichlet interioară

$$\mu(\boldsymbol{\zeta}) - 2\int\limits_{\partial D} \mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\xi}} n_{\boldsymbol{\xi}}}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = -2U_0^i(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\zeta}\in\partial D;$$

pentru problema lui Dirichlet exterioară

$$\mu(\boldsymbol{\zeta}) + 2\int\limits_{\partial D} \mu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\xi}} n_{\boldsymbol{\xi}}}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 2U_0^e(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\zeta}\in\partial D;$$

pentru problema lui Neumann interioară

$$\nu(\boldsymbol{\zeta}) + 2\int\limits_{\partial D} \nu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\zeta}} n_{\boldsymbol{\zeta}}}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 2\frac{\partial U_0^i(\boldsymbol{\zeta})}{\partial n_{\boldsymbol{\zeta}}}, \boldsymbol{\zeta}\in\partial D;$$

pentru problema lui Neumann exterioară

$$\nu(\boldsymbol{\zeta}) - 2\int\limits_{\partial D} \nu(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\zeta}} n_{\boldsymbol{\zeta}}}d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = -2\frac{\partial U_0^e(\boldsymbol{\zeta})}{\partial n_{\boldsymbol{\zeta}}}, \boldsymbol{\zeta}\in\partial D.$$

In membrii drepţi sunt valorile cunoscute pe frontieră ale funcţiei sau derivatei normale.

Dacă notăm

$$K(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{2}\frac{\partial\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\xi}} n_{\boldsymbol{\xi}}}$$

atunci vom avea

$$2\frac{\partial\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\zeta}} n_{\boldsymbol{\zeta}}} = K(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}).$$

Aceste funcţii se numesc *nucleele cu singularitate polară ale ecuaţiilor integrale*. Se zice că aceste nuclee sunt asociate în sensul că schimbând rolul celor două variabile unul trece în celălalt. Dacă ne imaginăm că pentru integrale folosim o formulă de cuadratură şi scriem că ecuaţia este verificată în nodurile formulei de cuadratură atunci în locul ecuaţiilor integrale obţinem sisteme de ecuaţii lineare cu acelaşi număr de ecuaţii şi necunoscute, matricea corespunzătoare nucleului $K(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta})$ ar fi transpusa matricei corespunzătoare nucleului $K(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})$. Pentru ecuaţiile integrale are loc aşa numita *teoremă de alternativă a lui Fredholm* care generalizează lucrurile care se petrec la sisteme lineare cu acelaşi număr de ecuaţii şi necunoscute. Ea afirmă că sau ecuaţia integrală omogenă admite o soluţie unică şi atunci şi ecuaţia omogenă asociată admite tot numai soluţie unică şi ecuaţiile neomogene admit soluţie unică oricare ar fi termenii liberi sau cele două ecuaţii omogene asociate admit admit acelaşi număr de soluţii nebanale linear independente şi o ecuaţie neomogenă are soluţie numai dacă termenul său liber este ortogonal pe toate soluţiile nebanale linear independente ale ecuaţiei omogene asociate.

Observăm că în sensul de mai sus ecuaţiile problemelor lui Dirichlet interioare şi Neumann exterioare sunt asociate şi de asemenea ecuaţiile problemelor lui Dirichlet exterioare şi Neumann interioare sunt asociate.

Să considerăm că $\nu_0(\boldsymbol{\xi})$ este soluţie a ecuaţiei omogene a problemei lui Neumann exterioare

$$\nu_0(\boldsymbol{\zeta}) - 2\int\limits_{\partial D} \nu_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})}{\partial_{\boldsymbol{\zeta}} n_{\boldsymbol{\zeta}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 0$$

şi fie potenţialul de simplu strat corespunzător

$$V_0(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} \nu_0(\boldsymbol{\xi})\Omega(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Ecuaţia integrală omogenă arată că are loc relaţia

$$\frac{\partial V_0^e(\boldsymbol{\zeta})}{\partial n_{\boldsymbol{\zeta}}} = 0$$

şi în virtutea unicităţii soluţiei problemei lui Neumann exterioare rezultă

$$V_0(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \notin \mathbf{D} \cup \partial\mathbf{D}.$$

Potenţialul de simplu strat fiind continuu la traversarea frontierei rezultă că avem şi

$$V_0(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbf{D}$$

şi deci şi

$$\frac{\partial V_0^i(\boldsymbol{\zeta})}{\partial n_{\boldsymbol{\zeta}}} = 0.$$

Atunci în virtutea relaţiei de salt rezultă $\nu_0(\boldsymbol{\zeta})$ pentru $\boldsymbol{\zeta} \in \partial D$, adică ecuaţia omogenă are numai soluţia banală. După teorema de alternativă a lui Fredholm rezultă că ecuaţiile integrale neomogene admit soluţii unice oricare ar fi termenii liberi continui. Avem urmatoarele concluzii:

Dacă ∂D este suprafaţă a lui Liapunov atunci problema lui Dirichlet interioară are soluţie unică pentru orice date continue pe frontieră şi această soluţie poate fi reprezentată printr-un potenţial de dublu strat.

Dacă ∂D este suprafaţă a lui Liapunov atunci problema lui Neumann exterioară are soluţie unică pentru orice date continue pe frontieră şi această soluţie poate fi reprezentată printr-un potenţial de simplu strat.

In ce priveşte ecuaţiile corespunzătoare problemelor lui Dirichlet exterioară şi Neumann interioară observăm că ecuaţia omogenă a problemei lui Dirichlet exterioară admite în baza proprietăţii integralei lui Gauss soluţia $\mu_0(\boldsymbol{\zeta}) \equiv 1$. Atunci şi ecuaţia omogenă a problemei lui Neumann interioară admite cel puţin o soluţie nebanală $\nu_0(\boldsymbol{\zeta})$. Potenţialul de simplu strat $V_0(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} \nu_0(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$ va verifica relaţia $\frac{\partial V_0^i(\zeta)}{\partial n_\zeta} = 0$ şi ca urmare a unicităţii soluţiei problemei lui Neumann interioare rezultă $V_0(\mathbf{x}) = c_0$ pentru $\mathbf{x} \in D$. c_0 nu poate să fie nul pentru că atunci $V_0(\mathbf{x})$ ar fi nul şi în exteriorul lui D şi după relaţia de salt ar rezulta $\nu_0(\boldsymbol{\zeta}) \equiv 0$, contradicţie cu ipoteza. Dacă $\nu_1(\boldsymbol{\zeta})$ ar fi o altă soluţie nebanală atunci şi potenţialul corespunzător ei $V_1(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} \nu_1(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$ ar fi egal cu o constantă c_1 în D şi atunci soluţia $\nu_2(\boldsymbol{\zeta}) = c_1\nu_0(\boldsymbol{\zeta}) - c_0\nu_1(\boldsymbol{\zeta})$ ar da un potenţial $V_2(\mathbf{x}) = c_1V_0(\mathbf{x}) - c_0V_1(\mathbf{x})$ nul în D şi ca mai înainte ar rezulta $\nu_2(\boldsymbol{\zeta}) \equiv \mathbf{0}$ adică $\nu_1(\boldsymbol{\zeta}) \equiv \frac{c_1}{c_0}\nu_0(\boldsymbol{\zeta})$, adică ecuaţiile omogene ale problemelor lui Dirichlet exterioare şi Neumann interioare nu admit decât câte o singură soluţie nebanală $\nu_0(\boldsymbol{\zeta}) \equiv 1$ repectiv $\nu_0(\boldsymbol{\zeta})$.

Deci ecuaţia neomogenă a problemei lui Neumann interioare admite soluţie numai dacă termenul liber este ortogonal pe $\nu_0(\boldsymbol{\zeta})$, adică are loc relaţia

$$\int_{\partial D} \frac{\partial U_0^i(\boldsymbol{\zeta})}{\partial n_{\boldsymbol{\zeta}}} d\sigma_{\boldsymbol{\zeta}} = 0,$$

condiţie pe care am mai întâlnit-o. Prima concluzie este:

Problema lui Neumann interioară are soluţie dacă şi numai dacă datele pe frontieră verifică relaţia de mai sus şi atunci soluţia poate fi reprezentată printr-un potenţial de simplu strat.

In ce priveşte problema lui Dirichlet exterioară ecuaţia sa neomogenă admite soluţie numai dacă avem

$$\int_{\partial D} \nu_0(\boldsymbol{\zeta}) U_0^e(\boldsymbol{\zeta}) d\sigma\zeta = 0.$$

Vom nota că aceasta este condiţia ca problema lui Dirichlet exterioară să admită o soluţie care să poată fi reprezentată printr-un potenţial de dublu strat care la infinit se comportă ca $\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$, adică avem pentru problema lui Dirichlet exterioară o condiţie suplimentară.

Pentru a rezolva problema lui Dirichlet exterioară obişnuită presupunem că originea este în interiorul lui D şi putem căuta soluţia sub forma

$$W(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \mu(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{\partial D} \mu(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Atunci scriind condiţia la limită vom avea ecuaţia integrală

$$\mu(\boldsymbol{\zeta}) + 2 \int_{\partial D} \mu(\boldsymbol{\xi}) \left(\frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} + \frac{1}{|\boldsymbol{\zeta}|} \right) d\sigma\xi = 2U_0^e(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\zeta} \in \partial D.$$

Dacă $\mu_0(\boldsymbol{\zeta})$ este o soluţie a ecuaţiei omogene

$$\mu_0(\boldsymbol{\zeta}) + 2 \int_{\partial D} \mu_0(\boldsymbol{\xi}) \left(\frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} + \frac{1}{|\boldsymbol{\zeta}|} \right) d\sigma\xi = 0$$

funcţia

$$W_0(x) = \int_{\partial D} \mu_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{\partial D} \mu_0(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$$

este armonică în exteriorul lui D şi este nulă pe frontieră. Din unicitatea soluţiei problemei lui Dirichlet exterioare rezultă

$$W_0(x) = \int_{\partial D} \mu_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{\partial D} \mu_0(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 0, x \notin D.$$

Inmulţind această relaţie cu $|\mathbf{x}|$ şi făcând $|\mathbf{x}| \to \infty$, din proprietatea potenţialului de dublu strat rezultă

$$\int\limits_{\partial D} \mu_0(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 0,$$

adică de fapt orice soluţie a ecuaţiei omogene verifică şi ecuaţia

$$\mu_0(\boldsymbol{\zeta}) + 2 \int\limits_{\partial D} \mu_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} d\sigma\xi = 0.$$

Dar am văzut că aceasta are numai soluţiile $\mu_0(\boldsymbol{\zeta}) \equiv C = const$. Din cealaltă relaţie rezultă $C = 0$, adică ecuaţia integrală omogenă are numai soluţia banală. Deci ecuaţia nomogenă admite soluţie unică oricare ar termenul liber.

In concluzie, problema lui Dirichlet exterioară are totdeauna soluţie pentru date continue şi această soluţie poate fi reprezentată prin suma între un potenţial de dublu strat cu densitatea $\mu_0(\boldsymbol{\xi})$ şi o funcţie de forma $\frac{1}{|\mathbf{x}|} \int\limits_{\partial D} \mu_0(\boldsymbol{\xi}) d\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$.

CAPITOLUL 15

ECUAŢII DE TIP HIPERBOLIC

15.1 Unde, caracteristici, fronturi de undă

Prin *fenomen ondulatoriu* se înţelege un fenomen în care o perturbaţie se propagă în timp şi spaţiu. Prin *undă* se înţelege un fenomen ondulatoriu în care o perturbaţie se propagă în spaţiu şi timp de-alungul unei familii de suprafeţe variabile în timp. In general un fenomen ondulatoriu este o suprapunere de unde.

O famile de suprafeţe variabile în timp poate fi dată printr-o ecuaţie de forma

$$\Omega(x, y, z, t) = C$$

unde C este o constantă de care depinde familia de suprafeţe. Un punct (x, y, z) al familiei de suprafeţe la momentul t se deplasează în timp cu viteza $\overrightarrow{v}(x, y, z, t)$ în direcţia normalei la suprafaţă, la momentul $t+dt$ devenind $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Cum putem scrie

$$\begin{aligned} \Omega(x, y, z, t) &= C, \\ \Omega(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) &= C \end{aligned}$$

sau

$$\Omega(x, y, z, t) + \frac{\partial \Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z}dz + \frac{\partial \Omega}{\partial t}dt = C,$$

rezultă

$$\operatorname{grad}\Omega . \overrightarrow{v}(x, y, z, t) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$$

şi deci

$$\overrightarrow{v}(x,y,z,t) = -\frac{\partial\Omega}{\partial t}\frac{\operatorname{grad}\Omega}{|\operatorname{grad}\Omega|^2}.$$

Dacă $\frac{\partial\Omega}{\partial t} = -\beta$ atunci

$$\Omega(x,y,z,t) = \omega(x,y,z) - \beta t$$

şi ecuaţia familiei de suprafeţe este

$$\omega(x,y,z) = \beta t + C$$

unde $\omega(x,y,z)$ este o funcţie care defineşte forma suprafeţelor variabile, β este un număr real, C este constanta de care depinde familia de suprafeţe. In acest caz toate suprafeţele familiei au aceeaşi formă. Viteza de deplasare a punctelor suprafeţelor familiei este acum

$$\overrightarrow{v}(x,y,z) = \beta\frac{grad\omega(x,y,z)}{|grad\omega(x,y,z)|^2}.$$

Dacă $\beta = 0$ avem o familie de suprafeţe staţionare.

Dacă $\omega(x,y,z) = lx + my + nz$, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, avem o familie de plane variabile în timp normale la versorul de componente l, m, n. Dacă $\omega(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ avem o familie de suprafeţe sferice cu centrul în origine variabile în timp. Dacă $\omega(x,y,z) = x^2 + y^2$ şi suntem în spaţiu avem o familie de cilindri circulari drepţi cu axa Oz, dacă suntem în plan avem o familie de cercuri cu centru în origine cu raza variabilă în timp. Pe axa reală o familie de puncte variabile în timp se obţine pentru $\omega = \pm x$.

Fie u mărimea caracteristică unei unde care se propagă de-a lungul familiei de suprafeţe variabile $\Omega(x,y,z,t) = C$. La momentul $t = 0$ valoarea mărimii pe curba din familie corespunzătoare valorii C va fi o funcţie de constanta curbei $F(C)$. Prin propagare de-alungul familiei la momentul t pe suprafaţa deplasată vom regăsi valoarea $F(C)$ înmulţită eventual cu un factor care depinde de timpul t şi de poziţia punctului (x,y,z) adică $g(x,y,z,t)$. Acest factor se numeşte *factor de amortizare sau factor de atenuare*. Rezultă că într-un punct oarecare (x,y,z) la momentul t mărimea undei este

$$u(x,y,z,t) = g(x,y,z,t)F(\Omega(x,y,z,t).$$

In cazul undelor care se propagă de-a lungul familiei de suprafeţe variabile $\omega(x,y,z) = \beta t + C$ se poate ca factorul de amortizare, dacă există, să fie produsul între un eventual factor care depinde de timpul t, $T(t)$ şi eventual un factor care depinde de poziţia suprafeţei adică de $\beta t + C$, $X(\beta t + C)$. O asemnea undă se numeşte *undă cu factor de amortizare separat*. Rezultă că într-un punct oarecare (x, y, z) din spaţiu la momentul t mărimea unei unde cu factor de amortizare separat are valoarea

$$u(x, y, z, t) = F(\omega(x, y, z) - \beta t)T(t)X(\omega(x, y, z)).$$

O funcţie $u(x, y, z, t)$ de una din formele de mai sus reprezintă deci o undă. Funcţia F se numeşte *funcţia de formă a undei*, funcţia $\Omega(x, y, z, t)$ sau $\omega(x, y, z) - \beta t$ se numeşte *faza undei*. Suprafeţele de-alungul cărora are loc propagarea se numesc *suprafeţele de fază ale unde*i. Suprafeţele de fază definesc aspectul undei. In acest mod se vorbeşte despre unde plane, sferice, cilindrice,etc. Viteza cu care se deplasează suprafeţele de fază se numeşte *viteza de fază a undei*. Dacă $\frac{\partial \Omega}{\partial t} \neq 0$ respectiv $\beta \neq 0$ viteza de fază este nenulă şi undele se numesc *progresive*. Dacă $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ respectiv $\beta = 0$ viteza de fază este nulă, deci de fapt nu are loc o propagare şi undele se numesc *staţionare*. Se folosesc undele staţionare pentru că o undă staţionară armonică în timp şi spaţiu este suma sau diferenţa a două unde progresive cum rezultă din identitatea trigonometrică

$$\cos \lambda x \cos \omega t = \frac{1}{2} \left(\cos(\lambda x + \omega t) + \cos(\lambda x - \omega t) \right).$$

Vom arăta că în general soluţiile ecuaţiilor de tip hiperbolic sunt suprapuneri de unde.

Dacă într-un fenomen avem de-a face cu o familie de unde ale căror viteze de fază nu depind de forma undelor se zice că avem de-a face cu o *familie de unde nedispersive*. Dacă avem de-a face cu o familie de unde unde a căror viteză de fază depinde de forma undei se zice că avem de-a face cu o *familie de unde dispersive*. Importanţa acestei clasificări apare mai ales în problemele de transmisie a semnalelor. Dacă semnale cu diferite forme se transmit sub formă de unde dispersive, deci a căror viteză depinde de forma lor, la destinaţie vor ajunge în momente diferite şi deci semnalele recepţionate vor fi distorsionate.

Ne punem problema cum trebuie să fie ecuaţia lineară omogenă

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

pentru a admite ca soluţii o familie unde nedispersive de forma

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = g(x_1, x_2, x_3, t)F(\Omega(x_1, x_2, x_3, t)).$$

Am notat prin $g(x_1, x_2, x_3, t)$ factorul de atenuare. Cum avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \Omega}{\partial t} gF' + \frac{\partial g}{\partial t} F, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = gF'' \frac{\partial \Omega}{\partial t}^2 + 2\frac{\partial \Omega}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} F' + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} F, \\
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= gF' \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} F, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = gF'' \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} + gF' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j} + \\
&\quad + F'\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}\right) + F\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}$$

obţinem

$$L[u] = F''g\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}^2 - \sum a_{ij}\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}\frac{\partial \Omega}{\partial x_j}\right) -$$

$$-F'\left[2\left(\sum a_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} + \frac{\partial \Omega}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}\right) + g\left(\sum a_{ij}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} + b\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)\right] +$$

$$+FL[g] = 0$$

Pentru ca $L[u] = 0$ oricare ar fi funcţia F trebuie îndeplinite condiţiile:

- $*$ suprafeţele de fază $\Omega(x, y, z, t) = C$ trebuie să fie caracteristice

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}^2 - \sum a_{ij}\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = 0$$

- $*$ coeficientul de atenuare trebuie să verifice ecuaţiile

$$L[g] = 0,$$

$$2\left(\sum a_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} - \frac{\partial \Omega}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}\right) +$$

$$+g\left(\sum a_{ij}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} + b\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) = 0$$

Să luăm câteva ecuaţii cu coeficienţi constanţi.

1. Ecuaţia telegrafiştilor

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu = 0$$

admite caracteristicile

$$x - at = C, -x - at = C$$

adică $\omega = \pm x$. Mai avem pentru coeficientul de atenuare $g(t, x)$ condiţiile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + cg &= 0, \\
\pm a^2 \frac{\partial g}{\partial x} + a\frac{\partial g}{\partial t} &= 0.
\end{aligned}$$

Din a doua condiţie rezultă $g = Ae^{\mu(\pm x - at)}$ cu A şi μ constante. Prima ecuaţie este verificată numai dacă $c = 0$. Deci pentru $c \neq 0$ ecuaţia telegrafiştilor nu admite ca soluţii unde nedispersive. Pentru $c = 0$ ecuaţia telegrafiştilor devine ecuaţia corzii şi admite unde nedispersive şi fără atenuare ($g = 1$)

$$u = F(x - at), u = F(-x - at)$$

cu F funcţie arbitrară.

2. Ecuaţia undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \triangle u = 0$$

are drept caracteristici familia de plane

$$\begin{aligned} lx + my + nz - at &= C, \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1. \end{aligned}$$

Luând $\omega = lx + my + nz$, $g = 1$ condiţiile sunt verificate, adică ecuaţia undelor admite unde nedispersive şi fără atenuare de forma

$$u = F(lx + my + nz - at)$$

cu F funcţie arbitrară. Acestea se numesc *unde plane*.

Ecuaţia undelor are şi caracteristici de forma

$$r - at = C, -r - at = C$$

unde $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ (ξ, η, ζ) fiind un punct arbitrar. Punând $\omega = \pm r$, $g = \frac{1}{4\pi r}$ condiţiile sunt îndeplinite, adică ecuaţia undelor admite unde nedispersive cu atenuare de forma

$$u = \frac{F(r - at)}{4\pi r}, u = \frac{F(-r - at)}{4\pi r}.$$

Acestea se numesc *unde sferice*. Prima este unda sferică divergentă care pleacă din punctul (ξ, η, ζ), a doua este unda sferică convergentă care vine spre punctul (ξ, η, ζ). Ambele se deplasează cu viteza a.

Se verifică uşor că ecuaţia membranei nu admite unde nedispersive.

Să presupunem acum că soluţia $u(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ a ecuaţiei

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

este astfel încât la trecerea prin suprafaţa S de ecuaţie

$$t-\omega(x_1,x_2,...,x_n)=0$$

funcţia şi toate derivatele sale de primul ordin sunt continuie şi derivatele de ordinul doi pot prezenta salturi. Aceasta se poate întâmpla de exemplu când în procesul ondulatoriu descris de ecuaţia de mai sus la un moment t punctele dintr-o parte a suprafeţei sunt în repaus iar cele din partea cealaltă sunt în mişcare. Să facem o schimbare de variabile

$$\begin{aligned}
\tau &= t-\omega(x_1,x_2,...,x_n)\\
\xi_1 &= x_1\\
&......\\
\xi_n &= x_n
\end{aligned}$$

Funcţia u devine funcţie de noile variabile pe care o notăm tot cu $u(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,\tau)$. Vom avea

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \tau},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial \xi_i}-\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_i},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i\partial \xi_j}-\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \xi_i}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_j}-\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\partial \xi_j}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_i}+\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_i}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_j}-\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_i\partial \xi_j}
\end{aligned}$$

Derivatele în raport cu variabilele ξ_i fiind derivate tangenţiale la S rezultă că avem pentru salturile derivatelor de ordinul doi relaţiile

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right]=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right]\frac{\partial \omega}{\partial \xi_i}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_j}.$$

Luând salturile ecuaţiei de-a lungul suprafeţei S, $\tau=0$, obţinem

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right]\left(1-\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_i}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_j}\right)=0$$

şi deci

$$1-\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_i}\frac{\partial \omega}{\partial \xi_j}=0$$

adică suprafaţa S trebuie să fie o suprafată caracteristică. O asemenea suprafaţă considerată în spaţiul variabilelor $x_1,x_2,...,x_n$ se numeşte *front de undă al discontinuităţilor de ordinul doi* sau *front de undă al dicontinuităţilor slabe.* Prin derivarea succesivă a ecuaţiei se vede că suprafeţele de discontinuitate ale derivatelor de ordin superior lui doi sunt tot suprafeţe caracteristice.

Se poate construi o soluţie a ecuaţiei ale căror derivate de ordinul întâi să prezinte salturi de-a lungul unei suprafeţe oarecare. Dar dacă această soluţie este limită de soluţii care tind uniform împreună cu derivatele de primul şi al doilea ordin într-un domeniu exceptând acea suprafaţă, atunci acea suprafaţă trebuie să fie tot caracteristică. O asemenea suprafaţă considerată în spaţiul variabilelor spaţiale se numeşte f*ront de undă al discontinuităţilor de ordinul întâi*. La fel se defineşte *frontul de undă al discontinuităţilor de ordin zero.*

Suprafeţele caracteristice $t - \omega(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ fiind soluţii ale unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi sunt generate de caracteristicile acestei ecuaţii

$$\frac{dx_1}{2\sum\limits_j a_{1j}p_j} = ... = \frac{dx_n}{\sum\limits_j a_{nj}p_j} = \frac{d\omega}{2} = \frac{-dp_1}{\sum\limits_{i,j} p_i p_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_1}} = ... = \frac{-dp_n}{\sum\limits_{i,j} p_i p_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n}} = \frac{dt}{2}$$

Am notat $p_i = \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \sum\limits_{i,j} p_i p_j = 1$. Aceste curbe caracteristice ale caracteristicilor se numesc *bicaracteristici*, iar proiecţiile lor pe planul $t = 0$ se numesc *raze*. De-a lungul razelor avem

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_j a_{i,j} p_j, i = 1, 2, ..., n.$$

Având în vedere ecuaţia caracteristicii rezultă

$$\sum_i \frac{dx_i}{dt} p_i = \sum_{i,j} a_{i,j} p_i p_j = 1$$

adică razele nu sunt tangente la frontul de undă al discontinuităţilor. In cazul ecuaţiei membranei sau undelor $a_{ij} = a^2 \delta_{ij}$, δ_{ij} simbolul lui Kronicker, frontul de undă este un cerc respectiv sferă, iar razele sunt chiar ortogonale la acestea fiind efectiv raze.

Vectorul $\overrightarrow{v_r}$ cu comonentele $\frac{dx_i}{dt} = \sum\limits_j a_{i,j} p_j, i = 1, 2, ..., n$ se numeşte *vectorul vitezei de propagare a discontinuităţilor* pentru că el reprezintă viteza de propagare a discontinuităţilor în direcţia razelor. Mărimea sa este

$$|\overrightarrow{v_r}| = \sqrt{\sum_i \left(\sum_j a_{ij} p_j \right)^2}$$

în cazul ecuaţiei membranei sau undelor mărimea este $|\overrightarrow{v_r}| = a$.

In vecinătatea suprafeţei de discontinuitate, cu schimbările de variabile de mai sus ecuaţia cu derivate parţiale se scrie

$$L[u] = -2\sum_{i,j} a_{i,j}p_j \frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial\xi_i} - A\frac{\partial u}{\partial\tau} + ... = f$$

unde

$$A = \sum_{i,j} a_{i,j}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_i\partial\xi_j} + \sum_i b_i \frac{\partial\omega}{\partial\xi_i} - b$$

iar prin puncte puncte am notat termenii care nu conţin derivate după τ. Se poate scrie

$$\begin{aligned} -2\sum_{i,j} a_{i,j}p_j \frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial\xi_i} &= -2\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial\xi_i}\sum_j a_{i,j}p_j = -2\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial\xi_i}\frac{dx_i}{dt} = \\ &= -2\sum_i \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)\frac{dx_i}{dt} = -2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial\tau}. \end{aligned}$$

Ecuaţia se poate deci scrie în vecinătatea suprafeţei de discontinuitate

$$L[u] = -2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial\tau} - A\frac{\partial u}{\partial\tau} + ... = f.$$

Derivăm această relaţie în raport cu τ odată într-un punct P^+ situat pe rază în acea parte a suprafeţei spre care se propagă discontinuităţile şi altă dată într-un punct P^- situat pe aceeaşi raza dar în cealaltă parte a suprafeţei. Scădem cele două relaţii şi facem ca ambele puncte să tindă către acelaşi punct al suprafeţei. Notând $\mu = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\right]$ saltul derivatei de ordinul doi, avem

$$2\frac{\partial\mu}{\partial t} + A\mu = 0.$$

In aceste relaţii mărimea A este cunoscută de-a lungul suprafeţei deci şi de-a lungul curbelor caracteristice care o generează deci de-a lungul razelor. Atunci relaţia de mai sus este o ecuaţie diferenţială de-a lungul razei a cărei soluţie este

$$\mu = \mu_0 e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t A dt}$$

μ_0 fiind valoarea saltului la momentul $t = 0$. Rezultă că dacă saltul este nenul la momentul $t = 0$ el va fi nenul la orice alt moment t. Dacă la momentul $t = 0$ saltul este nenul numai pe o porţiune a suprafeţei, saltul va fi nenul de-a lungul razelor care pleacă din acea porţiune a suprafeţei. Aceasta este o explicaţie a apariţiei frontierei petei de umbră lăsată de lumină.

Apare evident problema determinării poziţiei frontului de undă când se cunoaşte poziţia sa la momentul $t = 0$. Aceasta este de fapt o problemă a lui Cauchy pentru ecuaţia caracteristicilor. Ilustrăm aceasta în cazul ecuaţiei membranei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Presupunând că frontul de undă la momentul $t = 0$ este curba S_0 de ecuaţii parametrice $x = x_0(\tau)$, $y = y_0(\tau)$ trebuie rezolvată problema lui Cauchy pentru ecuaţia caracteristicilor

$$a^2(p_1^2 + p_2^2) - 1 = 0, p_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}, p_2 = \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

cu condiţia iniţială

$$\omega(x, y)|_{x=x_0(\tau), y=y_0(\tau)} = 0.$$

Vom avea de rezolvat sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{2a^2 p_1} = \frac{dy}{2a^2 p_2} = \frac{d\omega}{2} = \frac{-dp_1}{0} = \frac{-dp_2}{0} = \frac{ds}{2}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} x|_{s=0} &= x_0(\tau), y|_{s=0} = y_0(\tau), \omega|_{s=0} = 0 \\ p_1^0 x_0'(\tau) + p_2^0 y_0'(\tau) &= 0, a^2(p_1^{0^2} + p_2^{0^2}) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1^0 = const, p_2 = p_2^0 = const, \\ x &= a^2 p_1^0 s + x_0(\tau), y = a^2 p_2^0 s + y_0(\tau) \end{aligned}$$

Cum din ultimele condiţi avem

$$p_1^0 = \frac{y_0'(\tau)}{\pm a\sqrt{x_0'^2(\tau) + y_0'^2(\tau)}}, p_2^0 = \frac{-x_0'(\tau)}{\pm a\sqrt{x_0'^2(\tau) + y_0'^2(\tau)}}$$

găsim ecuaţia frontului de undă sub formă parametrică

$$\begin{aligned} x &= \frac{a y_0'(\tau)}{\pm\sqrt{x_0'^2(\tau) + y_0'^2(\tau)}} \omega + x_0(\tau), \\ y &= \frac{-a x_0'(\tau)}{\pm\sqrt{x_0'^2(\tau) + y_0'^2(\tau)}} \omega + y_0(\tau). \end{aligned}$$

Dacă de exemplu frontul iniţial este cercul $x_0 = r_0 \cos\tau, y_0 = r_0 \sin\tau$ atunci ecuaţiile parametrice al frontului vor fi

$$x = \pm a\omega \cos\tau + r_0 \cos\tau, y = \pm a\omega \sin\tau + r_0 \sin\tau.$$

Dacă ne interesează frontul de undă care se deplasează în exteriorul cercului iniţial, punând $\omega = t$ obţinem ecuaţiile parametrice sub forma

$$x = (at + r_0)\cos\tau, y = (at + r_0)\sin\tau$$

sau

$$t = \frac{1}{a}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_0\right).$$

Observăm că fundamentăm astfel modul în care la fizică frontul de undă se obţine ca înfăşurătoare a cercurilor cu centrele pe frontul de undă iniţial cu raze egale cu viteza de propagare a undelor înmulţită cu timpul.

15.2 Soluţia lui D'Alembert

Prin problema lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă a corzii se înţelege determinarea unei funcţii $u(x, t)$ definită în domeniul $x \in R, t \geq 0$ în care să verifice ecuaţia omogenă a corzii

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

şi să verifice condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0} &= u_0(x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= v_0(x). \end{aligned}$$

Din punct de vedere fizic aceasta înseamnă determinarea vibraţiilor unei corzi care se presupune infinit de lungă, adică practic este suficient de lungă ca să putem neglija efectele capetelor.

Am văzut că ecuaţia corzii este de tip hiperbolic şi admite familiile de caracteristici

$$\begin{aligned} x + at &= C, \\ x - at &= C. \end{aligned}$$

Făcând schimbarea de variabile

$$\begin{aligned} \xi &= x + at, \\ \eta &= x - at \end{aligned}$$

ecuaţia devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

din care găsim soluţia generală

$$u = \alpha(\xi) + \beta(\eta)$$

cu α, β funcţii oarecare cu derivate continue. In vechile variabile soluţia este

$$u(x,t) = \alpha(x + at) + \beta(x - at).$$

Observăm că dacă $x = x_0 + at$, adică dacă punctul x se deplasează spre stânga cu viteza a atunci $\beta(x - at) = \beta(x_0)$, adică ne putem imagina suprafaţa $u = \beta(x - at)$ dacă considerăm graficul lui $u = \beta(x)$ ca deplasându-se în timp de-alungul lui Ox spre dreapta cu viteza a. Se zice că avem o *undă directă care se deplasează spre dreapta cu viteza* a. La fel $u = \alpha(x + at)$ reprezintă o *undă inversă care se deplasează spre stânga cu viteza* a. Deci oscilaţia corzii este dată de compunerea celor două unde directă şi inversă.

Vom determina funcţiile α, β folosindu-ne de condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \alpha(x) + \beta(x) = u_0(x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= a\alpha'(x) - a\beta'(x) = v_0(x). \end{aligned}$$

Cum a doua relaţie se scrie

$$\alpha(x) - \beta(x) = \frac{1}{a}\int_0^x v_0(\xi)d\xi + C$$

rezultă

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x v_0(\xi)d\xi + \frac{C}{2}, \\ \beta(x) &= \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x v_0(\xi)d\xi - \frac{C}{2} \end{aligned}$$

şi deci soluţia trebuie să fie

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+at)+u_0(x-at)}{2} + \int\limits_{x-at}^{x+at} v_0(\xi)d\xi.$$

Această formulă se numeşte *formula lui D'Alembert.*

Se verifică imediat că dacă $u_0(x)$ este o funcţie de două ori derivabilă pe axa reală şi dacă $v_0(x)$ este o funcţie derivabilă pe axa reală atunci expresia de mai sus furnizează o soluţie a ecuaţiei omogene a corzii. Dacă aceste condiţii nu sunt satisfăcute atunci formula de mai sus furnizează o funcţie care trebuie să aibă o legătură cu problema noastră. O vom numi *soluţie generalizată* a problemei considerând-o ca limită a soluţiilor corespunzătoare unor date care verifică condiţiile de mai sus şi care tind către acele funcţii $u_0(x)$, $v_0(x)$.

Din formula lui D'Alembert se vede că problema lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă a corzii este *corect pusă,* adică nu numai că are soluţie unică, dar soluţia depinde continuu de datele iniţiale în sensul că dacă datele iniţiale $u_0(x), v_0(x)$ diferă în modul prin cel mult ε soluţia diferă în modul prin cel mult $(1+t)\varepsilon$.

Formula lui D'Alembert arată că valoarea lui $u(x,t)$ depinde numai de valorile iniţiale $u_0(\xi), v_0(\xi)$ în intervalul $x-at \leq \xi \leq x+at$. Acest interval se numeşte *intervalul de dependenţă* de datele iniţiale pentru u în punctul (x,t). Capetele acestui interval sunt intersecţiile caracteristicilor care trec prin punctul (x,t) cu axa Ox. Invers valorile $u_0(\xi), v_0(\xi)$ în punctul ξ influienţează valorile lui u la momentul t pentru acele valori pentru care $|x-\xi| \leq at$. Acest domeniu se numeşte *domeniul de influienţă* al datelor iniţiale din punctul $(\xi,0)$; el este limitat de caracteristicile care trec prin punctul $(\xi,0)$.

Dacă datele iniţiale $u_0(\xi), v_0(\xi)$ sunt nenule numai într-un interval I al axei Ox atunci funcţia u la momentul t va fi nenulă în două intervale J_1, J_2 cu proprietatea că distanţele punctelor lor la punctele lui I nu depăşesc at. Adică putem spune că perturbaţia dată de datele iniţiale se propagă spre stânga şi spre dreapta cu viteza a.

Să considerăm că funcţia $u_0(\xi)$ este nenulă numai în intervalul $(-\varepsilon,\varepsilon)$, iar funcţia $v_0(\xi)$ este peste tot nulă, altfel spus coarda a fost scoasă din poziţia iniţială numai pe intervalul $(-\varepsilon,\varepsilon)$ şi a fost lăsată liberă. In acest caz la momentul t funcţia $u(x,t)$ va fi nenulă pe intervalele AA', BB' unde punctele au coordonatele $A(-\varepsilon-at)$, $A'(-at+\varepsilon)$, $B'(-\varepsilon+at)$, $B(at+\varepsilon)$. Punctele A, B alcătuiesc *frontul anterior de undă* în sensul că la ele ajunge prima dată perturbaţia, iar punctele A', B' alcătuiesc *frontul posterior de undă* în sensul că după ele dispare perturbaţia.

Să considerăm acum că funcţia $u_0(\xi)$ este nulă peste tot, în schimb funcţia $v_0(\xi)$ este nenulă numai pe intervalul $(-\varepsilon, \varepsilon)$, de exemplu porţiunea $(-\varepsilon, \varepsilon)$ a corzii a fost lovită cu un ciocănel. In această situaţie la momentul t funcţia $u(x,t)$ va fi nenulă pe intervalul A, B unde punctele au coordonatele $A(-\varepsilon - at)$, $B(at + \varepsilon)$. Acum punctele A, B alcătuiesc frontul anterior de undă frontul posterior lipsind. In această situaţie se zice că are loc *difuzia undelor.* Evident în cazul general al perurbaţiilor are loc fenomenul difuziei undelor corzii.

Vom observa că deoarece ecuaţia corzii nu se modifică la înlocuirea lui t cu $t - t_0$ vom avea pentru orice $t > t_0$

$$u(x,t) = \frac{u_1(x + a(t-t_0)) + u_1(x - a(t-t_0))}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-t_0)}^{x+a(t-t_0)} v_1(\xi) d\xi,$$

unde

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u(x, t_0), \\ v_1(x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) \end{aligned}$$

15.3 Exerciţii

1. O coardă infinită capătă prin ciupire în origine poziţia iniţială dată de funcţia

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x < -l \\ h(1 + \frac{x}{l}) & pentru \quad -l < x < 0 \\ h(1 - \frac{x}{l}) & pentru \quad 0 < x < l \\ 0 & pentru \quad x > l \end{cases}$$

Să se scrie forma corzii în diferite momente dacă este lăsată liberă să oscileze.

R. Scriem numai pentru valorile $x \geq 0$, coarda fiind simetrică

a) $0 < t < \frac{at}{l}$

$$u(x,t) = \begin{cases} h(1-\frac{at}{l}) & pentru \quad 0 \leq x \leq at \\ h(1-\frac{x}{l}) & pentru \quad at < x < l - at \\ \frac{h}{2}(1-\frac{x-at}{l}) & pentru \quad l - at < x < l + at \\ 0 & pentru \quad x > l + at; \end{cases}$$

b) $\frac{l}{2a} < t < \frac{l}{a}$

$$u(x,t) = \begin{cases} h(1-\frac{at}{l}) & pentru \quad 0 \leq x \leq l - at \\ \frac{h}{2}(1+\frac{x-at}{l}) & pentru \quad l - at < x < at \\ \frac{h}{2}(1-\frac{x-at}{l}) & pentru \quad at < x < l + at \\ 0 & pentru \quad x > l + at; \end{cases}$$

c) $t > \frac{l}{a}$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & pentru \quad 0 \leq x \leq at - l \\ \frac{h}{2}(1+\frac{x-at}{l}) & pentru \quad at - l < x < at \\ \frac{h}{2}(1-\frac{x-at}{l}) & pentru \quad at < x < l + at \\ 0 & pentru \quad x > l + at. \end{cases}$$

2. O coardă infinită este lovită în origine cu un ciocănel de lăţime $2l$ comunicând acestei porţiuni o viteză v. Să se scrie ecuaţia vibraţiilor corzii.

R. $u(x,t) = \Phi(x+at) - \Phi(x-at)$ unde

$$\Phi(x) = \begin{cases} -0 & pentru \quad x < -l \\ \frac{v(x+l)}{2a} & pentru \quad -l < x < l \\ \frac{vl}{a} & pentru \quad x > l. \end{cases}$$

3. O coardă infinită este lovită în origine cu un ciocănel ascuţit comunicând un impuls I. Să se gasească oscilaţiile corzii .

Ind. Se poate folosi problema precedentă considerând la început impulsul distribuit uniform pe $(-l,l)$ deci imprimând acestui interval viteza $v = \frac{I}{2l\rho}$. Când $l \to 0$ funcţia $\Phi(x)$ are limită pe $\frac{I}{2a\rho}h(x)$, h fiind funcţia treaptă. Rezultă

$$u(x,t) = \frac{I}{2a\rho}[h(x+at) - h(x-at)].$$

4. Să se rezolve ecuaţia $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ cu condiţiile $u(x,0) = x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = e^x$.

R. $u(x,t) = x + \frac{1}{2}e^x \sinh 2t$.

15.4 Problema lui Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a corzii

Considerăm problema lui Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a corzii: să se determine soluţia $u(x,t)$ în domeniul $x \in R, t \geq 0$ a ecuaţiei corzii neomogene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

care verifică condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0} &= u_0(x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= v_0(x). \end{aligned}$$

Cum diferenţa a două soluţii ale acestei probleme este soluţie a problemei lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă a corzii cu condiţii iniţiale nule, adică după cele precedente o funcţie nulă rezultă că problema lui Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a corzii admite soluţie unică.

In virtutea linearităţii, diferenţa $w(x,t)$ dintre soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia neomogenă şi soluţia problemei lui Cauchy pentru problema omogenă cu aceleaşi date iniţiale este soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia neomogenă cu date nule. Este deci suficient să rezolvăm problema lui Cauchy

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x,t)$$

cu datele iniţiale nule

$$\begin{aligned} w(x,t)|_{t=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Vom încerca să stabilim în mod euristic forma soluţiei $w(x,t)$. Ne amintim că în deducerea ecuaţiei corzii, $\rho\sigma f(x,t)dx$ reprezenta mărimea forţei exterioare verticale care acţiona asupra porţiunii corzii de secţiune σ cuprinse între secţiunile de abscise $x, x+dx$. Să presupunem că asupra corzii acţionează între momentele τ şi $\tau+d\tau$ forţa $\rho\sigma f(x,\tau)dx$. Ea comunică elementului $(x, x+dx)$ al corzii impulsul $\rho\sigma f(x,\tau)dxd\tau$ şi deci imprimă acestui element viteza $f(x,\tau)d\tau$. Dar atunci după formula lui D'Alembert acesteia îi va corespunde deplasarea elementară

$$v(x,t,\tau)d\tau = \frac{d\tau}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi.$$

Rezultă că acţiunea termenului liber $f(x,t)$ trebuie să fie echivalentă cu suprapunerea deplasărilor de mai sus

$$w(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t,\tau)d\tau = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi.$$

Vom observa că funcţia $v(x,t,\tau)$ este de fapt soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} v(x,t,\tau)\big|_{t=\tau} &= 0, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=\tau} &= f(x,\tau), \end{aligned}$$

adică prezenţa termenului liber a trecut în a doua condiţie iniţială pentru timpul $t=\tau$. Acest fapt este cunoscut sub numele de *principiul lui Duhamel*. Să arătăm că în adevăr funcţia $w(x,t)$ este soluţie a problemei noastre. Avem evident $w(t,0)=0$. Mai departe

$$\frac{\partial w}{\partial t} = v(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial v(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial v(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau$$

şi deci $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$. Mai departe

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial v(x,t,t)}{\partial t} + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 v(x,t,\tau)}{\partial t^2}d\tau = f(x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 v(x,t,\tau)}{\partial t^2}d\tau$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 v(x,t,\tau)}{\partial x^2}d\tau$$

şi deci

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x,t) + \int\limits_0^t \left(\frac{\partial^2 v(x,t,\tau)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v(x,t,\tau)}{\partial x^2}\right)d\tau = f(x,t)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Dacă în expresia lui $w(x,t)$ facem schimbarea de variabilă $a(t-\tau)=r$ şi scriem că până la momentul $t=0$ nu avem mişcare se poate scrie

$$w(x,t)=\frac{h(t)}{2a^2}\int\limits_0^{at}dr\int\limits_{x-r}^{x+r}f(\xi,t-\frac{r}{a})d\xi$$

expresia din dreapta numindu-se potenţial întârziat. Prin $h(t)$ am notat funcţia lui Heaviside.

Să presupunem că funcţia $f(x,t,\varepsilon)$ este nenulă numai pe intervalul $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ în aşa fel încât

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(x,t,\varepsilon)dx=F(t)h(t)$$

Presupunem condiţiile iniţiale nule. Asta ar însemna că până în momentul iniţial coarda se găsea în repaus şi din momentul iniţial asupra corzii în origine acţionează o forţă concentrată variabilă în timp $\delta(x)F(t)$. Vom avea printr-un calcul imediat

$$w(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}w(x,t,\varepsilon)=\frac{h(t)}{2a}\int\limits_0^{t-\frac{|x|}{a}}F(\lambda)d\lambda$$

Dacă $F(t)h(t)=\cos\omega t h(t)$ atunci vom avea

$$w(x,t)=\frac{h(t)}{2a\omega}\sin\left(\omega\left(t-\frac{|x|}{a}\right)\right)$$

adică o undă divergentă, care se îndepărtează de origine.

Dacă presupunem acum că în timp forţa $F(t,\sigma)$ este nenulă numai pe un interval mic $(0,\sigma)$ astfel încât

$$\lim_{\sigma\to 0}\int\limits_0^t F(\tau,\sigma)d\tau=1$$

obţinem

$$\Omega(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0,\sigma\to 0}w(x,t,\varepsilon,\sigma)=\frac{h(t)}{2a}h(t-\frac{|x|}{a}).$$

Putem spune că funcţia

$$\Omega(x,t)=\frac{h(t)}{2a}h(t-\frac{|x|}{a})=\frac{1}{2a}h(at-|x|)$$

reprezintă perturbaţia care corespunde unei impuls unitar de forma $\rho\delta(x)\delta(t)$. Aceasta este concentrată la momentul $t>0$ în intervalul $-at\leq x\leq at$, adică avem două fronturi de undă anterioare care se propagă cu viteza a la dreapta respectiv la stânga. Funcţia $\Omega(x,t)$ se numeşte *soluţia fundamentală a ecuaţiei corzii.* Formal putem spune că ea este soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t).$$

Evident unui impuls $\rho\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$ în punctul ξ la momentul τ îi corespunde unda $\Omega(x-\xi, t-\tau)$.

Se vede uşor că soluţia problemei Cauchy cu date iniţiale nule pentru ecuaţia neomogenă

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x,t)$$

se poate scrie sub forma

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)h(\tau)\Omega(x-\xi, t-\tau)d\xi$$

adică ea este suprapunerea undelor date de impulsurile elementare

$$\rho f(\xi,\tau)h(\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau, \xi \in (-\infty,\infty), \tau \in (-\infty,\infty)$$

care ar corespunde scrierii

$$f(x,t)h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)h(\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi.$$

Vom mai observa că putem scrie soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă cu datele iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,t)\big|_{t=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= v_0(x), x \in (-\infty,\infty) \end{aligned}$$

sub forma

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(\xi)\Omega(x-\xi,t)d\xi,$$

adică soluţia este suprapunerea undelor date de suma perturbaţiilor elementare

$$\rho\sigma v_0(\xi)\delta(x-\xi)d\xi\delta(t)$$

ceea ce înseamnă că impunerea unei viteze iniţiale $v_0(\xi)$ în punctul ξ este echivalentă cu un impuls elementar $\rho\sigma v_0(\xi)\delta(x-\xi)d\xi\delta(t)$, lucru acceptabil intuitiv.

Vom mai observa că soluţia $u(x,t)$ a problemei lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă cu datele iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0} &= u_0(x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0, x \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

este derivata în raport cu timpul a soluţiei $w(x,t)$ a problemei lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă cu datele

$$\begin{aligned} w(x,t)|_{t=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} &= u_0(x), x \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

adică putem scrie

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\Omega(x-\xi,t)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\frac{\partial \Omega(x-\xi,t)}{\partial t} d\xi$$

adică soluţia $u(x,t)$ este suprapunerea undelor date de impulsuri elementare de forma

$$\rho\sigma u_0(\xi)\delta(x-\xi)\delta'(t)d\xi$$

adică impunerea unei poziţii iniţiale $u_0(\xi)$ a punctului ξ este echivalentă cu un impuls elementar $\rho\sigma u_0(\xi)\delta(x-\xi)\delta'(t)$ adică trebuie să aplicăm un impuls

$$\frac{\rho\sigma u_0(\xi)\delta(x-\xi)\delta(t)}{\tau} d\xi$$

şi după un timp mic τ aplicăm impulsul de semn contrar

$$-\frac{\rho\sigma u_0(\xi)\delta(x-\xi)\delta(t-\sigma)}{\tau} d\xi.$$

Aceasta este în concordanţă cu intuiţia.

In concluzie putem spune că soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a corzii cu date iniţiale este suprapunerea undelor datorate impulsurilor elementare

$$\rho\sigma f(\xi,t)\delta(t-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau + \rho\sigma v_0(\xi)\delta(x-\xi)\delta(t)d\xi + \rho\sigma u_0(\xi)\delta(x-\xi)\delta'(t)d\xi.$$

Acesta este sensul matematic al aşa numitului *principiu al suprapunerii undelor*.

15.5 Exerciţii

Să se rezolve ecuaţiile cu condiţiile ataşate:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16$, $u(x,0) = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 6x$.

R. $u(x,y) = (x+3t)^2$.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 t$, $u(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x$.

R. $u(x,t) = \frac{x^2 t^3}{6} + \frac{t^5}{15} + xt + \sin t \cos 2t$.

15.6 Soluţia fundamentală a ecuaţiei corzii

Vom încerca acum să deducem pe cale euristică expresia soluţiei fundamentale $\Omega(x,t)$ a ecuaţiei corzii. Aceasta trebuie să reprezinte unda care ia naştere în coardă în urma unui impuls datorat unei forţe unitare $\rho\sigma\delta(x)\delta(t)$ aplicată în originea $x=0$ la momentul $t=0$. Evident aceasta trebuie să fie o undă divergentă, adică se deplasează din origine în spre capete în mod simetric, deci trebuie să depindă de $|x| = r$. Din teorema impulsului rezultă că impulsul se va conserva tot timpul, deci va trebui să avem

$$\rho\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Omega(x,t)}{\partial t} dx = \rho\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx \int\limits_{0}^{t} \delta(\tau) d\tau = \rho\sigma, t > 0.$$

Pe de altă parte să observăm că dacă o funcţie $u(x,t)$ este soluţie a ecuaţiei corzii

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

atunci funcţia $v(x,t) = u(kx, \lambda t)$ verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\lambda^2}{k^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

şi deci funcţia $u(kx, kt)$ verifică aceeaşi ecuaţie. In cazul nostru odată cu soluţia fundamentală $\Omega(x,t)$ vom avea şi soluţia $v(x,t) = \Omega(kx,kt)$ pentru orice număr k real. Impulsul acestei soluţii va fi

$$\rho\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v(x,t)}{dt} dx = \rho\sigma k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Omega(kx,kt)}{dt} dx = \rho\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Omega(x',kt)}{dt} dx' = \rho\sigma$$

adică funcţia $\Omega(kx,kt)$ dă acelaşi impuls ca şi funcţia $\Omega(x,t)$. Cum ne aşteptăm la unicitate trebuie să avem $\Omega(kx,kt) = \Omega(x,t)$ pentru orice k real. In particular pentru

$k = \frac{a}{x}$ avem $\Omega(x,t) = \Omega(1, \frac{at}{x}) = g(\frac{at}{r})$ unde g este o funcţie ce trebuie determinată. Scriind că

$$\frac{\partial^2 g(\frac{at}{r})}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 g(\frac{at}{r})}{\partial r^2}$$

rezultă

$$g''(\zeta)(\zeta^2 - 1) + 2\zeta g'(\zeta) = 0, \zeta = \frac{at}{r}.$$

Integrând această ecuaţie obţinem

$$g(\zeta) = \frac{C}{2} \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

căreia îi corespunde soluţia

$$u(x,t) = \frac{C}{2} \ln \frac{at - r}{at + r} = \frac{C}{2}(\ln(at - r) - \ln(at + r))$$

care nu convine pentru că are o undă convergentă. Suntem obligaţi să căutăm pentru ecuaţia diferenţială de mai sus o soluţie în distribuţii. O asemenea soluţie este evident $g'(\zeta) = C\delta(\zeta - 1)$ adică $g(\zeta) = Ch(\zeta - 1)$ care ne dă soluţia

$$\Omega(x,t) = Ch(\frac{at}{r} - 1) = Ch(at - r) = Ch(at - |x|)$$

h fiind funcţia lui Heaviside. Acestei soluţii îi corespunde impulsul

$$\rho\sigma C \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x,t) dx = \rho\sigma C \frac{\partial}{\partial t} \int_{-at}^{at} dx = \rho\sigma C \frac{\partial}{\partial t} 2at = 2\rho\sigma C a = \rho\sigma$$

şi deci $C = \frac{1}{2a}$ şi obţinem expresia soluţiei fundamentale

$$\Omega(x,t) = \frac{1}{2a} h(at - |x|).$$

In general impulsului $\rho\sigma\delta(x - \xi)\delta(t - \tau)$ îi va corespunde soluţia

$$\Omega(x - \xi, t - \tau) = \frac{h(t - \tau)}{2a} h(a(t - \tau) - |x - \xi|).$$

Evident aceasta este o deducere euristică. Putem scrie expresia soluţiei ecuaţiei corzii infinite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,t)\big|_{t=0} &= u_0(x), x \in (-\infty, \infty) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= u_0(x), x \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

ca fiind suprapunerea undelor datorate impulsurilor elementare

$$\rho\sigma f(\xi,\tau)\delta(t-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau + \rho\sigma v_0(\xi)\delta(x-\xi)\delta(t)d\xi + \rho\sigma u_0(\xi)\delta(x-\xi)\delta'(t)d\xi$$

adică

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at} u_0(\xi)d\xi,$$

ultimul termen fiind evident

$$\frac{1}{2a}\left(u_0(x-at)+u_0(x+at)\right)$$

Prin faptul că am regăsit soluţia de mai înainte ajungem la concluzia că au fost îndreptăţite consideraţiile euristice.

15.7 Obţinerea soluţiei ecuaţiei corzii pe baza formulei lui Green

Dacă $u(x,t), v(x,t)$ sunt două funcţii oarecare cu derivate parţiale de ordinul doi continue într-un domeniu D putem scrie

$$v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{\partial u}{\partial t}\right) - a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + a^2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial v}{\partial t}\right) - a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + a^2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Prin scădere obţinem formula lui Green

$$v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\right) - a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Integrând pe domeniul D obţinem formula integrală a lui Green pentru ecuaţia corzii

$$\int_D \left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right] dxdt =$$

$$= \int_{\partial D} \left[v\left(\frac{\partial u}{\partial t}n_t - a^2\frac{\partial u}{\partial x}n_x\right) - u\left(\frac{\partial v}{\partial t}n_t - a^2\frac{\partial v}{\partial x}n_x\right)\right] ds$$

unde am notat prin n_x, n_t componentele versorului normalei $\overrightarrow{n}(n_x,n_t)$ exterioare la ∂D.

Dacă luăm cazul $a = 1$, la care ne putem reduce prin schimbarea de variabile $t = at'$, vom avea

$$\int\limits_D \left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right] dxdt =$$
$$= \int\limits_{\partial D} \left[v\left(\frac{\partial u}{\partial t} n_t - \frac{\partial u}{\partial x} n_x\right) - u\left(\frac{\partial v}{\partial t} n_t - \frac{\partial v}{\partial x} n_x\right)\right] ds.$$

Dacă acum vom nota cu $\overrightarrow{N}$ versorul cu componentele $(n_t, -n_x)$ adică simetricul normalei interioare la ∂D faţă de o paralelă la axa x-ilor vom putea scrie formula lui Green sub o formă asemănătoare celei de la operatorul lui Laplace

$$\int\limits_D [v\Box u - u\Box v]\, dxdt = \int\limits_{\partial D} \left[v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}\right] ds,$$

unde am introdus operatorul numit *dalambertian*

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Versorul $\overrightarrow{N}$ se numeşte *versorul conormalei interioare* la frontiera ∂D .

Să considerăm un domeniu D din planul xOt a cărui frontieră să fie alcătuită din curbe caracteristice şi dintr-o curbă C astfel încât oricare din cele două caracteristici care pleacă dintr-un punct al domeniului taie curba C într-un singur punct. Un asemenea domeniu este de exemplu semiplanul $t \geq 0$, sau domeniul limitat de două verticale $x = 0$, $x = l$ şi de axa x-lor, sau domeniul limitat de două caracteristici care alcătuiesc conul viitor al unui punct. Fie $Q(x_0, t_0)$ un punct din domeniul D. Să notăm prin D_Q domeniul limitat de caracteristicile punctului Q şi de curba C. Să mai notăm prin C_Q porţiunea din curba C care este frontieră a domeniului D_Q şi prin Q_1, Q_2 capetele curbei C_Q parcursă în sensul care lasă domeniul D_Q la stânga. Considerăm ca funcţie v funcţia egală cu unitatea proporţională cu $\Omega(x, t; x_0, t_0)$ şi scriem formula lui Green pentru domeniul D_Q

$$\int\limits_{D_Q} \Box u dxdt = \int\limits_{\partial D_Q} \frac{\partial u}{\partial N} ds = \int\limits_{C_Q} \frac{\partial u}{\partial N} ds + \int\limits_{Q_2Q} \frac{\partial u}{\partial N} ds + \int\limits_{QQ_1} \frac{\partial u}{\partial N} ds.$$

Dar pe porţiunea Q_2Q $\overrightarrow{N}$ coincide cu direcţia lui Q_2Q şi deci

$$\int\limits_{Q_2Q} \frac{\partial u}{\partial N} ds = u(Q) - u(Q_2),$$

pe porţiunea QQ_1 $\overrightarrow{N}$ coincide cu direcţia lui Q_1Q şi deci

$$\int\limits_{QQ_1} \frac{\partial u}{\partial N} ds = u(Q) - u(Q_1).$$

Rezultă că dacă $u(x,t)$ este soluţie ecuaţiei $\Box u = f(x,t)$ atunci

$$u(Q) = \frac{u(Q_1) + u(Q_2)}{2} - \int\limits_{C_Q} \frac{\partial u}{\partial N} ds + \frac{1}{2} \int\limits_{D_Q} f(x,t) dx dt.$$

In cazul în care domeniul D este semiplanul $t \geq 0$ atunci C_Q este alcătuit din segmentul axei x-lor cuprins între punctele Q_1de abscisă $x_0 - t_0$ şi Q_2 de abscisă $x_0 + t_0$, $\overrightarrow{N}$ este opusul versorului axei t-urilor, adică $\frac{\partial u}{\partial N} = -\frac{\partial u}{\partial t}$ şi avem

$$u(x_0, t_0) = \frac{u(x_0 - t_0, 0) + u(x_0 + t_0, 0)}{2} + \int\limits_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{x_0 - (t_0 - t)}^{x_0 + (t_0 - t)} f(x,t) dx$$

adică formula obţinută mai înainte.

In cazul în care domeniul este limitat de două caracteristici care pleacă din punctul A în sus vom avea cu notaţiile de mai sus

$$u(Q) = u(Q_1) + u(Q_2) - u(A) + \frac{1}{2} \int\limits_{D_Q} f(x,t) dx dt$$

adică avem soluţia *problemei lui Gourssat* în care se cunosc valorile valorile funcţiei u de-a lungul celor două caracteristici care pleacă din A.

15.8 Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia membranei

Să încercăm să găsim pe cale euristică soluţia fundamentală $\Omega(x,y,t)$ a ecuaţiei membranei. Ea trebuie să descrie unda divergentă care ia naştere în membrană sub acţiunea impulsului $\rho\delta(x)\delta(y)\delta(t)$ al unei forţe unitare aplicată în origine $x = y = 0$ la momentul $t = 0$. In virtutea simetriei aceasta trebuie să depindă numai de distanţa de la punct la origine $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Cum impulsul se conservă în timp va trebui să avem

$$\rho \int \frac{\partial \Omega(x,y,t)}{\partial t} dx dy = \rho \int \delta(x,y) dx dy \int\limits_0^t \delta(\tau) d\tau = \rho, t > 0,$$

integralele fiind extinse la tot planul. Şi aici se verifică uşor că odată cu soluţia $\Omega(x, y, t)$ avem şi soluţia $v(x, y, t) = \Omega(kx, ky, kt)$. Impulsul acesteia va fi

$$\rho \int \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} dxdy = \rho k \int \frac{\partial \Omega(kx, ky, kt)}{\partial t} dxdy = \frac{\rho}{k} \int \frac{\partial \Omega(x', y', kt)}{\partial t} dx'dy = \frac{\rho}{k}.$$

Deci funcţiile $\Omega(x, y, t)$ şi $k\Omega(kx, ky, kt)$ au acelaşi impuls oricare ar fi k real. Cum ne aşteptăm la unicitate rezultă că trebuie să aibă loc relaţia $\Omega(x, y, t) = k\Omega(kx, ky, kt)$ oricare ar fi k real, mai exact trebuie să aibă loc relaţia $\Omega(r, t) = k\Omega(kr, kt)$. In particular pentru $k = \frac{a}{r}$ obţinem $\Omega(r, t) = \frac{a}{r}\Omega(a, \frac{at}{r}) = \frac{a}{r}g(\frac{at}{r})$ unde g este o funcţie care trebuie determinată din condiţia de a verifica ecuaţia membranei

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} - a^2 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right] = 0.$$

Vom observa că putem scrie $\Omega(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} G(\frac{at}{r})$, unde vom cere ca numai funcţia omogenă $G(\frac{at}{r})$ să verifice ecuaţia membranei. Notând $\zeta = \frac{at}{r}$ găsim că trebuie verificată ecuaţia

$$G''(\zeta)(\zeta^2 - 1) + G'(\zeta)\zeta = 0$$

de unde deducem

$$G'(\zeta) = C \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Acesteia îi corespunde soluţia

$$u(r, t) = C \frac{a}{r} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 t^2}{r^2} - 1}} = Ca \frac{h(at - r)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}}$$

care reprezintă în adevăr o undă divergentă. Impulsul acesteia este

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int u(r, t) r dr d\theta = \rho Ca \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{at} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} = 2\pi \rho Ca \frac{\partial}{\partial t} at = 2\pi \rho C a^2 = \rho$$

şi rezultă $C = \frac{1}{2\pi a^2}$ astfel că soluţia fundamentală este

$$\Omega(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{h(at - r)h(t)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}}, r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Deci impulsului $\rho\delta(x)\delta(y)\delta(t)$ îi corespunde perturbaţia $\Omega(x, y, t)$ concentrată la momentul $t > 0$ în cercul închis de rază at cu centrul în $(0, 0)$. Există deci un front anterior al undei care se propagă în plan cu viteza a fără să existe un front posterior. Se zice că în acest caz are loc difuzia undelor.

Unui impuls $\rho\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(t-\tau)$ îi va corespunde unda

$$\Omega(x-\xi, y-\eta, t-\tau) = \frac{1}{2\pi a}\frac{h(a(t-\tau)-r)h(t-\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}, r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

Ca şi în cazul corzii soluţia $u(x,y,t)$ a ecuaţiei omogene a membranei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\triangle_{xy}u = 0$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,y,t)|_{t=0} &= u_0(x,y), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= v_0(x,y) \end{aligned}$$

trebuie să fie suprapunerea undelor datorate impulsurilor elementare

$$v_0(\xi,\eta)\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(t)d\xi d\eta + u_0(\xi,\eta)\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta'(t)d\xi d\eta$$

adică

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \int v_0(\xi,\eta)\Omega(x-\xi,y-\eta,t)d\xi d\eta + \\ &+\frac{\partial}{\partial t}\int u_0(\xi,\eta)\Omega(x-\xi,y-\eta,t)d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Aceasta se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{C_{at}} \frac{u_0(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta + \\ &+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{C_{at}} \frac{v_0(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta \end{aligned}$$

unde C_{at} este cercul cu centrul în (x,y) de rază $at : (\xi-x)^2+(\eta-y)^2 \leq a^2t^2$. Se verifică prin calcule că dacă datele iniţiale $u_0(x,y), v_0(x,y)$ sunt funcţii de trei ori derivabilă respectiv de două ori derivabilă formula de mai sus numită *formula lui Poisson* furnizează în adevăr soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă a membranei.

Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia membranei neomogene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\triangle_{xy}w &= f(x,y,t) \\ w(x,y,t)|_{t=0} &= 0 \\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

va fi va fi suprapunerea undelor datorate impulsurilor elementare

$$f(\xi,\eta,\tau)\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(t-\tau)d\xi d\eta d\tau$$

adică

$$w(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_{C_{a(t-\tau)}}\frac{f(\xi,\eta,t)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta d\tau.$$

Se observă că funcţionează principiul lui Duhamel. Făcând schimbarea de variabilă $a(t-\tau)=r$ se poate scrie

$$w(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{at}dr\int_{\sqrt{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}<r}\frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})d\xi d\eta}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}$$

formă numită *potenţial întârziat (retardat).*

Soluţia $u(x,y,t)$ a ecuaţiei membranei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\triangle_{xy}u=f(x,y,t)$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned}u(x,y,t)|_{t=0}&=u_0(x,y),\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}&=v_0(x,y)\end{aligned}$$

va fi suprapunerea undelor datorate impulsurilor elementare

$$f(\xi,\eta,\tau)\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(t-\tau)d\xi d\eta d\tau+v_0(\xi,\eta)\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(t)d\xi d\eta+$$
$$+u_0(\xi,\eta)\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta'(t)d\xi d\eta$$

adică

$$\begin{aligned}u(x,y,t)&=\int f(\xi,\eta,\tau)\Omega(x-\xi,y-\eta,t-\tau)d\xi d\eta d\tau+\int v_0(\xi,\eta)\Omega(x-\xi,y-\eta,t)d\xi d\eta+\\ &+\frac{\partial}{\partial t}\int u_0(\xi,\eta)\Omega(x-\xi,y-\eta,t)d\xi d\eta.\end{aligned}$$

15.9 Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia undelor

Vom încerca mai întâi să deducem pe cale euristică soluţia fundamentală $\Omega(x,y,z,t)$ a ecuaţiei undelor în spaţiu. Aceasta va reprezenta unda sonoră care va rezulta în aer în urma unui impuls unitar $\rho\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)$ în origine la momentul $t = 0$. In virtutea simetriei aceasta va trebui să depindă numai de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Cum impulsul se conservă în timp vom avea

$$\rho \int \frac{\partial \Omega(x, y, z, t)}{\partial t} dxdydz = \rho$$

integrala fiind extinsă la întreg spaţiul. Şi aici odată cu soluţia $\Omega(x, y, z, t)$ vom avea soluţia $v(x, y, z, t) = \Omega(kx, ky, kz, kt)$. Impulsul acesteia este

$$\rho k \int \frac{\partial \Omega(kx, ky, kz, kt)}{\partial t} dxdydz = \frac{\rho}{k^2} \int \frac{\partial \Omega(x', y', z', kt)}{\partial t} dx'dy'dz' = \frac{\rho}{k^2}.$$

Rezultă că soluţia $k^2\Omega(kx, ky, kz, kt)$ are acelaşi impuls ca şi soluţia $\Omega(x, y, z, t)$. Cum ne aşteptăm la unicitate rezultă că vom avea $k^2\Omega(kx, ky, kz, kt) = \Omega(x, y, z, t)$ pentru orice k real. Exprimat în funcţie de r vom avea $k^2\Omega(kr, kt) = \Omega(r, t)$ pentru orice k real. In particular pentu $k = \frac{a}{r}$ vom avea $\Omega(r, t) = \frac{a^2}{r^2}\Omega(a, \frac{at}{r}) = \frac{a^2}{r^2} g(\frac{at}{r})$. Mai mult vom observa că putem lua $\Omega(r, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\frac{at}{r})$ unde $G(\frac{at}{r})$ verifică ecuaţia undelor. Scriind aceasta rezultă $G''(\zeta)(\zeta^2 - 1) = 0$, $\zeta = \frac{at}{r}$. Rezultă că $G(\zeta) = C\zeta + C_1$. Pentru a avea o undă divergentă neapărat $C_1 = -C$. Găsim astfel $G(\zeta) = C(\zeta - 1)h(\zeta - 1)$ pentru ca ecuaţia să fie verificată şi în distribuţii. Rezultă că

$$\Omega(r, t) = C\frac{a^2}{r^2}\delta(\frac{at}{r} - 1) = C\frac{a^2}{r}\delta(at - r).$$

Impulsul acesteia va fi

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int G(r, t) r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi &= \rho C 4\pi \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int_0^{at} (at - r) r dr = \\
&= 4\pi\rho C \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{a^3 t^3}{6} = 4\pi\rho C a^3 = \rho
\end{aligned}$$

de unde $C = \frac{1}{4\pi a^3}$ de unde

$$\Omega(x, y, z, t) = \frac{h(t)}{4\pi a} \frac{\delta(at - r)}{r}.$$

Deci perturbaţia $\Omega(x, y, z, t)$ datorită impulsului $\rho\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)$ este localizată la momentul $t > 0$ pe suprafaţa sferică de rază at cu centrul în $(0, 0, 0)$, adică perturbaţia se propagă sub forma de undă sferică cu viteza a. Intr-un punct oarecare (x, y, z) perturbaţia este nenulă doar la momentul $t = \frac{r}{a}$.

Impulsului $\rho\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)\delta(t-\tau)$ îi va corespunde unda

$$\Omega(x-\xi, y-\eta, z-\zeta, t-\tau) = \frac{h(t)}{4\pi a}\frac{\delta(a(t-\tau)-r)}{r}$$

unde acum $r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

Soluţia ecuaţiei undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \triangle_{xyz} u = 0$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t)|_{t=0} &= u_0(x,y,z), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= v_0(x,y,z), \end{aligned}$$

va fi suprapunerea undelor corespunzătoare impulsurilor elementare

$$v_0(\xi,\eta,\zeta)\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)\delta(t)d\xi d\eta d\zeta +$$
$$+u_0(\xi,\eta)\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)\delta'(t)d\xi d\eta d\zeta$$

adică

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \int v_0(\xi,\eta,\zeta)\Omega(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta + \\ &+\frac{\partial}{\partial t}\int u_0(\xi,\eta,\zeta)\Omega(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Cum $d\xi d\eta d\zeta = dr d\sigma_r$ unde $d\sigma_r$ este elementul de arie pe sfera ∂S_r cu centrul în (x,y,z) şi raza r putem scrie

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\partial S_{at}} \frac{u_0(\xi,\eta,\zeta)}{t}d\sigma_{at} + \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{\partial S_{at}} \frac{v_0(\xi,\eta,\zeta)}{t}d\sigma_{at}.$$

Se verifică prin calcule că dacă datele iniţiale $u_0(x,y,z), v_0(x,y,z)$ sunt funcţii de trei ori derivabilă respectiv de două ori derivabilă atunci formula de mai sus numită *formula lui Kirchhoff-Poisson* furnizează efectiv o soluţie a ecuaţiei omogene a undelor.

Formula lui Kirchhoff-Poisson arată că perturbaţia $u(x,y,z,t)$ este complet determinată de valorile datelor iniţiale pe sfera ∂S_{at} cu centrul în (x,y,z) şi raza at. Să presupunem că acestea sunt nenule numai pe o mulţime compactă C. Intr-un punct care nu aparţine mulţimii C perturbaţia ajunge la momentul $t_0 = \frac{d}{a}$, este nenulă în intervalul de timp $\left[\frac{d}{a}, \frac{D}{a}\right]$, unde d, D sunt distanţa minimă respectiv distanţa maximă de la punct la mulţimea C. Pentru timpul $t > t_1 = \frac{D}{a}$ perturbaţia este din nou nulă. Prin punctul ales la momentul t_0 trece frontul anterior al undei iar la momentul t_1 trece frontul posterior al undei. La momentul t frontul anterior de undă este înfăşurătoarea externă a tuturor sferelor de rază at cu centrul în mulţimea C iar frontul posterior de undă este înfăşurătoarea internă a aceloraşi sfere. La un moment dat perturbaţia va fi nenulă numai între frontul anterior şi cel posterior. Cele spuse aici constituie principiul lui Huygens.

Soluţia ecuaţiei undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \triangle_{xyz} u = f(x, y, z, t)$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t)\big|_{t=0} &= u_0(x, y, z), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= v_0(x, y, z), \end{aligned}$$

va fi suprapunerea undelor corespunzătoare impulsurilor elementare

$$f(\xi, \eta, \tau)\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(t - \tau)d\xi d\eta d\tau + v_0(\xi, \eta)\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(t)d\xi d\eta +$$
$$+u_0(\xi, \eta)\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta'(t)d\xi d\eta$$

adică

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \int f(\xi, \eta, \tau)\Omega(x - \xi, y - \eta, t - \tau)d\xi d\eta d\tau + \int v_0(\xi, \eta)\Omega(x - \xi, y - \eta, t)d\xi d\eta + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int u_0(\xi, \eta)\Omega(x - \xi, y - \eta, t)d\xi d\eta. \end{aligned}$$

15.10 Problemele mixte pentru ecuaţia corzii

Pentru coarda finită suntem conduşi la probleme în care pe lângă condiţiile iniţiale avem şi anumite condiţii la capete. Asemenea probleme se numesc *probleme mixte*. Intr-o problemă mixtă trebuie determinată în domeniul $x \in [0, l]$, $t \geq 0$ soluţia $u = u(x, t)$ care verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0} &= u_0(x), x \in [0.l], \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= v_0(x), x \in [0,l], \end{aligned}$$

şi una din următoarele condiţii la limită:

Dacă avem condiţiile

$$\begin{aligned} u(o,t) &= \varphi_0(t), t \geq 0, \\ u(l,t) &= \varphi_l(t), t \geq 0 \end{aligned}$$

problema se numeşte de *primul tip sau cu condiţii de tip Dirichlet.*

Dacă avem condiţiile

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=o} &= \varphi_0(t), t \geq 0, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} &= \varphi_l(t), t \geq 0 \end{aligned}$$

problema se numeşte de *al doilea tip sau cu condiţii de tip Neuman.*

Dacă avem condiţiile

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u\right)_{x=o} &= \varphi_0(t), t \geq 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta u\right)_{x=l} &= \varphi_l(t), t \geq 0 \end{aligned}$$

problema se numeşte *de tipul trei sau cu condiţii la limită mixte.*

Printr-o problemă de interpolare totdeauna putem determina o funcţie $u_0(x,t)$ care să satisfacă condiţiile la capete. Prin schimbarea de funcţie $u(x,t) = u_0(x,t) + w(x,t)$ obţinem pentru funcţia $w(x,t)$ o problemă de acelaşi tip cu condiţii la limită omogene.

Pentru a demonstra unicitatea soluţiei unei probleme mixte folosim identitatea

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

pe care integrând-o într-un domeniu D de existenţă a soluţiei obţinem relaţia

$$\int\limits_{\partial D}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}dt = 0$$

Diferenţa a două soluţii ale unei probleme mixte este soluţie a aceleaşi probleme mixte pentru ecuaţia omogenă cu condiţii la limită omogene. Pentru o asemenea diferenţă aplicăm identitatea de mai sus în dreptunghiul cu vârfurile $O(0,0)$, $A(l,o)$, $A\prime(l,t)$, $O\prime(0,t)$. Vom obţine

$$\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=0} + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=l} dt -$$

$$-\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t} - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0} dt = 0$$

In virtutea condiţiilor iniţiale prima integrală este nulă. In problemele la limită de tipul unu sau doi integralele doi şi patru sunt nule. Rezultă că şi integrala a treia este nulă, dar atunci la momentul t oricare ar fi x avem $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Rezultă $u(x,t)$ =constant şi cum la momentul $t = 0$ este nulă rezultă că peste tot $u(x,t) = 0$. Deci am arătat unicitatea soluţiei problemelor mixte de tipul unu sau doi. In cazul problemei de tipul trei a doua integrală devine $\beta \int_0^t u\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{x=l} dt = \frac{\beta}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}u^2\big|_{x=l} = \frac{\beta}{2}u(l,t)^2$. La fel şi a patra integrală este $\frac{\alpha}{2}u(0,t)^2$. Rezultă că dacă $\alpha > 0, \beta < 0$ atunci neapărat $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$ şi a treia integrală trebuie să fie nulă şi deci $u(x,t) = 0$ peste tot, adică şi problema de tipul trei are soluţie unică.

Dacă considerăm problema iniţială şi integrăm relaţia

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

pe dreptunghiul cu vârfurile $O(0,0)$, $A(l,o)$, $A\prime(l,t)$, $O\prime(0,t)$ obţinem

$$E(0) - E(t) - a^2\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{x=l} d\tau + a^2\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{x=l} d\tau = \int_0^t\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}f(x,\tau)dxd\tau$$

unde am notat

$$E(t) = \int_0^l \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

mărimile de sub integrală fiind calculate la momentul t. Marimea $\rho E(t)$ este tocmai energia corzii la momentul t. Relaţia de mai sus scrisă sub forma

$$E(t) - E(0) = \int_0^t\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}f(x,\tau)dxd\tau - a^2\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{x=l} d\tau + a^2\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{x=0} d\tau$$

arată că variaţia energiei corzii este egală cu lucrul mecanic al forţei exterioare plus lucrul mecanic al legăturilor. In cazul problemelor de tipul lui Dirichlet sau Neuman lucrul mecanic al legăturilor este nul. In cazul problemei mixte lucrul mecanic al legăturilor este

$$-a^2\int_0^t \left(\beta u\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{x=l} d\tau + a^2\int_0^t \left(\alpha u\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{x=0} d\tau =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\beta\left[u(l,t)^2 - u(l,0)^2\right] + \frac{a^2}{2}\alpha\left[u(0,t)^2 - u(0,0)^2\right]$$

Rezultă

$$E(t) + \frac{a^2}{2}\beta u(l,t)^2 - \frac{a^2}{2}\alpha u(0,t)^2 = \int_0^t\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} f(x,\tau)dxd\tau + \frac{a^2}{2}\beta u(l,0)^2 - \frac{a^2}{2}\alpha u(0,0)^2$$

şi deci dacă $\beta > 0, \alpha < 0$ avem

$$E(t) \leq E(0) + \int_0^t\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} f(x,\tau)dxd\tau + \frac{a^2}{2}\beta u(l,0)^2 - \frac{a^2}{2}\alpha u(0,0)^2$$

Folosind inegalitatea lui Schwartz-Cauchy rezultă

$$E(t) \leq E(0) + \int_0^t\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}^2 dxd\tau + \int_0^t\int_0^l f(x,\tau)^2 dxd\tau + \frac{a^2}{2}\beta u(l,0)^2 - \frac{a^2}{2}\alpha u(0,0)^2$$

sau încă

$$E(t) \leq 2\int_0^t E(\tau)d\tau + F(t)$$

unde am notat

$$F(t) = \int_0^t\int_0^l f(x,\tau)^2 dxd\tau + \frac{a^2}{2}\beta u(l,0)^2 - \frac{a^2}{2}\alpha u(0,0)^2 + E(0)$$

funcţie crescătoare de t. Dacă notăm

$$\Phi(t) = \int_0^t E(\tau)d\tau$$

putem scrie

$$\Phi'(t) \leq 2\Phi(t) + F(t).$$

Inmulţind cu e^{-2t} rezultă

$$\Phi'(t)e^{-2t} - 2\Phi(t)e^{-2t} \leq F(t)e^{-2t}$$

sau

$$\left(\Phi(t)e^{-2t}\right)' \leq F(t)e^{-2t}$$

de unde integrând între 0 şi t rezultă

$$\Phi(t)e^{-2t} \leq \int_0^t F(\tau)e^{-2\tau}d\tau \leq F(t)(1-e^{-2t})$$

adică

$$\Phi(t) \leq F(t)e^{2t} - F(t)$$

şi deci

$$E(t) \leq F(t)e^{2t}.$$

Rezultă că dacă $u_0(x)$, $u_0'(x)$, $v_0(x)$, $f(x,t)$ sunt mici de ordinul lui ε atunci $F(t)$ este tot de ordinul lui ε şi deci şi energia $E(t)$ este tot de ordinul lui ε.

In cazul problemei lui Dirichlet avem folosind inegalitatea lui Cauchy-Schwartz

$$|u(x,t)| \leq \int_0^x |\frac{\partial u}{\partial x}|dx \leq \sqrt{l}\sqrt{\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}^2 dx} \leq \sqrt{l}a\sqrt{2E(t)}$$

adică $u(x,t)$ este mică odată cu energia.

In cazul problemelor lui Neuman şi mixtă avem

$$|u(x,t) - u(0,t)| \leq \sqrt{l}a\sqrt{2E(t)}.$$

Mai departe avem

$$|u(0,t)| = \left|\frac{1}{l}\int_0^l (u(x,t) - u(x,0) - u(x,t))dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{l}\sqrt{l}a\sqrt{2E(t)} + \left|\int_0^l u(x,t)dx\right|.$$

Din inegalitatea

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l u(x,t)dx = \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}dx \leq \sqrt{l}\sqrt{\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}^2 dx} \leq \sqrt{l}a\sqrt{2E(t)}$$

avem

$$\left|\int_0^l u(x,t)dx\right| \le \left|\int_0^l u(x,0)dx\right| + \left|\int_0^t a\sqrt{l}\sqrt{2E(\tau)}d\tau\right|$$

şi în definitiv

$$|u(x,t)| \le \sqrt{l}a\sqrt{2E(t)} + \frac{1}{l}\sqrt{l}a\sqrt{2E(t)} + \left|\int_0^l u_0(x)dx\right| + \left|\int_0^t a\sqrt{l}\sqrt{2E(\tau)}d\tau\right|.$$

In toate cele trei probleme dacă $u_0(x)$, $u_0'(x)$, $v_0(x)$, $f(x,t)$ sunt mici atunci şi $u(x,t)$ este mic, adică soluţia depinde continuu de datele iniţiale ale problemei.

15.11 Rezolvarea unor probleme mixte pentru ecuaţia corzii

1. Să rezolvăm mai întâi o problemă mixtă pentru ecuaţia corzii semiinfinite: să se determine funcţia $u(x,t)$ definită în domeniul $x \ge 0$, $t \ge 0$ soluţie a ecuaţiei corzii

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

cu condiţiile iniţiale $u(x,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0, x \ge 0$ şi condiţia la capăt $u|_{x=0} = \varphi(t)$, $t \ge 0$. Trebuie să avem condiţia de compatibilitate $\varphi(0) = 0$.

Dacă notăm prin $h(t)$ funcţia lui Heaviside şi prelungind funcţia $u(x,t)$ pentru $t < 0$ cu valori nule, putem scrie $u|_{x=0} = \varphi(t)h(t)$, $t \in R$. Cum soluţia trebuie să fie de forma

$$u(x,t) = \alpha(at+x) + \beta(at-x)$$

condiţiile iniţiale dau

$$\begin{aligned} \alpha(x) + \beta(-x) &= 0 \\ a\alpha'(x) + a\beta'(-x) &= 0, x \ge 0 \end{aligned}$$

din care deducem că pentru $x \ge 0$ avem $\alpha(x) = 0, \beta(-x) = 0$. Condiţia la capăt dă

$$\alpha(at) + \beta(at) = \varphi(t)h(t), t \in R$$

din care deducem

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= 0, x \le 0 \\ \beta(x) &= \varphi(\frac{x}{a})h(\frac{x}{a}), x \in R. \end{aligned}$$

Deci soluţia problemei este

$$u(x,t) = \varphi(t - \frac{x}{a})h(t - \frac{x}{a}),$$

adică o undă care se deplasează spre capătul liber al corzii cu viteza a. Problema corespunde exemplului clasic dat în cursurile de fizică. Mai observăm că

$$u(x, t + \frac{x}{a}) = \varphi(t)h(t),$$

adică un semnal aplicat în capătul $x = 0$ se regăseşte în punctul x la momentul $t + \frac{x}{a}$, ceea ce corespunde transmiterii de semnale.

2. Să determinăm acum funcţia $u(x,t)$ definită în domeniul $x \geq 0$, $t \geq 0$ soluţie a ecuaţiei corzii

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

cu condiţiile iniţiale $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = v_0(x), x \geq 0$ şi condiţia la capăt $u|_{x=0} = 0$, $t \geq 0$. Trebuie să avem condiţia de compatibilitate $u_0(0) = 0$.

Ca mai sus condiţia la capăt o putem scrie $u|_{x=0} = 0$, $t \in R$. Cum soluţia trebuie să fie de forma

$$u(x,t) = \alpha(at + x) + \beta(at - x)$$

condiţiile la capăt dau $\alpha(at) + \beta(at) = 0$ şi deci

$$u(x,t) = \alpha(at + x) - \alpha(at - x).$$

Condiţiile iniţiale dau

$$\begin{aligned} \alpha(x) - \alpha(-x) &= u_0(x) \\ a\alpha'(x) - a\alpha'(-x) &= v_0(x), x \geq 0 \end{aligned}$$

din care deducem că pentru $x \geq 0$ avem

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x v_0(\xi)d\xi, x \geq 0, \\ \alpha(-x) &= -\frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x v_0(\xi)d\xi, x \geq 0. \end{aligned}$$

A doua relaţie se mai scrie sub forma primeia

$$\alpha(-x) = \frac{1}{2}u_0^*(-x) + \frac{1}{2a}\int_0^{-x} v_0^*(\xi)d\xi, x \geq 0$$

numai dacă punem

$$\begin{aligned} u_0^*(-x) &= -u_0(x), x \geq 0 \\ \int_0^{-x} v_0^*(\xi)d\xi &= \int_0^{x} v_0(\xi)d\xi, x \geq 0, \end{aligned}$$

din a doua rezultând prin derivare

$$-v_0^*(-x) = v_0(x), x \geq 0.$$

Deci dacă prelungim funcţiile $u_0(x), v_0(x)$ prin imparitate faţă de origine la funcţiile $u_0^*(x), v_0^*(x)$ atunci avem

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}u_0^*(x) + \frac{1}{2a}\int_0^{x} v_0^*(\xi)d\xi, x \in R,$$

$$u(x,t) = \frac{u_0^*(x-at) + u_0^*(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0^*(\xi)d\xi.$$

ca la formula lui D'Alembert. Exprimat numai prin funcţiile iniţiale $u_0(x), v_0(x), 0 \leq x < \infty$ avem

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-at) + u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(\xi)d\xi, t \leq \frac{x}{a},$$

$$u(x,t) = \frac{-u_0(at-x) + u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} v_0(\xi)d\xi, t \geq \frac{x}{a}$$

Obsrvăm că pentru $t \leq \frac{x}{a}$ mişcarea se compune din două unde de aceeaşi formă care se deplasează spre stânga şi spre dreapta cu viteza a. Domeniul de dependenţă al unui punct (x,t), $t \leq \frac{x}{a}$ este segmentul de pe axa x-lor $(x-at, x+at)$. Pentru $t \geq \frac{x}{a}$ apare influienţa capătului fix, mişcarea fiind compunerea a undei inverse $u_0(x+at)$ şi a undei directe $-u_0(at-x)$ de formă opusă primeia. Apare deci reflectarea cu semn schimbat a undei în capătul fixat. Domeniul de dependenţă al unui punct (x,t), $t \geq \frac{x}{a}$

este segmentul $(at - x, x + at)$ capătul din stânga fiind simetricul faţă de origine al punctului $x - at$.

3. Soluţia problemei
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \geq 0, t \geq 0$$
cu condiţiile iniţiale $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = v_0(x), x \geq 0$ şi condiţia la capăt $u|_{x=0} = \varphi(t)$, $t \geq 0$, $u_0(0) = \varphi(0)$ se compune evident din suma soluţiilor celor două probleme de mai înainte: se consideră funcţiile $u_0(x)$, $v_0(x)$ prelungite prin imparitate faţă de origine în funcţiile $u_0^*(x)$, $v_0^*(x)$şi

$$u(x,t) = \varphi(t - \frac{x}{a})h(t - \frac{x}{a}) + \frac{u_0^*(x - at) + u_0^*(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0^*(\xi)d\xi.$$

4. Soluţia problemei
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \geq 0, t \geq 0$$
cu condiţiile iniţiale $u(x,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0, x \geq 0$ şi condiţia la capăt $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = \varphi(t)$, $t \geq 0$ o vom căuta sub forma

$$u(x,t) = \alpha(at + x) + \beta(at - x).$$

Condiţiile iniţiale conduc la relaţiile $\alpha(x) = 0$, $\beta(-x) = 0$ pentru $x \geq 0$. Vom scrie condiţia la capăt sub forma

$$\alpha'(at) - \beta'(at) = \varphi(t)h(t), t \in R.$$

Rezultă

$$\alpha(x) - \beta(x) = \int_0^x \varphi(\frac{\xi}{a})h(\frac{\xi}{a})d\xi = h(\frac{x}{a})\int_0^{\frac{x}{a}} \varphi(\xi)d\xi$$

şi deci

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= 0, x \in R, \\ \beta(x) &= -h(\frac{x}{a})\int_0^{\frac{x}{a}} \varphi(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Soluţia este

$$u(x,t) = -h(t - \frac{x}{a})\int_0^{t-\frac{x}{a}} \varphi(\xi)d\xi.$$

5. Soluţia problemei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \geq 0, t \geq 0$$

cu condiţiile iniţiale $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = v_0(x), x \geq 0$ şi condiţia la capăt $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$, $t \geq 0$ o vom căuta sub forma

$$u(x,t) = \alpha(at + x) + \beta(at - x).$$

Condiţia la capăt implică

$$\alpha'(at) - \beta'(at) = 0, t \in R$$

de unde deducem $\beta(x) = \alpha(x) + C$ şi deci

$$u(x,t) = \alpha(at + x) + \alpha(at - x).$$

Am înglobat constanta în α. Condiţiile iniţiale dau

$$\begin{aligned} \alpha(x) + \alpha(-x) &= u_0(x), x \geq 0, \\ a\alpha'(x) + a\alpha'(-x) &= v_0(x), x \geq 0. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x v_0(\xi)d\xi, x \geq 0, \\ \alpha(-x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x v_0(\xi)d\xi, x \geq 0. \end{aligned}$$

A doua relaţie o scriem sub forma primeia

$$u(-x) = \frac{1}{2}u_0^*(-x) + \frac{1}{2a}\int_0^{-x} v_0^*(\xi)d\xi, x \geq 0$$

cu condiţia ca

$$\begin{aligned} u_0^*(-x) &= u_0(x), x \geq 0, \\ \int_0^{-x} v_0^*(\xi)d\xi &= -\int_0^x v_0(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

A doua implică

$$v_0^*(-x) = v_0(x).$$

Cele două relaţii sunt echivalente cu prelungirea prin paritate a funcţiilor $u_0(x), v_0(x)$ faţă de origine în funcţiile şi $u_0^*(x), v_0^*(x)$

$$u(x,t) = \frac{u_0^*(x-at) + u_0^*(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} v_0^*(\xi)d\xi.$$

In acest caz mişcarea se compune din două unde, una spre dreapta, alta spre stânga care se reflectă în origine fără schimbare de semn.

6. Soluţia problemei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \geq 0, t \geq 0$$

cu condiţiile iniţiale $u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = v_0(x), x \geq 0$ şi condiţia la capăt $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \varphi(t)$, $t \geq 0$ este suma celor două soluţii de la ultimele probleme: se consideră prelungite funcţiile $u_0(x), v_0(x)$ prin paritate faţă de origine în funcţiile $u_0^*(x), v_0^*(x)$ şi

$$u(x,t) = -h(t-\frac{x}{a})\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\varphi(\xi)d\xi + \frac{u_0^*(x-at) + u_0^*(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} v_0^*(\xi)d\xi.$$

7. Să determinăm soluţia $u(x,t)$ a ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 \leq x \leq l, t \geq 0,$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0} &= 0, 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= 0, 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \end{aligned}$$

şi condiţiile la capete

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{x=0} &= \varphi(t), t \geq 0, \\ u(x,t)|_{x=l} &= 0. \end{aligned}$$

Trebuie să avem condiţia de compatibilitate $\varphi(0) = 0$. Soluţia fiind de forma

$$u(x,t) = \alpha(at+x) + \beta(at-x)$$

condiţiile iniţiale dau $\alpha(x) = 0, \beta(-x) = 0$ pentru $0 \leq x \leq l$. Condiţiile la capete vor da

$$\begin{aligned} \alpha(at) + \beta(at) &= \varphi(t)h(t), t \in R, \\ \alpha(at+l) + \beta(at-l) &= 0, t \in R. \end{aligned}$$

Acestea conduc la relaţiile

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \alpha(x-2l) - \varphi\left(\frac{x-2l}{a}\right) h\left(\frac{x-2l}{a}\right), x \in R,\\ \beta(x) &= \beta(x-2l) + \varphi\left(\frac{x}{a}\right) h\left(\frac{x}{a}\right), x \in R.\end{aligned}$$

Observând că avem

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= 0, -l \le x \le l,\\ \beta(x) &= \varphi\left(\frac{x}{a}\right) h\left(\frac{x}{a}\right), -l \le x \le l,\end{aligned}$$

rezultă că avem definite prin recursivitate pe întreaga axă reală cele două funcţii $\alpha(x), \beta(x)$. Dacă considerăm că $x \in [(2n-1)l, (2n+1)l$ vom putea scrie şirul de egalităţi

$$\alpha(x) = \alpha(x-2l) - \varphi\left(\frac{x-2l}{a}\right) h\left(\frac{x-2l}{a}\right)$$

$$\alpha(x-2l) = \alpha(x-4l) - \varphi\left(\frac{x-4l}{a}\right) h\left(\frac{x-4l}{a}\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha(x-(2n-2)l) = \alpha(x-2nl) - \varphi\left(\frac{x-2nl}{a}\right) h\left(\frac{x-2nl}{a}\right)$$

$$\alpha(x-2nl) = 0$$

Prin adunare rezultă

$$\alpha(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{x-2nl}{a}\right) h\left(\frac{x-2nl}{a}\right)$$

suma conţinând un număr finit de termeni. La fel se găseşte

$$\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{x-2nl}{a}\right) h\left(\frac{x-2nl}{a}\right).$$

Rezultă că putem scrie

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \varphi\left(t-\frac{x}{a}\right) h\left(t-\frac{x}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{at-x-2nl}{a}\right) h\left(\frac{at-x-2nl}{a}\right) +\\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{at+x-2nl}{a}\right) h\left(\frac{at+x-2nl}{a}\right),\end{aligned}$$

adică mişcarea este suprapunerea undelor care pleacă din $x = 0$ se reflectă cu schimbare de semn atât în $x = l$ cât şi în $x = 0$.

8. Să determinăm soluţia $u(x,t)$ a ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 \leq x \leq l, t \geq 0,$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0} &= u_0(x), 0 \leq x \leq l, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= v_0(x), 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \end{aligned}$$

şi condiţiile la capete

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{x=0} &= 0, t \geq 0, \\ u(x,t)|_{x=l} &= 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

Trebuie să avem condiţia de compatibilitate $u_0(0) = 0$.

Soluţia fiind de forma

$$u(x,t) = \alpha(at + x) + \beta(at - x)$$

condiţiile la capete ne dau

$$\begin{aligned} \alpha(at) + \beta(at) &= 0, t \in R, \\ \alpha(at + l) + \beta(at - l) &= 0, t \in R. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \alpha(x + 2l) &= \alpha(x), x \in R, \\ \beta(x + 2l) &= \beta(x), x \in R, \end{aligned}$$

adică funcţiile $\alpha(x), \beta(x)$ sunt periodice cu perioada $2l$. Putem scrie

$$u(x,t) = \alpha(x + at) - \alpha(at - x).$$

Condiţiile iniţiale dau

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x v_0(\xi)d\xi, 0 \leq x \leq l, \\ \alpha(-x) &= -\frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x v_0(\xi)d\xi, 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

A doua relaţie se poate scrie sub forma primeia

$$\alpha(-x) = \frac{1}{2}u_0^*(-x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{-x} v_0^*(\xi)d\xi, 0 \le x \le l$$

dacă punem

$$\begin{aligned} u_0^*(-x) &= -u_0(-x), 0 \le x \le l, \\ v_0^*(-x) &= -v_0(-x), 0 \le x \le l, \end{aligned}$$

adică funcţiile $u_0(x), v_0(x)$ trebuie prelungite prin imparitate faţă de origine în funcţiile $u_0^*(x), v_0^*(x)$. Funcţia $\alpha(x)$ fiind periodică cu perioada $2l$ vom avea

$$\alpha(x+2l) = \frac{1}{2}u_0^*(x+2l) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+2l} v_0^*(\xi)d\xi = \frac{1}{2}u_0^*(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x} v_0^*(\xi)d\xi = \alpha(x)$$

numai dacă

$$\begin{aligned} u_0^*(x+2l) &= u_0^*(x), \\ v_0^*(x+2l) &= v_0^*(x) \end{aligned}$$

adică funcţiile $u_0(x), v_0(x)$ trebuie prelungite prin periodicitate cu perioada $2l$ în funcţiile $u_0^*(x), v_0^*(x)$. Atunci vom putea scrie

$$u(x,t) = \frac{u_0^*(x-at) + u_0^*(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} v_0^*(\xi)d\xi$$

ca la formula lui D'Alembert. Vom observa că mişcarea este periodică în timp cu perioada $\frac{2l}{a}$. Pentru ca formula de mai sus să dea o veritabilă soluţie este necesar şi suficient ca prelungirile $u_0^*(x), v_0^*(x)$ să fie efectiv de două ori derivabile ceea ce se realizează când funcţiile $u_0(x), v_0(x)$ sunt de două ori derivabile pe [0,l] şi satisfac condiţiile

$$\begin{aligned} u_0(0) &= u_0'(0) = u_0''(0) = u_0(l) = u_0'(l) = u"_0(l) = 0, \\ v_0(0) &= v_0'(0) = v_0''(0) = v_0(l) = v_0'(l) = v"_0(l) = 0, \end{aligned}$$

Dacă aceste condiţii nu sunt satisfăcute formula de mai sus dă o anumită funcţie care trebuie să aibă o legătură cu problema noastră. In acest caz vom spune că avem o *soluţie generalizată a problemei noastre.*

Dacă prin punctele $(0,0)$, $(l,0)$ ducem caracteristicile $x-at=0$, $x+at=l$ acestea se taie în punctul $(\frac{l}{2},\frac{l}{2a})$ şi taie dreptele $x=0$, $x=l$ în punctele $(0,\frac{l}{a})$ respectiv $(l,\frac{l}{a})$. Prin aceste puncte ducem din nou caracteristicile şi aşa mai departe. Domeniul fazelor se împarte în acest fel în mai multe subdomenii. Considerăm un punct (x_1,t_1) în domeniul limitat de punctele $(0,0)$, $(l,0)$, $(\frac{l}{2},\frac{l}{2a})$. Putem scrie

$$u(x_1,t_1)=\frac{u_0(x_1-at_1)+u_0(x_1+at_1)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_1-at_1}^{x_1+at_1}v_0(\xi)d\xi$$

adică în acest triunghi mişcarea este suprapunerea celor două unde directă şi inversă fără a se face simţită prezenţa capetelor. Domeniul de dependenţă al acestui punct este segmentul (x_1-at_1,x_1+at_1) determinat pe axa x-lor de caracteristicile care trec prin acel punct.

Dacă considerăm un punct (x_2,t_2) în domeniul limitat de punctele $(l,0)$, $(l,\frac{l}{a})$, $(\frac{l}{2},\frac{l}{2a})$ putem scrie

$$u(x_2,t_2)=\frac{u_0(x_2-at_2)-u_0(2l-x_2-at_2)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_2-at_2}^{2l-x_2-at_2}v_0(\xi)d\xi$$

adică mişcarea este compusă din unda directă $\alpha(x_2-at_2)$ şi din unda inversă $-\alpha(2l-x_2-at_2)$ care provine din unda directă reflectată cu semn schimbat în capătul $x=l$. Domeniul de dependenţă al acestui punct este intervalul $(x_2-at_2,2l-x_2-at_2)$, determinat de caracteristicile care trec prin acest punct, una reflectată de dreapta $x=l$, capătul $2l-x_2-at_2$ fiind simetricul faţă de $x=l$ a punctului x_2+at_2.

Dacă luăm un punct (x_3,t_3) din domeniul limitat de punctele $(0,0),(0,\frac{l}{a}),(\frac{l}{2},\frac{l}{2a})$ putem scrie

$$u(x_3,t_3)=\frac{u_0(x_3+at_3)-u_0(at_3-x_3)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at_3-x_3}^{x_3+at_3}v_0(\xi)d\xi$$

adică mişcarea se compune din unda inversă $\alpha(x_3+at_3)$ şi din unda directă $-\alpha(at_3-x_3)$ care provine din unda inversă reflectată cu schimbare de semn de capătul $x=0$. Domeniul de dependenţă al acestui punct este segmentul (at_3-x_3,x_3+at_3) determinat de caracteristicile duse prin acest punct una reflectată de dreapta $x=0$, capătul at_3-x_3 fiind simetricul faţă de $x=0$ al punctului x_3-at_3. In acest mod putem determina mişcarea în oricare din domeniile descrise mai sus. Se vede astfel că fiecare undă ajungând în unul din capete se reflectă cu schimbare de semn.

Prelungirile funcţiilor $u_0(x), v_0(x)$ prin imparitate faţă de origine şi periodicitate cu perioada $2l$ sunt date de dezvoltările în serie Fourier de sinuşi

$$\begin{aligned} u_0^*(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n} \sin \frac{n\pi x}{l}, u_{0n} = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \\ v_0^*(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_{0n} \sin \frac{n\pi x}{l}, v_{0n} = \frac{2}{l} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Obţinem atunci

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(u_{0n} \cos \frac{n\pi at}{l} - \frac{v_{0n} l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at}{l} \right)$$

adică obţinem soluţia ca o suprapunere de unde staţionare

$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left(u_{0n} \cos \frac{n\pi at}{l} - \frac{v_{0n} l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at}{l} \right).$$

Vom regăsi această soluţie prin metoda lui Fourier şi acolo vom analiza semnificaţia sa.

9. Pentru a găsi soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), 0 \le x \le l, t \ge 0,$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{t=0} &= u_0(x), 0 \le x \le l, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= v_0(x), 0 \le x \le l, t \ge 0, \end{aligned}$$

şi condiţiile la capete

$$\begin{aligned} u(x,t)|_{x=0} &= 0, t \ge 0, \\ u(x,t)|_{x=l} &= 0, t \ge 0. \end{aligned}$$

este suficient acum să găsim soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x,t), 0 \le x \le l, t \ge 0,$$

cu condiţiile iniţiale nule

$$\begin{aligned} w(x,t)|_{t=0} &= 0, 0 \le x \le l, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0, 0 \le x \le l, t \ge 0, \end{aligned}$$

şi condiţiile la capete

$$\begin{aligned} w(x,t)|_{x=0} &= 0, t \geq 0, \\ w(x,t)|_{x=l} &= 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

Şi acum este valabil principiul lui Duhamel, dacă $v(x,t,\tau)$ este soluţia

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, 0 \leq x \leq l, t \geq 0,$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} v(x,t)|_{t=0} &= \ , 0 \leq x \leq l, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} &= f(x,\tau), 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \end{aligned}$$

şi condiţiile la capete

$$\begin{aligned} v(x,t)|_{x=0} &= 0, t \geq 0, \\ v(x,t)|_{x=l} &= 0, t \geq 0, \end{aligned}$$

atunci vom avea

$$w(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t,t-\tau)d\tau.$$

Dacă notăm cu $f^*(x,t)$ prelungirea prin imparitate faţă de 0 şi apoi prin periodicitate cu perioada $2l$ a funcţiei $f(x,t)$ vom avea

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f^*(\xi,\tau)d\xi$$

şi deci

$$w(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f^*(\xi,\tau)d\xi d\tau = \frac{1}{2a^2} \int\limits_0^{at} \int\limits_{x-r}^{x+r} f^*(\xi, t - \frac{r}{a})d\xi dr.$$

Prelungirea $f^*(x,t)$ se poate scrie

$$f^*(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}, f_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x,t) \sin\frac{n\pi x}{l} dx$$

15.12 Oscilaţii staţionare şi problema fără condiţii iniţiale

Un proces oscilatoriu se numeşte *staţionar* dacă el este periodic în timp. Să presupunem că asupra unei corzi finite sau infinite acţionează o forţă periodică

$$f(x,t) = f_1(x)\cos\omega t - f_2(x)\sin n\omega t.$$

Vom avea deci ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1(x)\cos\omega t - f_2(x)\sin n\omega t.$$

Dacă coarda este finită vom presupune că la capetele ei avem condiţii la limită neomogene în care membrii drepţi sunt tot de forma $\alpha\cos\omega t - \beta\sin\omega t$. Este de aşteptat ca după o îndelungă acţiune a forţelor şi legăturilor periodice influienţa condiţiilor iniţiale să nu mai aibă importanţă şi mişcarea corzii să devină un proces staţionar cu aceeaşi perioadă în timp, adică să avem soluţii de forma

$$u(x,t) = v_1(x)\cos\omega t - v_2(x)\sin\omega t.$$

Acestea, dacă vor exista, se numesc *oscilaţiile staţionare* ale corzii.

Să observăm că introducând în ecuaţie avem

$$-(\omega^2 v_1 + a^2 v_1'')\cos\omega t + (\omega^2 v_2 + a^2 v_2'')\sin\omega t = f_1(x)\cos\omega t - f_2(x)\sin n\omega t$$

şi cum funcţiile cosωt, sinωt sunt linear independente rezultă

$$\begin{aligned}\omega^2 v_1 + a^2 v_1'' &= -f_1(x),\\ \omega^2 v_2 + a^2 v_2'' &= -f_2(x)\end{aligned}$$

sau notând $\frac{\omega}{a} = k$

$$\begin{aligned}v_1'' + k^2 v_1 &= -\frac{f_1(x)}{a^2},\\ v_2'' + k^2 v_2 &= -\frac{f_2(x)}{a^2}.\end{aligned}$$

Rezultă că dacă vom pune $F(x) = f_1(x) + if_2(x)$, $v = v_1 + iv_2$ atunci vom avea

$$v'' + k^2 v = -\frac{F(x)}{a^2}.$$

Invers dacă $v = v_1 + iv_2$ este soluţie a acestei ecuaţii atunci prin înmulţire cu $e^{i\omega t}$ vom avea

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} ve^{i\omega t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} ve^{i\omega t} = F(x)e^{i\omega t}.$$

Deci $\Re e(ve^{i\omega t}) = v_1 \cos \omega t - v_2 \sin \omega t$ va satisface ecuaţia corzii cu termenul drept $\Re e(Fe^{i\omega t}) = f_1 \cos \omega t - f_2 \sin \omega t$. Vom conveni să numim funcţia $v = v_1 + iv_2$ *amplitudinea complexă a oscilaţiei*, iar funcţia $F(x) = f_1(x) + if_2(x)$ o vom numi *forţa complexă*.

Să ne ocupăm mai întâi de cazul corzii finite fixate la capete. In acest caz amplitudinea complexă trebuie să verifice ecuaţia

$$v'' + k^2 v = -\frac{F(x)}{a^2}$$

şi condiţiile de fixare

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 \\ v(l) &= 0. \end{aligned}$$

Vom obsrva că dacă forţa complexă este nulă avem soluţii de forma $v(x) = A \cos kx + B \sin kx$. Vom avea o soluţie nenulă care să verifice condiţiile de fixare dacă $k = \frac{n\pi}{l}$ adică $\omega = \frac{n\pi a}{l}$. Rezultă că pulsaţiilor $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, $n = 1, 2, ...$ le corespund amplitudinile complexe

$$v_n(x) = B \sin \frac{n\pi}{l} x$$

şi oscilaţiile staţionare

$$u_n(x,t) = \Re e \left((B_{1n} + iB_{2n}) \sin \frac{n\pi}{l} x e^{i\frac{n\pi a}{l}t} \right) = \sin \frac{n\pi}{l} x (B_{1n} \cos \frac{n\pi at}{l} - B_{2n} \sin \frac{n\pi at}{l})$$

care pot apare în coardă fără forţă exterioară. Din acest motiv ele se numesc *oscilaţii proprii,* pulsaţiile corespunzătoare $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$ se numesc *pulsaţiile proprii.* Vom nota că frecvenţele acestor oscilaţii proprii depind numai de lungimea corzii şi coeficientul a, adică de densitatea lineară ρ şi tensiunea corzii T_0. Mai observăm că din expresia soluţiei ecuaţiei corzii finite cu condiţii iniţiale rezultă că acea soluţie este o suprapunere de oscilaţii proprii.

Revenind la cazul general soluţia generală a ecuaţiei

$$v'' + k^2 v = -\frac{F(x)}{a^2}$$

este

$$v = A\cos kx + B\sin kx - \frac{1}{a^2}\int_0^x \frac{\sin k(x-\xi)}{k}F(\xi)d\xi.$$

cu A, B constante. Punând condiţiile la capete obţinem

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{1}{a^2 \sin kl}\int_0^l \frac{\sin k(l-\xi)}{k}F(\xi)d\xi \end{aligned}$$

valabilă numai pentru $k \neq \frac{n\pi}{l}$. Rezultă că dacă pulsaţia forţei perturbatoare este diferită de pulsaţiile proprii atunci există o soluţie unică. Dacă $k = \frac{n\pi}{l}$ atunci condiţia la capătul $x = l$ se scrie

$$B.0 - \frac{1}{a^2}\frac{l}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}(l-\xi)F(\xi)d\xi = 0$$

sau

$$B.0 - \frac{1}{n\pi a^2}(-1)^n\int_0^l \sin\frac{n\pi\xi}{l}F(\xi)d\xi = 0$$

şi deci dacă este verificată condiţia

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi\xi}{l}F(\xi)d\xi = 0$$

atunci B este arbitrar şi avem o soluţie

$$v = B\sin\frac{n\pi x}{l} - \frac{1}{a^2}\int_0^x \sin\frac{n\pi}{l}(x-\xi)F(\xi)d\xi$$

cu B arbitrar. Dacă condiţia nu este îndeplinită atunci are loc fenomenul de rezonanţă şi nu există oscilaţii staţionare.

Pentru coarda infinită, ne amintim că dacă asupra ei din poziţia iniţială de pe axă şi cu viteză iniţială nulă acţiona forţa concentrată în punctul $x = \xi$ armonică în timp $\delta(x-\xi)a^2\cos\omega t h(t)$ atunci mişcarea sa era o undă divergentă dată de relaţia

$$u(x,t;\xi) = \frac{ah(t)}{2\omega}\sin\left(\omega\left(t - \frac{|x-\xi|}{a}\right)\right) = \Re e\left(h(t)e^{i\omega t}\frac{e^{-ik|x-\xi|}}{2ik}\right), k = \frac{\omega}{a}$$

Este de aşteptat ca forţei staţionare $\delta(x-\xi)a^2\cos\omega t$ să-i corespundă oscilaţia staţionară cu amplitudinea complexă

$$V(x,\xi) = \frac{e^{-ik|x-\xi|}}{2ik}.$$

Această amplitudine este o funcţie simetrică în x şi ξ, este continuă ca funcţie de x sau ξ pe întreaga axă reală, are derivate în raport cu x sau ξ continue peste tot cu excepţia punctului $x = \xi$ unde prezintă un salt

$$\frac{\partial V(x,\xi+0)}{\partial x} - \frac{\partial V(x,\xi-0)}{\partial x} = -1,$$

peste tot în afară de $x = \xi$ verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 V(x,\xi)}{\partial x^2} + k^2 V(x,\xi) = 0.$$

Formal putem spune că ea verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 V(x,\xi)}{\partial x^2} + k^2 V(x,\xi) = -\delta(x-\xi).$$

In plus funcţia $V(x,\xi)$ satisface la mari distanţe aşa numitele *condiţii de radiaţie*

$$\begin{aligned} V(x,\xi) &= O(1), x \to \pm\infty, \\ \frac{\partial V(x,\xi)}{\partial x} + ikV(x,\xi) &= o(1), x \to \pm\infty. \end{aligned}$$

Are loc relaţia de reciprocitate

$$V(x,\xi)\left(v''(x) + k^2 v(x)\right) - v(x)\left(\frac{\partial^2 V(x,\xi)}{\partial x^2} + k^2 V(x,\xi)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(V(x,\xi)v'(x) - v(x)\frac{\partial V(x,\xi)}{\partial x}\right)$$

oricare ar fi funcţia $v(x)$. Aplicând această relaţie pentru funcţia $v(x)$ soluţie a ecuaţiei

$$v'' + k^2 v = -\frac{F(x)}{a^2}$$

şi integrând între $-l$ şi l cu l suficient de mare obţinem

$$v(\xi) = \left(V(x,\xi)v'(x) - v(x)\frac{\partial V(x,\xi)}{\partial x}\right)\Bigg|_{-l}^{l} + \frac{1}{a^2}\int_{-l}^{l} V(x,\xi)F(x)dx.$$

Presupunând că funcţia $v(x)$ satisface condiţiile de radiaţie şi că funcţia $F(x)$ este nenulă numai pe un interval (α,β) vom avea făcând $l \to \infty$

$$v(\xi) = \frac{1}{2a^2 ki}\int \alpha\beta F(x)e^{-ik|x-\xi|}dx.$$

Se verifică uşor că funcţia dată de această relaţie satisface ecuaţia cerută şi condiţiile de radiaţie. Deci faptul că forţa complexă este nenulă pe un interval mărginit şi că cerem satisfacerea condiţiilor de radiaţie asigură existenţa unei soluţii unice pentru problema oscilaţiilor staţionare a corzii infinite. Deci dacă asupra corzii acţionează forţa staţionară $f_1(x)\cos\omega t - f_2(x)\sin\omega t$ nenulă numai pe intervalul (α, β) coarda are oscilaţii staţionare date de relaţia

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2a^2k} \int \alpha\beta \left[f_2(x)\cos\left(\omega t - k|x-\xi|\right) + f_1(x)\sin\left(\omega t - k|x-\xi|\right)\right] dx.$$

Problemele oscilaţiilor staţionare se pun în acelaşi mod pentru ecuaţia membranei sau ecuaţia undelor. Rezolvările sunt asemănătoare. Pentru cazurile domeniilor mărginite rezolvarea se face prin reducere la o ecuaţie integrală, pe care am căutat s-o evităm mai sus. In cazurile nemărginte apar condiţii de radiaţie.

15.13 Metoda lui Fourier

Metoda lui Fourier sau metoda separării variabilelor este una din cele mai raspândite metode de rezolvare a problemelor legate de ecuaţiile cu derivate parţiale. Vom ilustra metoda începând cu problema micilor oscilaţii ale corzii finite fixate la capete. Aceasta revine la găsirea soluţiei ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

cu condiţiile la limită

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0,$$

şi condiţiile iniţiale

$$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_0(x), 0 \leq x \leq l.$$

In metoda lui Fourier se caută soluţii nebanale ale ecuaţiei de forma produsului

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

care să satisfacă condiţiile la limită.

Introducând în ecuaţie avem

$$T''(t)X(x) - a^2T(t)X''(x) = 0$$

sau

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Ultima egalitate în care membrul stâng depinde numai de t, iar membrul drept numai de x, este posibilă numai dacă ambii termeni sunt egali cu o constantă pe care o notăm cu $-\lambda$. Obţinem atunci două ecuaţii diferenţiale

$$\begin{aligned} T''(t) + \lambda a^2T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0. \end{aligned}$$

Suntem conduşi la problema găsirii unor soluţii nebanale pentru ecuaţia

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

care să satisfacă condiţiile la limită

$$X(0) = 0, X(l) = 0.$$

O asemenea problemă se numeşte *problemă a lui Sturm-Liouville.* Valorile parametrului λ pentru care problema lui Sturm-Liouville are soluţie se numesc *valori proprii*, iar soluţiile se numesc *funcţii proprii.*

Pentru a găsii valorile şi funcţiile proprii ale problemei lui Sturm-Liouville la care am ajuns trebuie să considerăm cele trei cazuri posibile $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

Dacă $\lambda < 0$ soluţia generală a ecuaţie în $X(x)$ este

$$X(x) = C_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Scriind că aceasta satisface condiţiile la limită avem

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l} &= 0. \end{aligned}$$

Cum determinantul acestui sistem este nenul avem $C_1 = C_2 = 0$ şi deci $X(x) \equiv 0$, ceea ce nu convine.

Dacă $\lambda = 0$ soluţia generală a ecuaţie în $X(x)$ este

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

şi impunând verificarea condiţiilor la limită avem

$$C_1 = 0, C_1 + C_2 l = 0$$

din care rezultă $C_1 = C_2 = 0$ şi deci $X(x) \equiv 0$, ceea ce nu convine.

Dacă $\lambda > 0$ atunci

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Scriind că sunt verificate condiţiile la limită avem

$$C_1 = 0, C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Trebuie să considerăm $C_2 \neq 0$ pentru că altfel $X(x) \equiv 0$. Rezultă $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$ adică $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$ unde n este orice număr natural nenul.

Prin urmare avem soluţii nebanale ale problemei lui Sturm-Liouville numai pentru valorile proprii

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, 3, ...$$

Acestora le corespund funcţiile proprii

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

determinate abstracţie făcând de un factor pe care l-am luat egal cu unitatea.

Pentru $\lambda = \lambda_n$ ecuaţia în $T(t)$ admite soluţia generală

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l}$$

cu A_n, B_n constante arbitrare. In acest fel funcţiile

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right)$$

satisfac ecuaţia corzii şi condiţiile la limită pentru orice constante A_n, B_n.

In virtutea linearităţii ecuaţiei orice sumă finită de soluţii este tot o soluţie. Acest lucru este adevărat şi pentru seria

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right)$$

dacă ea va converge şi o vom putea deriva de două ori în raport cu x şi t. Cum fiecare termen satisface condiţiile la limită şi suma seriei $u(x,t)$ va satisface condiţiile la limită. Rămâne numai să determinăm constantele A_n, B_n astfel ca să fie satisfăcute şi condiţiile iniţiale.

Derivând seria în raport cu t avem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(-A_n \sin \frac{n\pi a t}{l} + B_n \cos \frac{n\pi a t}{l} \right).$$

Pentru a satisface condiţiile iniţiale trebuie să avem

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

relaţii care constituie dezvoltările în serii se sinuşi ale funcţiilor $u_0(x)$, $v_0(x)$. Rezultă

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

In acest fel dacă există o soluţie de forma celei de mai sus, atunci coeficienţii săi sunt daţi de relaţiile de mai sus.

Teoremă. Dacă pe intervalul $[0,l]$ funcţia $u_0(x)$ este de două ori continuu derivabilă, are derivată de ordinul trei continuă pe porţiuni şi satisface condiţiile

$$u_0(0) = u_0(l) = 0, u_0''(0) = u_0''(l) = 0,$$

dacă funcţia $v_0(x)$ este cu derivată continuă, are derivată de ordinul doi continuă pe porţiuni şi satisface condiţiile

$$v_0(0) = v_0(l) = 0$$

atunci funcţia $u(x,t)$ dată de seria de mai sus are derivate de ordinul doi continue şi satisface ecuaţia corzii şi condiţiile la limită şi iniţiale. Ea poate fi derivată termen cu termen de două ori obţinând serii absolut şi uniform convergente pentru $0 \leq x \leq l$ şi pentru orice timp .

Integrând prin părţi integralele care dau coeficienţii A_n, B_n, ţinând cont de condiţiile amintite avem

$$A_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{B_n^{(3)}}{n^3}, B_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{A_n^{(2)}}{n^3}$$

unde

$$B_n^{(3)} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0'''(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, A_n^{(2)} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{v_0''(x)}{a}\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Din proprietăţile seriilor trigonometrice rezultă că seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|A_n^{(2)}|}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|B_n^{(3)}|}{n}$$

sunt convergente. Inlocuind coeficienţii în expresia lui $u(x,t)$ avem

$$u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(B_n^{(3)}\cos\frac{n\pi at}{l} + A_n^{(2)}\sin\frac{n\pi at}{l}\right).$$

Această serie este majorată de seria convergentă

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(|B_n^{(3)}| + |A_n^{(2)}|\right)$$

Rezultă că seria lui $u(x,t)$ este absolut şi uniform convergentă şi poate fi derivată termen cu termen de două ori în raport cu x şi t, ceea ce trebuia demonstrat.

Dacă funcţiile $u_0(x), v_0(x)$ nu satisfac condiţiile teoremei, este posibil ca funcţia u(x,t) dată de seria de mai sus să nu fie de două ori derivabilă. Totuşi dacă $u_0(x)$ este cu derivată continuă pe porţiuni şi satisface relaţiile $u_0(0) = u_0(l) = 0$ şi funcţia $v_0(x)$ este continuă şi satisface condiţiile $v_0(0) = v_0(l) = 0$ atunci seria lui $u(x,t)$ converge uniform pentru $0 \leq x \leq l$ şi pentru orice t şi defineşte o funcţie $u(x,t)$ continuă.

Vom numi soluţie generalizată a ecuaţiei corzii cu condiţiile la limită şi condiţiile iniţiale cu funcţiile $u_0(x), v_0(x)$ o funcţie $u(x,t)$ care este limita uniformă a unui şir de soluţii $u_n(x,t)$ ale ecuaţiei cu condiţiile la limită şi cu condiţii iniţiale în care funcţiile corespunzătoare $u_{0n}(x), v_{0n}(x)$ satisfac condiţiile teoremei de mai sus şi în plus

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^l\left[u_0(x) - u_{0n}(x)\right]^2 dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^l\left[v_0(x) - v_{0n}(x)\right]^2 dx = 0.$$

Dacă $u_0(x)$ este cu derivată continuă pe porţiuni şi satisface relaţiile $u_0(0) = u_0(l) = 0$ şi funcţia $v_0(x)$ este continuă şi satisface condiţiile $v_0(0) = v_0(l) = 0$ atunci seria lui $u(x,t)$ defineşte evident o asemenea soluţie generalizată.

Intorcându-ne la expresia găsită pentru soluţie, să punem

$$A_n = C_n\sin\varphi_n, B_n = C_n\cos\varphi_n.$$

Soluţia se poate scrie

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\left(\frac{n\pi at}{l}+\varphi_n\right).$$

Fiecare termen al seriei reprezintă o undă staţionară, în care punctele corzii au o mişcare oscilatorie armonică cu amplitudinea $C_n \sin\frac{n\pi x}{l}$, depinzând numai de poziţia punctului, cu o pulsaţie $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$ şi cu aceeaşi fază φ_n.

Sunetele se pot clasifica în *sunete muzicale sau note* şi *sunete nemuzicale sau zgomote*. Sunetele muzicale se dispun într-o ordine determinată în funcţie de *înălţimea* lor, calitate pe care o poate aprecia oricine. Acele note care nu mai pot fi distinse prin înălţime se numesc *tonuri*. Prin oscilaţiile corzii apare un sunet a cărui înălţime depinde de pulsaţiile oscilaţiilor. Pulsaţia tonului de bază (cel mai jos) este $\omega_1=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Tonurile corespunzătoare pulsaţiilor mai înalte se numesc obertonuri. Obertonurile, ale căror pulsaţii sunt multipli ai pulsaţiei de bază se mai numesc şi armonici. Soluţia ecuaţiei corzii finite se compune din suprapunerea diferitelor armonici ale căror amplitudini descresc odată cu numărul armonicii. Din acest motiv influienţa lor asupra sunetului corzii se reduce la crearea timbrului sunetului diferit pentru diferitele instrumente muzicale.

Armonica de ordin n este astfel încât în punctele

$$x=0,\frac{l}{n},\frac{2l}{n},...,\frac{n-1}{n}l,l$$

amplitudinea oscilaţiilor este nulă. Aceste puncte se numesc nodurile armonicii de ordin n. Din contră, în punctele

$$x=\frac{l}{2n},\frac{3l}{2n},...,\frac{(2k-1)l}{2n}$$

numite ventre, amplitudinea armonicii de ordin n este maximă.

15.14 Exerciţii

1. O sursă sonoră (de exemplu, sirena unui tren) se deplasează cu viteza subsonică v de-a lungul axei Ox. Ce va sesiza un observator situat într-un punct oarecare al axei Ox?

Ind. Cu o aproximaţie suficientă putem considera că avem de-a face cu unde sonore plane perpendiculare pe Ox şi dacă notăm cu $u(x,t)$ mica deplasare a particolelor de aer, cu p_0, ρ_0 presiunea şi densitatea aerului neperturbat, cu $p(x,t)$, $\rho(x,t)$ micile abateri ale presiunii şi densităţii de la valorile de echilibru şi vom lua un cilindru cu generatoarele paralele cu Ox cuprins între secţiunile $x, x+dx$ vom putea scrie:

- ecuaţia de conservare a masei

$$(\rho_0+\rho)(x+dx+u(x+dx,t)-x-u(x,t)) = \rho_0 dx$$

  sau neglijând produsele a două mărimi mici

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}+\rho = 0;$$

- ecuaţia de mişcare

$$(\rho_0+\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = -p(x+dx,t)+p(x,t)$$

  sau

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x};$$

ecuaţia isentropică

$$\frac{p_0+p}{(\rho_0+\rho)\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0\gamma},\ pentru\, aer\, \gamma = 1.405,$$

sau

$$p = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}\rho.$$

Rezultă că pentru orice $x \in (-\infty,\infty)$, $t \geq 0$ vom avea ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, a^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}$$

Avem condiţiile iniţiale $u(x,0)=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$. Dacă notăm cu $p^*(t)$ abaterea presiunii de la p_0 generată de sursa sonoră vom avea condiţia

$$\frac{\partial u}{\partial x}(vt,t) = -\frac{1}{\gamma p_0}p^*(t).$$

De fapt avem două ecuaţii, una în domeniul $x < vt$, $t \geq 0$ şi alta în domeniul $x > vt$, $t \geq 0$. Suntem conduşi să luăm

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi_1(x+at)+\psi_1(x-at)\ pentru\ x < vt, t \geq 0 \\ u(x,t) &= \varphi_2(x+at)+\psi_2(x-at)\ pentru\ x > vt, t \geq 0 \end{aligned}$$

Din condiţiile iniţiale obţinem

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \psi_1(x) = 0 \textit{ pentru } x < 0, \\ \varphi_2(x) &= \psi_2(x) = 0 \textit{ pentru } x > 0. \end{aligned}$$

Ultima condiţie dă

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t(a+v)) &= -\frac{1}{\gamma p_0} p^*(t), \ \textit{pentru } t > 0, \\ \psi_2'(t(v-a)) &= -\frac{1}{\gamma p_0} p^*(t), \ \textit{pentru } t > 0. \end{aligned}$$

Rezultă

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad -\infty < x < -at, \\ -\frac{a+v}{\gamma p_0} \int\limits_0^{\frac{x+at}{a+v}} p^*(\tau) d\tau & \textit{pentru} \quad -at < x < vt, \\ \frac{a-v}{\gamma p_0} \int\limits_0^{\frac{-x+at}{a-v}} p^*(\tau) d\tau & \textit{pentru} \quad vt < x < at, \\ 0 & \textit{pentru} \quad at < x < \infty. \end{cases}$$

In cazul $p^*(t) = A \cos \omega t$ vom obţine

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad -\infty < x < -at, \\ -\frac{a+v}{\gamma p_0} A \sin\left[\frac{\omega}{a+v}(x+at)\right] & \textit{pentru} \quad -at < x < vt, \\ \frac{a-v}{\gamma p_0} A \sin\left[\frac{\omega}{a-v}(x-at)\right] & \textit{pentru} \quad vt < x < at \\ 0 & \textit{pentru} \quad at < x < \infty. \end{cases}$$

Se vede că în sens invers deplasării sursei se propagă cu viteza sunetului o undă cu o pulsaţie $\omega_- = \frac{a}{a+v}\omega$ adică mai mică decât pulsaţia sursei, în sensul deplasării sursei se propagă cu viteza sunetului o undă cu pulsaţia $\omega_+ = \frac{a}{a-v}\omega$ mai mare decât pulsaţia sursei. Acesta este fenomenul Doppler.

2. O masă M care cade de la înălţimea h loveşte la $t = 0$ în $x = 0$ o coardă infinită întinsă cu tensiunea T şi se lipeşte de coardă. Să se descrie mişcarea corzii.

Ind. Avem de fapt de rezolvat două ecuaţii

$$u_{-tt} - a^2 u_{-xx} = 0, \quad x < 0, \quad u_{+tt} - a^2 u_{+xx} = 0, \quad x > 0,$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} &u_-(x,0) = 0, \quad x < 0, \quad u_+(x,0) = 0, \quad x > 0, \\ &u_{-t}(x,0) = 0, \quad x < 0, \quad u_{+t}(x,0) = 0, \quad x > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} u_-(0,0)=0, & u_+(0,0)=0 \\ u_{-t}(0,0)=-\sqrt{2gh} & u_{+t}(0,0)=-\sqrt{2gh} \end{array}$$

şi condiţia

$$Mu_{-tt}(0,t)=Mu_{+tt}(0,t)=-Tu_{-x}(0,t)+Tu_{+x}(0,t).$$

Căutăm soluţiile sub forma

$$u_-(x,t)=\varphi_-(x-at)+\psi_-(x+at), \quad x<0;$$

$$u_+(x,t)=\varphi_+(x-at)+\psi_+(x+at), \quad x>0.$$

Condiţiile iniţiale dau

$$\begin{aligned} \varphi_-(x) &= \psi_-(x), x<0, \psi_-(0)=0, \psi_-'(0)=-\frac{\sqrt{2gh}}{a} \\ \varphi_+(x) &= \psi_+(x), x<0, \varphi_+(0)=0, \varphi_+'(0)=\frac{\sqrt{2gh}}{a}. \end{aligned}$$

Ultimele condiţii dau

$$Ma^2\psi_-''(at)=Ma^2\varphi_+''(-at)=-T\psi_-'(at)+T\varphi_+'(-at), t>0$$

şi deci avem ecuaţiile

$$\begin{aligned} Ma^2\psi_-''(z) &= -2T\psi_-'(z), z>0, \\ Ma^2\varphi_+''(z) &= 2T\varphi_+'(z), z<0. \end{aligned}$$

Rezultă

$$u_-(x,t)=\begin{cases} -\frac{Ma\sqrt{2gh}}{2T}\left(1-e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x+at)}\right) & \textit{pentru} \quad x+at>0, \\ 0 & \textit{pentru} \quad x+at<0, \end{cases}$$

$$u_+(x,t)=\begin{cases} -\frac{Ma\sqrt{2gh}}{2T}\left(1-e^{\frac{2T}{Ma^2}(x-at)}\right) & \textit{pentru} \quad x-at<0, \\ 0 & \textit{pentru} \quad x-at>0. \end{cases}$$

3. O greutate $Q=Mg$ care se mişcă cu viteza constantă v de-a lungul axei Ox loveşte la momentul $t=0$ capătul liber al barei semiinfinite $0\le x<\infty$ se lipeşte de capătul barei şi continuă să se mişte împreună cu bara. Să se determine deplasarea $u(x,t)$ în bară dacă deplasările iniţiale sunt nule iar viteza iniţială este peste tot nulă exceptând capătul $x=0$ unde are valoarea v.

Ind. Problema revine la rezolvarea ecuaţiei

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < \infty, t > 0,$$

cu condiţiile

$$Mu_{tt}(0,t) = ESu_x(0,t), 0 < t < \infty,$$

$$u(x,0) = 0, 0 < x < \infty,$$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} v & pentru \quad x = 0 \\ 0 & pentru \quad 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Căutăm soluţia sub forma

$$u(x,t) = \varphi(t - \frac{x}{a}) + \psi(t + \frac{x}{a}).$$

Din condiţiile iniţiale avem

$$\begin{aligned} \varphi(-z) + \psi(z) &= 0, 0 < z < \infty, \\ \varphi'(-z) + \psi'(z) &= 0, 0 < z < \infty. \end{aligned}$$

Integrăm ultima luând constanta nulă

$$-\varphi(-z) + \psi(z) = 0, 0 < z < \infty.$$

Rezultă

$$\psi(z) = 0, \varphi(-z) = 0, 0 < z < \infty.$$

Deci

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi(t - \frac{x}{a}) & pentru \quad t > \frac{x}{a} \\ 0 & pentru \quad 0 < t < \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Introducând în prima condiţie avem

$$\varphi''(z) + \frac{ES}{aM}\varphi'(z) = 0, 0 < z < \infty.$$

Avem $\varphi(0) = 0$ şi din ultima condiţie $u_t(0,0) = v$ rezultă $\varphi'(0) = v$. Rezultă

$$\varphi(z) = \frac{aMv}{ES}\left[1 - e^{-\frac{ES}{aM}z}\right], 0 < z < \infty$$

şi deci

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & pentru \quad 0 < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{aMv}{ES}\left[1 - e^{-\frac{ES}{aM}(t - \frac{x}{a})}\right] & pentru \quad t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$

4. O coardă $0 < x < l$ fixată la capete este ciupită în punctul c până când acest punct este adus la înălţimea h şi este lăsată să oscileze liber. Să se descrie oscilaţiile sale.

R. $u_0(x) = \begin{cases} \frac{h}{c}x & \textit{pentru} \quad 0 < x < c \\ \frac{h(l-x)}{l-c} & \textit{pentru} \quad c < x < l, \end{cases} \quad v_0(x) = 0,$

$u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}.$

5. O coardă $0 < x < l$ fixată la capete întinsă cu tensiunea$T$ se găseşte în echilibru sub acţiunea unei forţe concentrate F în punctul c. La momentul $t = 0$ se înlătură forţa şi se lasă coarda să oscileze liber. Să se calculeze $u(x,t)$.

Ind. La echilibru avem $u_0''(x) = 0, u_0(0) = u_0(l) = 0$, $u_0(c-0) = u_0(c+0)$, $-Tu_0'(c-0) + Tu_0'(c+0) = F$ de unde

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{F(l-c)}{lT}x & \textit{pentru} \quad x < c, \\ \frac{Fc}{lT}(l-x) & \textit{pentru} \quad x > c, \end{cases}$$

şi se procedează ca în exerciţiul precedent.

5. O bară fixată rigid în capătul $x = 0$ se găseşte în echilbru sub acţiunea unei forţe F în direcţia ei la capătul $x = l$. La momentul $t = 0$ se înlătură forţa. Să se descrie oscilaţiile barei.

Ind. Vom avea $u_0(x) = \frac{F}{ES}x$, $v_0(x) = 0, u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$. Rezultă

$$u(x,t) = \frac{8Fl}{\pi^2 ES} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

6. Să se determine oscilaţiile longitudinale ale unei bare $0 \le x \le l$ dacă este fixată rigid în $x = 0$ şi în $x = l$ începând din timpul $t = 0$ se aplică forţa longitudinală F.

Ind. Avem de rezolvat ecuaţia $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$, $x \in (0,l)$, $t > 0$, cu condiţiile $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = \frac{F}{ES}, t > 0$, $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, x \in (0,l)$. Rezultă

$$u(x,t) = \frac{F}{ES}x - \frac{8Fl}{\pi^2 ES} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

7. Să se determine oscilaţiile longitudinale ale unei bare $0 \le x \le l$ dacă este fixată rigid în $x = 0$ şi în $x = l$ începând cu $t = 0$ se aplică forţa longitudinală $F = At$, A fiind constantă.

Ind. Avem de rezolvat ecuaţia $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$, $x \in (0, l)$, $t > 0$, cu condiţiile $u(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = \frac{At}{ES}$, $t > 0$, $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, x \in (0, l)$. Rezultă

$$u(x, t) = \frac{A}{ES} xt + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l}$$

unde

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l \frac{Az}{ES} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz.$$

CAPITOLUL 16

ECUAŢII DE TIP PARABOLIC

16.1

Probleme pentru ecuaţii parabolice

Am arătat că în cazul unui mediu omogen şi izotrop cu capacitatea calorică c, cu densitatea ρ,cu coeficientul de termoconductibilitate k, toate constante, temperatura $u(x, y, z, t)$ a punctului de coordonate (x, y, z) la momentul t verifică ecuaţia cădurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{1}{\rho c} i,$$

unde am notat $a^2 = \frac{k}{\rho c}$ şi $i = i(x, y, z, t)$ reprezintă intensitatea surselor de cădură. Ea este cea mai folosită ecuaţie de tip parabolic. Ecuaţia caracteristicilor sale este

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 = 0$$

cu condiţia

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 \neq 0.$$

Rezultă că suprafetele sale caracteristice sunt de forma $\omega(t) = const$, adică rezolvând în raport cu t obţinem suprafeţele caracteristice $t = const$.

Cum în ecuaţie apare derivata $\frac{\partial u}{\partial t}$ este clar că pentru a putea determina temperatura în orice punct şi orice moment este necesar să cunoaştem temperatura la momentul iniţial $t = 0$:

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z).$$

Dacă ne-am mai da şi derivata de ordinul întâi

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x, y, z)$$

atunci din ecuaţie am obţine

$$u_1(x, y, z) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\rho c} i(x, y, z, 0)$$

adică se vede că nu are sens să se dea şi a doua condiţie, fiind suficientă prima condiţie.

Problema determinării unei soluţii $u(x, y, z, t)$ a ecuaţiei căldurii în întreg spaţiu când se cunoaşte valoarea sa la momentul $t = 0$ se numeşte *problema lui Cauchy pentru ecuaţia căldurii.*

In cazul unui corp finit este necesar să ţinem cont de interacţiunea dintre corpul studiat şi mediul înconjurător. Conform unei legii a lui Newton, cantitatea de căldură care trece prin porţiunea $d\sigma$ din suprafaţa ∂D a unui corp în unitatea de timp este proporţională cu diferenţa dintre temperatura corpului $u(x, y, z, t)$ în centrul porţiunii $d\sigma$ şi temperatura $u_e(x, y, z, t)$ a mediului exterior în acelaşi punct considerat ca aparţinând exteriorului, factorul de proporţionalitate depinzând de gradul de izolare al suprafeţei. Acesta poate fi funcţie de punctul de pe suprafaţă sau poate fi constant pe întreaga suprafaţă. Din bilanţul de căldură pe orice porţiune S a lui ∂D rezultă

$$-\iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint_S \alpha \left(u(x, y, z, t) - u_e(x, y, z, t)\right) d\sigma.$$

Cum S este arbitrar, rezultă că pe suprafaţa ∂D trebuie să aibă loc relaţia

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha \left(u - u_e\right).$$

O asemenea problemă se numeşte *problemă de tipul lui Boggio.*

Dacă $\alpha = 0$, adică prin suprafaţa ∂D nu se transferă căldură, pe suprafaţa ∂D vom avea condiţia $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, se spune că avem o *problemă de tipul lui Neuman.* Dacă $\alpha = \infty$, adică suprafaţa ∂D nu este deloc izolată, pe suprafaţa ∂D vom avea condiţia $u = u_e$, se spune că avem o *problemă a lui Dirichlet.*

Probleme asemănătoare se formulează în cazul ecuaţiei căldurii în plan sau pe axa reală.

16.2 Principiul de minim-maxim pentru ecuaţia parabolică

Din punct de vedere fizic este evident că dacă un corp este încălzit de surse interne pozitive atunci cea mai mică temperatură a punctelor corpului se atinge sau în interiorul corpului la momentul iniţial sau pe frontiera corpului într-un interval de timp următor. Vom demonstra aceasta în cazul unidimensional. Fie $u(x,t)$, $A \leq x \leq B$, $0 \leq t \leq T$ soluţie continuă a ecuaţiei

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{i(x,t)}{\rho c}$$

unde $i(x,t) \geq 0$ pentru $A \leq x \leq B$, $0 \leq t \leq T$. Să notăm

$$D = \{(x,t) | A < x < B, 0 < t < T\}.$$

Prin $\overline{D}$ notăm închiderea acestui domeniu şi prin $\partial_1 D$ porţiunea de frontieră a lui $\overline{D}$ formată din segmentul orizontal al axei x-lor $t = 0, A \leq x \leq B$ şi din segmentele verticale $x = A, 0 \leq t \leq T$ şi $x = B, 0 \leq t \leq T$. Prin $\partial_T D$ vom nota sementul orizontal $t = T, A \leq x \leq B$. Fie $m = \min\limits_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t)$ şi $\mu = \min\limits_{(x,y)\in\partial_1 D} u(x,t)$. Evident $\mu \geq m$. Vrem să arătăm că de fapt $\mu = m$. Prin absurd presupunem că $\mu > m$. Atunci funcţia $u(x,t)$ îşi atinge minimul m într-un punct (x_0, t_0) situat fie în D fie în $\partial_T D$. Considerăm funcţia ajutătoare

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{\mu - m}{2T}(t - t_0).$$

Pentru $(x,t) \in D \cup \partial_T D$ avem $t_0 - t \leq t_0 \leq T$ şi deci $t - t_0 \geq -T$. Rezultă

$$v(x,t) \geq m + \frac{\mu - m}{2T}(-T) = \frac{m + \mu}{2} > m.$$

Pe de altă parte

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = m.$$

Rezultă că funcţia $v(x,t)$ îşi atinge minimul pe $\overline{D}$ într-un punct (x_1, t_1) situat fie în D fie în $\partial_T D$.

Dacă $(x_1, t_1) \in D$ în acest punct vom avea $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geq 0$ de unde $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$. Dar $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu - m}{2T} = \frac{i(x_1,t_1)}{c} + \frac{\mu - m}{2T} > 0$. Deci $(x_1, t_1) \notin D$.

Dacă $(x_1, t_1) \in \partial_T D$ în acest punct vom avea $\frac{\partial v}{\partial t} \leq 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geq 0$ de unde $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$. Dar la fel ca mai sus avem $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} > 0$. Ajungem deci la o contradicţie. Rezultă $\mu = m$.

Am demonstrat aşa numitul *principiu de minim-maxim pentru ecuaţia căldurii*:

Teorema 1.(principiul de minim-maxim pentru ecuaţia căldurii) Dacă membrul drept al ecuaţiei căldurii este pozitiv atunci soluţia continuă a ecuaţiei cădurii îşi atinge minimul sau în interiorul corpului la momentul iniţial sau pe frontiera corpului în intervalul de timp următor. Dacă membrul drept al ecuaţiei căldurii este negativ atunci soluţia continuă a ecuaţiei căldurii îşi atinge maximul sau în interiorul corpului la momentul iniţial sau pe frontiera corpului în intervalul de timp următor. Soluţia continuă a ecuaţiei căldurii omogene îşi atinge atât maximul cât şi minimul sau în interiorul corpului la momentul iniţial sau pe frontiera corpului în intervalul de timp următor.

Din principiul de maxim pentru ecuaţia căldurii rezultă imediat că problema lui Dirichlet pentru ecuaţia căldurii are soluţie continuă unică şi că această soluţie depinde continuu de datele iniţiale şi de datele pe frontieră. In adevăr, dacă problema lui Dirichlet ar avea două soluţii continue atunci diferenţa lor ar fi soluţie continuă a ecuaţiei omogene a căldurii care la momentul iniţial în interiorul corpului şi pe frontiera corpului într-un interval oarecare de timp ar lua valori nule. Deci atât minimul cât şi maximul acestei diferenţe în interiorul corpului la orice moment ar fi nule, deci această diferenţă este nulă. Dacă datele iniţiale şi datele pe frontieră ar diferi prin marimi mai mici în valoare absolută ca ε atunci în interiorul corpului diferenţa ar fi în modul tot mai mică ca ε, adică soluţia este stabilă.

Pentru a arăta că şi soluţia mărginită a problemei lui Cauchy pentru ecuaţia căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{i(x,t)}{c}$$

este unică, este suficient să arătăm că singura soluţie mărginită $w(x,t)$ a problemei lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă cu date iniţiale nule este soluţia nulă $w(x,t) \equiv 0$. Pentru aceasta vom considera funcţia ajutătoare

$$v_R(x,t) = \frac{2M}{R^2}\left(\frac{x^2}{2} + t\right).$$

Am notat cu M maximul modulului lui $w(x,t)$. Aceasta este soluţie a ecuaţiei omogene a căldurii. Avem

$$\begin{aligned} v_R(x,0) &= \frac{Mx^2}{R^2} \geq w(x,0) = 0, \\ v_R(\pm R,t) &= M + \frac{2M}{R^2 t} \geq M \geq w(\pm R,t) \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} v_R(x,0) + w(x,0) &\geq 0, v_R(x,0) - w(x,0) \geq 0 \\ v_R(\pm R,t) + w(\pm R,t) &\geq 0, v_R(\pm R,t) - w(\pm R,t) \geq 0 \end{aligned}$$

Din principiul de maxim rezultă

$$\begin{aligned} v_R(x,t) + w(x,t) &\geq 0, |x| \leq R, t \geq 0 \\ v_R(x,t) - w(x,t) &\geq 0, |x| \leq R, t \geq 0 \end{aligned}$$

de unde

$$|w(x,t)| \leq \frac{2M}{R^2}\left(\frac{x^2}{2} + t\right)$$

Fixând x şi t şi făcând $R \to \infty$ rezultă $w(x,t) = 0$.

Fie acum $u(x,y,z,t)$ soluţie a unei probleme a lui Dirichlet sau Neuman pentru ecuaţia căldurii în domeniul D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{1}{c} i.$$

Inmulţind această relaţie cu $u(x,y,z,t)$ şi integrând pe domeniul D avem

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int\limits_D u^2 dxdydz = a^2 \int\limits_D u \triangle u dxdydz + \frac{1}{c}\int\limits_D uidxdydz.$$

Dacă în formula lui Gauss-Ostrogradski

$$\int\limits_{\partial D} \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{n}\, d\sigma = \int\limits_D \mathrm{div}\, \overrightarrow{v}\, dxdydz$$

punem $\overrightarrow{v} = u\, \mathrm{grad}\, u$ avem

$$\int\limits_{\partial D} u \frac{du}{dn} d\sigma = \int\limits_D u \triangle u dxdydz + \int\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2 + \frac{\partial u}{\partial z}^2\right) dxdydz.$$

Rezultă că putem scrie

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int\limits_D u^2 dxdydz = a^2 \int\limits_{\partial D} u \frac{du}{dn} d\sigma - a^2 \int\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2 + \frac{\partial u}{\partial z}^2\right) dxdydz.$$

In cazul problemei lui Dirichlet sau Neuman cu date nule rezultă

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int\limits_D u^2 dxdydz \leq 0$$

şi dacă

$$\frac{1}{2}\int\limits_D u^2(x,y,z,0)dxdydz = 0$$

rezultă

$$\frac{1}{2}\int\limits_D u^2(x,y,z,t)dxdydz = 0$$

adică $u(x,y,z,t) \equiv 0$, adică am demonstrat unicitatea soluţiei problemei lui Dirichlet şi Neuman.

In cazul problemei lui Boggio omogene

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = \alpha u|_{\partial D}$$

vom avea

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int\limits_D u^2 dxdydz = -\frac{a^2}{k}\int\limits_{\partial D}\alpha u^2 d\sigma - a^2\int\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2 + \frac{\partial u}{\partial z}^2\right)dxdydz$$

şi concluzia se menţine.

16.3 Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia căldurii

Ne propunem să găsim soluţia $u(x,t)$ a problemei lui Cauchy pentru ecuaţia căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \in R, t \geq 0,$$

cu condiţia

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Să presupunem pentru început că în secţiunea $x = 0$ la momentul $t = 0$ se comunică barei pe unitatea de secţiune căldura Q. Cu alte cuvinte avem o sursă cu intensitatea $i(x,t) = Q\delta(x)\delta(t)$. Vom nota cu $u(x,t)$ temperatura dezvoltată în bară în această situaţie. In virtutea simetriei această funcţie va depinde de fapt de $|x|$. Cantitatea de căldură comunicată barei infinite la momentul iniţial $t = 0$ este

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)dx = Q.$$

Considerând conservarea în timp a cantităţii de căldură, vom avea la orice moment t relaţia

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)dx = Q.$$

Pentru $t = 0$ întreaga căldură fiind concentrată în $x = 0$ vom avea $\lim\limits_{t\to 0} u(x, t) = 0$ dacă $x \neq 0$. E clar că $\max\limits_{x} u(x, t)$ trebuie să tindă către ∞ pentru $t \to 0$ şi pentru t mici acest maxim trebuie să se atingă în vecinătatea lui $x = 0$.

Să observăm că dacă $u(x, t)$ este soluţia de mai sus a ecuaţiei căldurii atunci funcţia $v(x, t) = u(\alpha x, \lambda t)$ verifică relaţia

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\alpha^2}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

şi deci dacă $\alpha^2 = \lambda$ atunci funcţia $v(x, t) = u(\alpha x, \alpha^2 t)$ verifică aceeaşi ecuaţie. Cantitatea de căldură corespunzătoare acestei soluţii este

$$\rho c \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t)dx = \rho c \int_{-\infty}^{\infty} u(\alpha x, \alpha^2 t)dx = \frac{\rho c}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', \alpha^2 t)dx' = \frac{Q}{\alpha}.$$

Rezultă că odată cu soluţia $u(x, t)$ avem şi soluţia $\alpha u(\alpha x, \alpha^2 t)$ pentru orice α real. Cum ne aşteptăm la unicitate rezultă $u(x, t) = \alpha u(\alpha x, \alpha^2 t)$ pentru orice α real. In particular pentru $\alpha = \frac{1}{\sqrt{t}}$ rezultă $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x^2}{t}\right)$ cu g o funcţie care trebuie determinată. Notând $\zeta = \frac{x^2}{t}$ avem

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{t}} g(\zeta) \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2t\sqrt{t}} g(\zeta) - \frac{x^2}{t^2\sqrt{t}} g'(\zeta) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x}{t\sqrt{t}} g'(\zeta) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2}{t\sqrt{t}} g'(\zeta) + \frac{4x^2}{t^2\sqrt{t}} g''(\zeta)
\end{aligned}$$

şi deci trebuie să avem

$$-\frac{1}{2t\sqrt{t}} g(\zeta) - \frac{x^2}{t^2\sqrt{t}} g'(\zeta) = a^2 \left[\frac{2}{t\sqrt{t}} g'(\zeta) + \frac{4x^2}{t^2\sqrt{t}} g''(\zeta) \right]$$

sau

$$4a^2\zeta g''(\zeta) + g'(\zeta)\left(2a^2+\zeta\right) + \frac{1}{2}g(\zeta) = 0.$$

O soluţie a acestei ecuaţii este

$$g(\zeta) = Ce^{-\frac{\zeta}{4a^2}},$$

C fiind o constantă în raport cu ζ. Cealată soluţie nu convine pentru că verifică pentru $t = 0$ ecuaţia. Rezultă

$$u(x,t) = Ce^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

Cum

$$\rho cC\frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}dx = \rho cC2a\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2} d\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \rho cC2a\sqrt{\pi} = Q$$

rezultă

$$C = \frac{Q}{2\rho ca\sqrt{\pi}}$$

şi deci

$$u(x,t) = \frac{Q}{2\rho ca\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Vom observa că funcţia găsită satisface ecuaţia căldurii pentru $t \neq 0$ şi toate condiţiile pe care le ceream mai înainte. Formal putem spune că funcţia

$$\Omega(x,t) = \frac{h(t)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

este soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t),$$

adică ea corespunde unei surse unitare în $x = 0$ la momentul $t = 0$. Ea se numeşte *soluţia fundamentală a ecuaţiei căldurii*. Cum pentru $t > 0$ avem $\Omega(x,t) > 0$ putem spune că perturbaţia produsă de sursa unitară se propagă cu o viteză infinită de-a lungul barei. Asta înseamnă că într-o oarecare măsură fenomenul nu este bine modelat de ecuaţia căldurii.

Revenind la soluţia găsită vom nota că dacă în punctele x_i de pe bară se comunică caldurile Q_i atunci în virtutea linearităţii ecuaţiei temperatura va fi

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\rho c\sqrt{\pi t}}\sum_i Q_i e^{-\frac{(x-x_i)^2}{4a^2t}}.$$

Dacă ştim temperatura $u_0(x)$ la momentul iniţial $t=0$ putem considera o partiţie a barei prin punctele de diviziune x_i şi putem considera că în fiecare asemenea punct se comunică barei cantitatea de căldură $Q_i = \rho c u_0(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ şi vom putea scrie

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_i u_0(x_i)(x_{i+1}-x_i)e^{-\frac{(x-x_i)^2}{4a^2 t}}$$

Făcând norma diviziunii să tindă către zero obţinem

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Se poate arăta că dacă funcţia $u_0(x)$ este mărginită sau chiar cu o creştere exponenţială la infinit atunci formula de mai sus, numită *formula lui Poisson pentru ecuaţia căldurii*, dă o soluţie a problemei lui Cauchy pentru ecuaţia căldurii.

Şi aici are loc principiul lui Duhamel: soluţia ecuaţiei neomogene

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x,t), x \in R, t \geq 0$$

cu date iniţiale nule $w(x,0) = 0, x \in R$, este

$$w(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t,\tau) d\tau$$

unde $v(x,t,\tau)$ este soluţia ecuaţiei omogene

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

cu condiţia iniţială $v(x,t,\tau)|_{t=\tau} = f(x,\tau)$. Cum

$$v(x,t,\tau) = \frac{h(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi$$

rezultă

$$w(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi,$$

adică această soluţie se obţine ca şi când am scrie

$$f(x,t) = \int\limits_0^{\infty} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) d\xi$$

şi apoi am aplica principiul suprapunerii efectelor după ce înlocuim efectul corespunzător lui $\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) : \Omega(x-\xi, t-\tau)$.

Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia neomogenă

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), x \in R, t \geq 0$$

cu condiţia iniţială $u(x,0) = u_0(x), x \in R$, se obţine suprapunând efectele pertrurbaţiilor elementare

$$f(\xi,\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau + u_0(\xi)\delta(x)\delta(t).$$

16.4 Rezolvarea unor probleme la limită pentru ecuaţia căldurii

Considerăm formula lui Poisson de rezolvare a prolemei lui Cauchy pentru ecuaţia omogenă a căldurii

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Dacă funcţia $u_0(\xi)$ este impară $u_0(-\xi) = -u_0(\xi)$ vom putea scrie

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{\infty} u_0(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi.$$

Rezultă că funcţia $u(x,t)$ verifică relaţiile

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(-x,t) &= -u(x,t). \end{aligned}$$

Rezultă că pentru a rezolva problema la limită

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, x \geq 0, t \geq 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), x \geq 0, \\ u(0,t) &= 0, \end{aligned}$$

este suficient să prelungim prin imparitate funcţia $u_0(x)$ faţă de originea $x = 0$ şi să aplicăm formula stabilită mai sus.

In cazul particular în care $u_0(x) = u_0 = const$ făcând schimbările de variabile

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}, \beta = \frac{\xi + x}{2a\sqrt{t}}$$

vom avea

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha - \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2}d\beta\right] = \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}d\alpha = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}d\alpha = \\ &= u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Am folosit funcţia erorilor

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

Este evident că dacă funcţia $u_0(x)$ este impară faţă de punctul $x = l$ atunci funcţia $u(x,t)$ va fi şi ea impară faţă de $x = l$. Rezultă că pentru a rezolva problema la limită

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, x \in [0,l], t \geq 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), x \in [0,l], \\ u(0,t) &= 0, u(l,t) = 0 \end{aligned}$$

este suficient să prelungim funcţia $u_0(x)$ prin imparitate faţă de origine şi apoi prin periodicitate cu perioada $2l$ şi apoi să aplicăm formula lui Poisson. Soluţia $u(x,t)$ va fi şi ea periodică cu perioada $2l$. Restricţia sa la intervalul $[0,l]$ va fi soluţia problemei la limită. Prelungirea funcţiei $u_0(x)$ este dată de relaţia

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

unde

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

După formula lui Poisson avem

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi\xi}{l}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Presupunând că se poate interverti integrala cu sumarea avem

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{n\pi\xi}{l} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Notând

$$\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = \zeta, \xi = x + 2a\sqrt{t}\zeta, d\xi = 2a\sqrt{t}d\zeta$$

avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{n\pi\xi}{l} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = 2a\sqrt{t} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} \cos \frac{2an\pi\sqrt{t}\zeta}{l} d\zeta.$$

Folosind formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos bx dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{b^2}{4}}$$

avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{n\pi\xi}{l} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = 2a\sqrt{\pi t} \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l}}$$

şi deci

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}},$$

formulă pe care o vom obţine şi pe o altă cale.

Observaţie: Pentru a demonstra formula amintită mai sus se aplică teorema integrală a lui Cauchy funcţiei e^{-z^2} pe conturul dreptunghiului cu vârfurile $-R$, R, $R+\frac{b}{2}i$, $-R+\frac{b}{2}i$, se face $R \to \infty$ şi se foloseşte formula $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

16.5 Aplicarea transformatei Fourier

Fie din nou de găsit soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in R, t \geq 0$$

cu condiţia iniţială $u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R$.

Presupunând că funcţia $u(x,t)$ este continuă, mărginită şi absolut integrabilă în raport cu $x \in R$ şi la orice $t \geq 0$ rezultă că există transformata sa Fourier în raport cu variabila spaţială x

$$U(\omega,t)=F_\omega^-[u(x,t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}u(x,t)dx.$$

In particular

$$U(\omega,0)=F_\omega^-[u(x,0)]=F_\omega^-[u_0(x)].$$

Vom avea

$$F_\omega^-[\frac{\partial u}{\partial t}]=\frac{\partial U}{\partial t},\quad F_\omega^-[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]=-\omega^2U(\omega,t).$$

Deci transformata Fourier verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\omega,t)=-a^2\omega^2U(\omega,t)$$

cu condiţia iniţială

$$U(\omega,0)=F_\omega^-[u_0(x)].$$

Variabila ω joacă rolul de parametru. Acesta este unul din avantajele aplicării transformatelor integrale în general: ele transformă ecuaţii cu derivate parţiale în ecuaţii diferenţiale, ecuaţii diferenţiale în ecuaţii pur algebrice mult mai simple de rezolvat. In cazul nostru găsim imediat

$$U(\omega,t)=F_\omega^-[u_0(x)]e^{-a^2\omega^2t}.$$

Cum am stabilit că

$$F_\omega^{\pm}[e^{-kx^2}]=\frac{1}{\sqrt{2k}}e^{-\frac{\omega^2}{4k}},$$

rezultă că

$$e^{-a^2\omega^2t}=F\omega^-\left[\frac{1}{\sqrt{2a^2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right].$$

După teorema produsului de convoluţie avem

$$\begin{aligned}U(\omega,t)&=F\omega^-[u_0(x)].F\omega^-\left[\frac{1}{\sqrt{2a^2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]=\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F\omega^-\left[u_0(x)*\frac{1}{\sqrt{2a^2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right].\end{aligned}$$

Conform teoremei de inversiune rezultă expresia temperaturii

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u_0(x)*\frac{1}{\sqrt{2a^2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Am regăsit astfel folosind transformarea Fourier formula lui Poisson.

16.6 Aplicarea transformatei Laplace

Uneori problemele pentru ecuaţii parabolice pot fi rezolvate cu ajutorul transformatei Laplace. Ca exemplu considerăm problema determinării soluţiei problemei

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, 0 \le x < \infty, t \ge 0,\\ u(x,0) &= 0, 0 \le x < \infty,\\ u(0,t) &= u_0(t),\\ u(\infty,0) &= 0.\end{aligned}$$

Notând transformata Laplace în raport cu variabila temporală t

$$U(x,z) = L_z[u(x,t)] = \int_0^\infty u(x,t)e^{-zt}dt$$

avem

$$\begin{aligned}L_z[u(0,t)] &= U(0,z)\\ L_z[\frac{\partial u}{\partial t}] &= zU(x,z),\\ L_z[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Rezultă că transformata Laplace verifică ecuaţia

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = zU(x,z)$$

cu condiţiile $U(0,z) = L_z[u_0(t)]$, $U(\infty,z) = 0$. Rezultă

$$U(x,z) = L_z[u_0(t)]e^{-\frac{x}{a}\sqrt{z}}.$$

Vom arăta că are loc relaţia

$$\frac{1}{z}e^{-\alpha\sqrt{z}} = L_z\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}} e^{-\tau^2}d\tau\right] = L_z\left[\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\right], \alpha > 0$$

funcţia

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\tau^2}d\tau$$

fiind funcţia erorilor, iar funcţia $\mathrm{Erf}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$ fiind funcţia complementară a erorilor.

Rezultă că

$$\frac{1}{z}e^{-\frac{x}{a}\sqrt{z}} = L_z\left[\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = L_z\left[G(x,t)\right], G(x,0) = 0\right]$$

şi deci

$$e^{-\frac{x}{a}\sqrt{z}} = z\frac{1}{z}e^{-\frac{x}{a}\sqrt{z}} = L_z\left[\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\right].$$

După proprietatea convoluţiei rezultă

$$u(x,t) = \int_0^t u_0(\tau)\frac{\partial G(x,t-\tau)}{\partial t}d\tau.$$

Cum

$$\frac{\partial G(x,t-\tau)}{\partial t} = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

rezultă

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau$$

Fie $\sqrt{z}$ ramura olomorfă în planul complex cu tăietură după axa reală negativă care pe axa reală pozitivă coincide cu radicalul aritmetic. Fie $a > 0$. Considerăm conturul închis $\partial_{R,r}$ constând din arcele cercului C_R $|z| = R, \Re e(z) \leq a$, din coarda acestui cerc $l_{aR} : \Re e(z) = a, -\sqrt{R^2 - a^2} \leq \Im m(z) \leq \sqrt{R^2 - a^2}$ din cercul $|z| = r$ şi din bordurile $\gamma_\pm$ ale tăieturii $\Im m(z) = 0, -R \leq \Re e(z) \leq R$. Conform teoremei integrale a lui Cauchy avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial_{R,r}} e^{zt}\frac{1}{z}e^{-\alpha\sqrt{z}}dz = 0$$

sau

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} e^{zt}\frac{1}{z}e^{-\alpha\sqrt{z}}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} + \frac{1}{2\pi i}\int_r^R e^{-\rho t}\frac{e^{i\alpha\sqrt{\rho}} - e^{-i\alpha\sqrt{\rho}}}{\rho}d\rho = 0.$$

După lema lui Jordan

$$\int_{C_R} e^{zt}\frac{1}{z}e^{-\alpha\sqrt{z}}dz \to 0 \quad \textit{pentru} \quad R \to \infty, t > 0.$$

După formula de inversiune transformatei Laplace

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} e^{zt}\frac{1}{z}e^{-\alpha\sqrt{z}}dz \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} L_t^{-1}\left[\frac{1}{z}e^{-\alpha\sqrt{z}}\right].$$

Mai avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} e^{zt}\frac{1}{z}e^{-\alpha\sqrt{z}}dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}d\theta \to 1 \quad pentru \quad r\to 0.$$

Rezultă

$$L_t^{-1}\left[\frac{1}{z}e^{-\alpha\sqrt{z}}\right] = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{\sin\alpha\sqrt{\rho}}{\rho}d\rho + 1,$$

sau punând $\sqrt{\rho} = x$

$$L_t^{-1}\left[\frac{1}{z}e^{-\alpha\sqrt{z}}\right] = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-tx^2}\frac{\sin\alpha x}{x}dx + 1.$$

Pentru a calcula integrala

$$I(\alpha,t) = \int\limits_0^{\infty} e^{-tx^2}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

prin derivare în raport cu α

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha} = \int\limits_0^{\infty} e^{-tx^2}\cos\alpha x dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{\alpha}{4t}}.$$

Cum $I(0,t) = 0$ rezultă

$$I(\alpha,t) = \sqrt{\pi}\int\limits_0^{\alpha}\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)}d\xi = \sqrt{\pi}\int\limits_0^{\alpha/2\sqrt{t}} e^{-\tau^2}d\tau$$

de unde

$$L_t^{-1}\left[\frac{1}{z}e^{-\alpha\sqrt{z}}\right] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\alpha/2\sqrt{t}} e^{-\tau^2}d\tau = \mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Puteam rezolva problema fără să facem apel la transformata Laplace dacă observam că funcţia

$$v(x,t) = \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)h(t)$$

este soluţie a ecuaţiei omogene a căldurii satisfăcând condiţiile

$$\begin{aligned} v(x,0) &= 0, x \geq 0 \\ v(0,t) &= 1, t > 0. \end{aligned}$$

Funcţia

$$w\tau(x,t) = \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) h(t-\tau)$$

va verifica ecuaţia omogenă a căldurii cu condiţiile

$$\begin{aligned} w\tau(x,0) &= 0, x \geq 0, \\ w\tau(0,t) &= 1, t > \tau. \end{aligned}$$

Funcţia

$$w\tau^*(x,t) = w\tau(x,t) - w_{\tau+d\tau}(x,t) = -\frac{\partial w\tau(x,t)}{\partial \tau} d\tau$$

va fi soluţie a ecuaţiei omogene a căldurii cu condiţiile

$$\begin{aligned} w\tau^*(x,0) &= 0, x \geq 0, \\ w\tau^*(0,t) &= 1, \tau < t < \tau + d\tau. \end{aligned}$$

Rezultă că soluţia ecuaţiei omogene a căldurii cu condiţiile

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, x \geq 0, \\ u(0,t) &= u_0(t), t > 0, \end{aligned}$$

este

$$u(x,t) = -\int_0^t u_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a(t-\tau)}\right) d\tau$$

şi regăsim aceeaşi expresie de mai înainte.

16.7 Metoda lui Fourier pentru ecuaţia căldurii

1. Fie de rezolvat problema găsirii soluţiei $u(x,t)$ a ecuaţiei căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

cu condiţiile la limită omogene

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t \geq 0$$

şi cu condiţia iniţială

$$u(x,0) = u_0(x), 0 < x < l$$

unde funcţia $u_0(x)$ este continuă şi cu derivată continuă pe porţiuni.

In metoda lui Fourier se caută soluţii particulare de forma

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Introducând în ecuaţie avem

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t) X''(x)$$

sau

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

de unde obţinem două ecuaţii

$$\begin{aligned} T'(t) + a^2 \lambda T(t) &= 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0. \end{aligned}$$

Pentru a obţine o soluţie nebanală care să satisfacă condiţiile la limită trebuie să găsim o soluţie nebanală a ecuaţiei

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

care să satisfacă condiţiile la capete

$$X(0) = 0, X(l) = 0$$

adică am ajuns la aceeaşi problemă Sturm-Liouville a valorilor proprii ca la oscilaţiile corzii finite. Acolo s-a arătat că numai pentru valorile parametrului λ egale cu

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

există soluţiile nebanale

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Valorilor $\lambda = \lambda_n$ ale parametrului le corespund soluţiile celeilalte ecuaţii

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$$

unde A_n sunt constante arbitrare. Astfel, toate funcţiile

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

satisfac ecuaţia căldurii şi condiţiile la limită pentru orice constante A_n.

Alcătuim seria

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Scriind că aceasta satisface condiţia iniţială, avem

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Seria din dreapta este dezvoltarea în serie de sinuşi a funcţiei $u_0(x)$ pe intervalul $(0,l)$. Rezultă că avem

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Dacă presupunem că funcţia $u_0(x)$ este continuă, are derivate contiunui pe porţiuni şi se anulează în capetele intervalului $[0,l]$ rezultă că seria sa de sinuşi este uniform şi absolut convergentă pe $[0,l]$. Cum pentru $t \geq 0$

$$0 < e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \leq 1$$

rezultă că seria care defineşte pe $u(x,t)$ este de asemenea uniform şi absolut convergentă pentru $t \geq 0$. Deci funcţia $u(x,t)$ este continuă pentru $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ şi satisface condiţiile iniţiale şi la limită. Pentru a arăta că ea verifică ecuaţia căldurii este suficient să arătăm că seriile obţinute prin derivare odată în raport cu t şi de două ori în raport cu x sunt absolut şi uniform convergente în $0 < x < l$, $t > 0$. Ori aceasta rezultă din faptul că pentru $t > 0$

$$0 < \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1, 0 < \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1$$

pentru n suficient de mare. La fel se arată existenţa derivatelor de orice ordin în raport cu x şi cu t ale lui $u(x,t)$.

2. Să găsim acum soluţia ecuaţiei căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

cu condiţiile la limită

$$u(0,t) = \varphi_0(t), u(l,t) = \varphi_l(t), t \geq 0$$

şi cu condiţia iniţială

$$u(x,0) = u_0(x), 0 \leq x \leq l.$$

Vom căuta soluţia sub forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

unde

$$T_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Integrând de două ori prin părţi ultima relaţie avem

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi} \left[u(0,t) - (-1)^n u(l,t) \right] - \frac{2l}{n^2\pi^2} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

sau

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi} \left[\varphi_0(t) - (-1)^n \varphi_l(t) \right] - \frac{2l}{n^2\pi^2} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Pe de altă parte avem

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Eliminând integralele între cele două relaţii obţinem ecuaţia verificată de funcţia $T_n(t)$

$$\frac{dT_n(t)}{dt} + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = \frac{2n\pi a^2}{l^2} \left[\varphi_0(t) - (-1)^n \varphi_l(t) \right]$$

cu soluţia generală

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \left[C_n + \frac{2n\pi a^2}{l^2} \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \tau} \left[\varphi_0(\tau) - (-1)^n \varphi_l(\tau) \right] d\tau \right]$$

unde evident

$$C_n = T_n(0).$$

Dar din relaţia

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=u_0(x)$$

rezultă

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

şi deci

$$T_n(t)=e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\left[\begin{array}{c}\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\\ +\frac{2n\pi a^2}{l^2}\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\tau}\left[\varphi_0(\tau)-(-1)^n\varphi_l(\tau)\right]d\tau\end{array}\right].$$

In cazul particular în care $\varphi_0(t)=v_0=const$, $\varphi_l(t)=v_l=const$ avem

$$\begin{aligned}T_n(t)&=\frac{2}{n\pi}\left[v_0-(-1)^n v_l\right]\left[1-e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\right]+\\&+e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.\end{aligned}$$

Inlocuind în expresia lui $u(x,t)$ şi ţinând cont de relaţiile

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\xi}{n}=\begin{cases}\frac{\pi-\xi}{2} & pentru\quad 0<\xi<2\pi\\ 0 & pentru\quad \xi=0,\xi=2\pi\end{cases},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\xi}{n}=\begin{cases}\frac{\xi}{2} & pentru\quad -\pi<\xi<\pi\\ 0 & pentru\quad \xi=-\pi,\xi=\pi\end{cases},$$

obţinem

$$\begin{aligned}u(x,t)&=v_0+(v_l-v_0)\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n v_l-v_0}{n}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}+\\&+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\end{aligned}$$

3. Să găsim soluţia ecuaţiei căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

cu condiţiile la capete

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha u\right|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\right|_{x=l}=0$$

şi condiţia iniţială

$$u(x,0) = u_0(x), 0 \leq x \leq l.$$

Problema corespunde propagării căldurii într-o bară la ale cărei capete are loc schimb de căldură cu exteriorul cu temperatură nulă. α este un coeficient care depinde de gradul de izolare al capetelor barei.

Conform metodei lui Fourier, căutăm soluţii particulare de forma

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Obţinem ecuaţiile

$$\begin{aligned} T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0. \end{aligned}$$

Pentru ca soluţia să verifice condiţiile la limită trebuie satisfăcute condiţiile

$$X'(0) - \alpha X(0) = 0, X'(l) + \alpha X(l) = 0.$$

Cum avem

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

obţinem condiţiile

$$\begin{aligned} \alpha C_1 - \lambda C_2 &= 0, \\ (\alpha c \cos \lambda l - \lambda \sin \lambda l)C_1 + (\alpha \sin \lambda l + \lambda \cos \lambda l)C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Pentru ca acest sistem să aibă soluţii nebanale trebuie ca determinantul

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\lambda \\ \alpha c \cos \lambda l - \lambda \sin \lambda l & \alpha \sin \lambda l + \lambda \cos \lambda l \end{vmatrix} = 0.$$

Notând

$$\mu = \lambda l, p = \alpha l$$

găsim

$$2 \cot \mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}.$$

Făcând graficele funcţiilor

$$y = 2 \cot \mu, y = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}$$

vedem că ecuaţia de mai sus are în fiecare din intervalele $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, ... câte o rădăcină pozitivă, iar rădăcinile negative au modulul egal cu al celor pozitive. Fie $\mu_1, \mu_2, \mu_3, ...$ rădăcinile pozitive. Atunci valorile proprii ale problemei Sturm-Liouville vor fi

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2, n = 1, 2, 3, ...$$

Fiecărei valori proprii îi corespunde funcţia proprie

$$X_n(x) = \cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}$$

şi soluţia celeilalte ecuaţii

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}$$

unde A_n este o constantă arbitrară. Obţinem astfel soluţiile particulare

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}\left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)$$

care satisfac condiţiile la limită pentru orice constante A_n.

Formăm seria

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}\left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right).$$

Scriind că aceasta satisface condiţia iniţială avem

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x).$$

Funcţiile proprii sunt ortogonale, adică

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = 0, n \neq m.$$

Calculând pătratul normei funcţiei proprii avem

$$\int_0^l X_n(x)^2 dx = \int_0^l \left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)^2 dx = \frac{l}{2}\frac{p(p+2)+\mu_n^2}{\mu_n^2}.$$

Presupunând că seria lui $u(x,t)$ converge uniform găsim

$$A_n = \frac{2}{l}\frac{\mu_n^2}{p(p+2)+\mu_n^2}\int_0^l u_0(x)\left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)dx$$

şi avem astfel soluţia ecuaţiei.

4. Să considerăm acum ecuaţia neomogenă a căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

cu condiţia iniţială $u(x,0) = 0$ şi condiţiile la limită $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$. Presupunem că funcţia $f(x,t)$ este continuă, are derivată parţială în raport cu x continuă pe porţiuni şi pentru $t > 0$ satisface condiţia $f(0,t) = f(l,t) = 0$.

Vom căuta soluţia problemei sub forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

în aşa fel încât condiţiile la limită să fie satisfăcute automat. Cum vom putea scrie

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

cu

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

înlocuind în ecuaţie avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Rezultă că funcţiile $T_n(t)$ satisfac ecuaţiile

$$T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t).$$

Din condiţia iniţială deducem

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0$$

adică

$$T_n(0) = 0.$$

Rezultă

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau.$$

Deci soluţia problemei este

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Inlocuind expresia lui $f_n(\tau)$ se poate scrie

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

unde

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}.$$

Funcţia $G(x,\xi,t)$ este funcţia de sursă instantanee punctuală sau funcţia Green a ecuaţiei căldurii cu temperaturi nule la capete. Ea corespunde temperaturii care ia naştere în punctul x al barei la momentul t când la momentul $t=0$ în punctul $x=\xi$ există o sursă instantanee care dă căldura $Q=c\rho$, capetele barei fiind menţinute la temperatura nulă. Pe ea o puteam obţine considerând că în punctul $x=\xi$ avem temperatura $\delta(x-\xi)$ şi prelungind-o pe aceasta prin imparitate faţă de capete, adică prin imparitate faţă de $x=0$ şi apoi prin periodicitate cu perioada $2l$. Acea prelungire va fi

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

unde

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\delta(x-\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}$$

adică funcţia de sursă corespunde unei temperaturi în bara infinită dată de expresia

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}$$

şi după formula lui Poisson vom avea

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\frac{2}{l}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{x-\zeta}{2a\sqrt{t}}\right)^2}\sin\frac{n\pi\zeta}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\zeta$$

sau după un calcul pe care l-am mai făcut

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}.$$

Dacă condiţia iniţială este neomogenă atunci soluţiei de mai sus trebuie să se adauge soluţia ecuaţiei omogene obţinută la punctul 1.

5. Pentru a găsi soluţia ecuaţiei neomogene a căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

cu condiţia iniţială neomogenă

$$u(x,0) = u_0(x), 0 \le x \le l,$$

cu condiţii la limită neomogene

$$u(0,t) = \varphi_0(t), u(l,t) = \varphi_l(t), t \ge 0$$

punem

$$u = v + w$$

unde v satisface ecuaţia omogenă

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

cu condiţia iniţială $v(x,0) = u_0(x)$, $0 \le x \le l$ şi condiţiile la limită $v(0,t) = \varphi_0(t)$, $v(l,t) = \varphi_l(t)$, $t \ge 0$ iar funcţia w satisface ecuaţia neomogenă

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x,t)$$

cu condiţia iniţială nulă $w(x,0) = 0$ şi condiţiile la limită omogene $w(0,t) = w(l,t) = 0$, $t \ge 0$.

Puteam să căutăm soluţia sub forma

$$u(x,t) = \varphi_0(t) + (\varphi_l(t) - \varphi_0(t))\frac{x}{l} + U(x,t)$$

funcţia $U(x,t)$ fiind soluţia unei probleme de tipul celei de la punctul precedent.

16.8 Exerciţii

1. Să se găsească soluţia ecuaţiei $u_t - a^2u_{xx} = 0, x \in R, t \ge 0$ cu condiţia iniţială $u(x,0) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad x < 0 \\ Ae^{-\alpha x} & \textit{pentru} \quad x > 0, \end{cases}$ unde $A = const$, $\alpha = const > 0$.

R.

$$u(x,t) = \frac{A}{2} e^{-\alpha x + a^2 x^2 t} \left[1 - \Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}} + a\alpha\sqrt{t} \right) \right],$$

unde $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\xi^2} d\xi$ este funcţia erorilor.

2. Să se găsească soluţia ecuaţiei $u_t - a^2 u_{xx} = 0, x \in R, t \geq 0$ cu condiţia iniţială
$u(x,0) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x < -l \\ u_0 \neq 0 & pentru \quad -l < x < l \\ 0 & pentru \quad x > l. \end{cases}$

R.

$$u(x,t) = u_0 \left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

3. Să se găsească soluţia ecuaţiei $u_t - a^2 u_{xx} = 0, x \in (0, \infty), t \geq 0$ cu condiţia iniţială $u(x,0) = u_0$, $x > 0$ şi condiţia la limită $u(0,t) = 0$, $t > 0$.

R. $u(x,t) = u_0 \Phi(\frac{x}{2a\sqrt{t}})$.

4. Să se găsească soluţia ecuaţiei $u_t - a^2 u_{xx} = 0, x \in (0, \infty), t \geq 0$ cu condiţia iniţială $u(x,0) = 0$, $x > 0$ şi condiţia la limită $u(0,t) = u_0$, $t > 0$.

Ind. Se pune $u(x,t) = v(x,t) + u_0$, se reduce la problema precedentă,

$$u(x,t) = u_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

5. Să se găsească soluţia ecuaţiei $u_t - a^2 u_{xx} = 0, x \in (0, \infty), t \geq 0$ cu condiţia iniţială
$u(x,0) = \begin{cases} u_0 & pentru \quad 0 < x < 1 \\ 0 & pentru \quad x > 1 \end{cases}$ şi condiţia la limită $u_x(0,t) = 0$, $t > 0$.

R.

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{x+1}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi\left(\frac{x-1}{2a\sqrt{t}} \right) \right]$$

6. Să se găsească soluţia ecuaţiei $u_t - a^2 u_{xx} = 0, x \in (0, \infty), t \geq 0$ cu condiţia iniţială $u(x,0) = 0$, $x > 0$ şi condiţia la limită $-u_x(0,t) = q$, $t > 0$.

R.

$$u(x,t) = 2aq\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} - qx \left[1 - \Phi(\frac{x}{2a\sqrt{t}}) \right].$$

7. Să se determine temperatura în bara $0 \leq x \leq l$ prin a cărei suprafaţă laterală nu are loc schimb de căldură dacă capetele sale sunt menţinute la temperatura nulă, iar la momentul $t = 0$ are loc relaţia $u(x,0) = u_0 = const$, $0 < x < l$. Să se verifice conservarea căldurii.

R.

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

Se verifică relaţia

$$\int_0^l u(x,T)dx - \int_0^l u(x,0)dx = a^2\left(\int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)dt - \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)dt\right).$$

8. Temperatura iniţială a barei $0 \le x \le l$ cu suprafaţa laterală izolată este $u_0 = const$, iar capetele sunt menţinute la temperaturile $u(0,t) = u_1 = const$, $u(l,t) = u_2 = const$. Să se determine temperatura în bară.

R.

$$u(x,t) = u_1 + (u_2-u_1)\frac{x}{l} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{(u_0-u_1)[1-(-1)^n] + (-1)^{n+1}(u_1-u_2)\right\}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

9. Să se determine temperatura în bara $0 \le x \le l$ cu suprafaţa laterală izolată dacă extremitatea $x = 0$ este izolată termic, extremitatea x=l este menţinută la temperatura $u(x,l) = u_0 = const$, iar temperatura iniţială în bară este $u(x,0) = u_0\frac{x^2}{l^2}$.

Ind. Se caută soluţia de forma $u(x,t) = v(x,t) + u_0\frac{x^2}{l^2}$ unde $v(x,t)$ verifică ecuaţia

$$v'_t - a^2v''_{xx} = \frac{2u_0a^2}{l^2}$$

cu condiţia iniţială $v(x,0) = 0$ şi condiţiile omogene $v'_x(0,t) = 0$, $v(x,l) = 0$. Se găsesc funcţiile proprii ale ecuaţiei omogene

$$X_k(x) = \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}, k = 1,2,3,...$$

Soluţia se caută de forma

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$$

şi se găsesc ecuaţiile

$$b'_k(t) + \frac{(2k-1)^2\pi^2a^2}{4l^2}b_k(t) = (-1)^{k-1}\frac{8u_0a^2}{(2k-1)\pi l^2}$$

cu condiţiile $b_k(0) = 0$. Rezultă

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{32u_0(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3\pi^3}\left[1 - e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}}\right]\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

10. Temperatura iniţială a barei $0 \leq x \leq l$ cu suprafaţa laterală izolată este nulă; capătul x=l este menţinut la temperatura nulă, iar la capătul x=0 temperatura creşte proporţional cu timpul $u(0,t) = At$, A= const. Să se determine temperatura în bară.

R.

$$u(x,t) = At\frac{l-x}{l} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Al^2}{k^3\pi^3a^2}\left(1 - e^{-\frac{k^2\pi^2a^2t}{l^2}}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

11. Să se găsească soluţia $u(x,t)$ a ecuaţiei

$$u_t - 36u_{xx} = \frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi x}{2}, 0 \leq x \leq 2, t \geq 0,$$

cu condiţia iniţială $u(x,0) = 0$ şi condiţiile la limită $u(0,t) = 0$, $u'_x(2,t) = 0$.

R.

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{360(k^2+k-\frac{3}{4})\left(\frac{2k+1}{4}\pi\right)^2}\times$$
$$\times\left[1 - e^{-36\left(\frac{2k+1}{4}\pi\right)^2 t}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{4}$$

12. Să se găsească soluţia $u(x,t)$ a ecuaţiei

$$u_t - 3u_{xx} + 6u = 0, 0 \leq x \leq 2, t \geq 0,$$

cu condiţiile la limită $u(0,t) = 1$, $u(2,t) = 2$ şi condiţia iniţială

$$u(x,0) = x^2 - \frac{3}{2}x + 1.$$

R.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2k\pi(1-\cos k\pi)}{8+k^2\pi^2} + \right.$$
$$\left.\frac{16(-8+8\cos k\pi - k^2\pi^2\cos k\pi)}{k^3\pi^3(8+k^2\pi^2)}e^{-\frac{3}{4}(8+k^2\pi^2)t}\right]\sin\frac{k\pi x}{2}.$$

PARTEA V

TEORIA PROBABILITĂŢILOR ŞI STATISTICĂ MATEMATICĂ

CAPITOLUL 17

PROBABILITĂŢI ŞI STATISTICĂ MATEMATICĂ

17.1 Spaţiu probabilistic,definiţii, proprietăţi

Teoria probabilităţilor este analiza matematică a noţiunii de *experienţă aleatoare* (sau aleatorie, întâmplătoare, lat. aleatorius $<$ alea - zar). Noţiunile fundamentale ale acestei teorii sunt cele de *eveniment* şi de *probabilitate*. Prin formalizarea acestor noţiuni se ajunge la modelul teoretic bazat pe teoria mulţimilor propus de Kolmogorov în 1929.

Fie o experienţă aleatoare oarecare. Rezultatul experienţei nu poate fi determinat decât în urma realizării experienţei. Fie $\Omega = \{\omega\}$ mulţimea tuturor rezultatelor posibile ω în experienţa dată şi A un eveniment oarecare legat de experienţa considerată, adică producerea sau neproducerea unui fenomen legat de experienţa considerată. Putem spune că eveminentul A a avut loc sau nu a avut loc, numai în urma realizării experienţei. De aceea, evenimentul A poate fi identificat cu o mulţime de rezultate ω - rezultatele favorabile realizării sale- adică evenimentul A poate fi identificat cu o submulţime a lui Ω . Elementele $\omega \in \Omega$ se pot numi atunci *evenimente elementare*. In acest fel operaţiile de reuniune, intersecţie, complementare (negare, trecere la contrariu) a evenimentelor coincid cu operaţiile corespunzătoare asupra mulţimilor şi deci mulţimea evenimentelor care ne vor interesa trebuie să fie închisă (stabilă) în raport cu aceste operaţii.

Probabilitatea este o funcţie numerică definită pe mulţimea evenimentelor, funcţie ale cărei proprietăţi trebuie să fie asemănătoare celor ale frecvenţei de realizare a evenimentului.

Definiţia 1. Fie $\Omega = \{\omega\}$ mulţimea rezultatelor posibile într-o experienţă aleatoare. Fie $\mathcal{S}$ o mulţime de părţi ale lui Ω care formează în raport cu operaţiile obişnuite cu mulţimi o σ *-algebră*, adică are proprietăţile:

1) $\Omega \in \mathcal{S}$; mulţimea tuturor rezultatelor posibile face parte din $\mathcal{S}$;

2) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{S}$; odată cu două mulţimi $\mathcal{S}$ conţine şi diferenţa lor;

3) $A_i \in S, i = 1, 2, ... \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$; orice reuniune de mulţimi din $\mathcal{S}$ este din $\mathcal{S}$.

Mulţimea $\mathcal{S}$ se numeşte *mulţimea evenimentelor legate de experienţa considerată*.

Din definiţia dată rezultă că mulţimea $\mathcal{S}$ a evenimentelor este închisă în raport cu operaţiile de reuniune, intersecţie, diferenţa şi complementară. Evenimentul Ω se numeşte *evenimentul sigur*; evenimentul $\emptyset$ se numeşte *evenimentul imposibil*; evenimentul $A \backslash B$ se numeşte *diferenţa evenimentelor* A şi B; evenimentul $C_A = \Omega \backslash A$ se numeşte *evenimentul contrariu* al lui A; etc. Evenimentele A şi B se numesc *incompatibile* dacă nu se pot realiza în acelaşi timp, adică dacă $A \cap B = \emptyset$. Orice eveniment şi contrariul său sunt evenimente incompatibile. Un eveniment se numeşte *compus* dacă el este reuniunea a altor două evenimente diferite de el. *Evenimentele elementare* ω sunt diferite de evenimentul imposibil şi nu sunt compuse.

Definiţia 2. O funcţie $p : \mathcal{S} \to \mathbf{R}_+$ se numeşte *probabilitate* pe mulţimea evenimentelor dacă are următoarele proprietăţi:

1) $p(\Omega) = 1$; (evenimentul sigur are probabilitatea egală cu unitatea);

2) dacă $A_i \in \mathcal{S}, i = 1, 2, ...$,sunt evenimente incompatibile două câte două

$A_i \bigcap A_j = \emptyset, i \neq j = 1, 2, ...$ atunci $p\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p\left(A_i\right)$; (proprietatea de aditivitate numărabilă).

Dacă evenimentele sunt incompatibile două câte două $A_i \bigcap A_j, i \neq j = 1, 2, ...$, vom scrie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ în loc de $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$; la fel în cazul finit.

Definiţia 3. Un triplet $(\Omega, \mathcal{S}, p)$ se numeşte *spaţiu probabilistic* (*de probabilitate*).

Obiectul studiului teoriei probabilităţilor este spaţiul probabilistic.

Exemplul 1. Fie într-o experienţă aleatoare mulţimea evenimentelor elementare $\Omega = \omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$ şi fie mulţimea evenimentelor $\mathcal{S} = P(\Omega)$, mulţimea părţilor lui Ω. Fie $p(\omega_k) = \frac{1}{N}, k = 1, 2, ..., N$, adică evenimentele elementare sunt *egal posibile*. Atunci pentru un eveniment A oarecare legat de experienţă $p(A) = \frac{r}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$, unde $r = |A|$ este numărul evenimentelor elementare care compun pe A (rezultatele favorabile lui A). Tripletul $(\Omega, \mathcal{S}, p)$ este spaţiul probabilistic al *modelului clasic al lui Laplace* al teoriei probabilităţilor.

In cazul particular al experienţei aruncării unui zar, $N = 6$ şi $\omega_i = i, i = 1, 2, ..., 6$ este evenimentul apariţiei feţei i.

In experienţei aruncării de n ori a unei monede, mulţimea evenimentelor elementare este de forma $\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ unde $\varepsilon_i = 0$ *sau* 1 după cum la a i-a aruncare a ieşit faţa cu stema sau faţa cu valoarea. In acest caz $N = 2^n$. Evenimentul care constă în apariţia de k ori a feţei cu valoarea este

$$A = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \,|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n = k\}.$$

Atunci $|A| = C_n^k$, $p(A) = \frac{C_n^k}{2^n}$.

Din definiţiile date rezultă uşor că într-un spaţiu probabilistic au loc următoarele proprietăţi:

a) $p\left(C_A\right) = 1 - p(A)$; (proprietatea probabilităţii evenimentului contrar);

b) $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$; (probabilitatea este funcţie crescătoare);

c) $0 \leq p(A) \leq 1$; (probabilitatea are valori pozitive cel mult egale cu unitatea);

d) $p(A \bigcup B) = p(A) + p(B) - p(A \bigcap B)$

sau mai general

$$p(A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n) =$$

$$= \sum p(A_i) - \sum p(A_i \bigcap A_j) + \sum p(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k) - ..$$

(formula includerii şi excluderii);

e) dacă $A_n \downarrow B$ adică

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset A_{n+1} \supset ...B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

atunci $\lim\limits_{n \to \infty} p(A_n) = p(B)$ (proprietatea de continuitate la dreapta a probabilităţii)

f) dacă $A_n \uparrow B$ adică

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset A_{n+1} \subset ...B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} p(A_n) = p(B)$; (proprietatea de continuitate la stânga a probabilităţii).

Dacă A, B sunt două evenimente şi $p(B) > 0$ atunci raportul $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ se numeste *probabilitatea evenimentului* A *condiţionat de* B şi se notează $p(A|B)$ sau $p_B(A)$. Deci

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

adică

$$p(A\cap B) = p(B)p(A|B) = p(A)p(B|A).$$

Când $p(A|B) = p(A)$ adică dacă şi numai dacă $p(A\cap B) = p(A)p(B)$ evenimentele A, B se numesc *independente*.

In general avem relaţia

$$p(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n) =$$

$$= p(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{n-1})p(A_n|A_1\cap ...\cap A_{n-1}) = ...$$

$$= p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1\cap A_2)...p(A_n|A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{n-1}).$$

Dacă $\Omega = \sum\limits_{i=1}^{n} H_i$ se spune că evenimentele $H_i, i = 1, 2, ..., n$ constituie un *sistem complet de evenimente* sau o *desfacere a evenimentului sigur*. Atunci oricare ar fi $A \in \mathcal{S}$, $A = A\cap\Omega = \sum\limits_{i=1}^{n}(A\cap H_i)$ şi deci rezultă

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)p(A|H_i),$$

relaţie numită *formula probabilităţii totale*.

Cum oricare ar fi $k = 1, 2, ..., n$, $p(H_k\cap A) = p(A)p(H_k|A) = p(H_k)p(A|H_k)$ avem

$$p(H_k|A) = \frac{p(H_k)p(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(H_i)p(A|H_i)}.$$

Aceasta este *formula lui Bayes*. De obicei evenimentele H_k se constituie în “ipoteze” în care are loc evenimentul A sau “cauze” sub a căror acţiune are loc evenimentul A; de aceea formula se mai numeşte şi *formula ipotezelor* sau *formula cauzelor*. Probabilităţile $p(H_k)$ sunt probabilităţi a priori, în timp ce probabilităţile $p(H_k|A)$ sunt probabilităţi a posteriori.

17.1.1 Exerciţii şi probleme

1. O ţintă este formată din zece cercuri concentrice de raze $r_1 < r_2 < ... < r_{10}$ .Notăm prin A_k evenimentul de nimerire a cercului cu raza r_k, $k = 1, 2, ..., 10$. Care este semnificaţia evenimentelor: $a)$ $B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k$; $b)$ $C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$; $c)$ $D = A_1 \cap A_2$.

R. a) B constă în nimerirea cercului cu raza r_6 ; b) C constă în nimerirea cercului de razărr_1; c) D constă în nimerirea coroanei determinate de cercurile cu razele r_1, r_2.

2. Se execută trei lovituri asupra unei ţinte. Notăm prin A_i evenimentul " lovitura i a nimerit ţinta", $i = 1, 2, 3$. Să se scrie evenimentele: a) A="toate loviturile nimeresc ţinta"; b) B="nici o lovitură nu nimereşte ţinta"; C="cel puţin o lovitură loveşte ţinta"; D="cel puţin o lovitură nu nimereşte ţinta".

R. $a)$ $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$; $b)$ $B = C_{A_1} \cap C_{A_2} \cap C_{A_3}$; $c)$ $C = A_1 \cap C_{A_2} \cap C_{A_3}$;

$d)$ $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

3. Se face controlul de calitate asupra unui lot de n piese. Fie A_i ="piesa i este defectă", $i = 1, 2, ..., n$. Să se scrie următoarele evenimente: a) A="nici o piesă nu este defectă"; b) B="cel puţin una din piese este defectă"; c) C="exact $k \leq n$ piese sunt defecte"; d) D="cel mult $k \leq n$ piese sunt defecte".

R. $a)$ $A = C_{A_1} \cap C_{A_2} \cap ... \cap C_{A_n}$; $b)$ $B = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$;

$c)$ $\forall J \subset 1, 2, ..., n,$ $punem$ $B_J = \left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{i \notin J} C_{A_i}\right)$, $C = \bigcap_{|J|=k} B_J$;

$d)$ $D = \bigcup_{j=0}^{k} \bigcap_{|J|=j} B_J$.(Prin $|J|$ am notat numărul elementelor lui J).

4. Să se arate că evenimentele A, $C_{A \cup B}$ sunt incompatibile.

5. Intr-un compartiment de tren sunt două fotolii, faţă în faţă, de câte 5 locuri. Din 10 călători, 4 doresc să stea cu faţa la locomotivă, iar 3 cu spatele la ea. Care este probabiitatea ca doi din cei trei călători cărora le este indiferenta poziţia să stea unul lângă altul?

Sol. Fie A, B, C cei trei călători cărora le este indiferentă poziţia. Dacă A stă cu faţă la locomotivă, atunci împreună cu el pot sta încă 4 persoane în 5! moduri. Ceilalţi călători pe fotoliul din faţă pot sta deasemenea în 5! moduri. Dacă A a ales să stea cu faţă la locomotivă, atunci toţi călatori se pot aşeza în $(5!)^2$ moduri. Acelaşi număr de moduri se obţine dacă aleg să stea cu faţă la locomotivă B sau C. Deci sunt în total

$3 \cdot (5!)^2$ cazuri egal posibile. Cazuri favorabile vor fi acelea în care doi călători daţi , de exemplu, B, C vor sta alături. Asta este posibil numai dacă B şi C stau cu spatele la locomotivă. Numărul acestor poziţii va fi $5! \cdot 3! \cdot 2 \cdot 4$. Deci probabilitatea cerută este $p = \frac{5! \cdot 3! \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot (5!)^2} = \frac{2}{15}$.

6. Care este probabilitatea ca luna ianuarie a unui an oarecare să aibă 4 duminici?

Sol. Printre primele 28 de zile ale lui ianuarie vor fi neapărat 4 duminici. Rezultă că în ianuarie nu vor fi decât 4 duminici dacă acestea nu vor fi în zilele de 29, 30, 31, adică dacă ziua de 29 cade lunea, marţea, miercurea sau joia. Deci $p = \frac{4}{7}$.

7. Dintr-o partidă de 37 de piese din care 6 sunt defecte se aleg 3 piese. Care este probabilitatea ca; 1) toate trei sunt fără defecte; 2) cel puţin una este fără defecte?

R. 1) $p = \frac{C_{31}^3}{C_{37}^3} = 0.579$; 2) $p = \frac{C_{31}^3 + C_6^1 C_{31}^2 + C_6^2 C_{31}^1}{C_{37}^3} = 0.397$

8. Intr-o urnă se află bilete cu cifrele 0, 1, 2,..., 9. Se extrag 5 bilete şi se aşează în ordine, obţinând un număr. Care este probabilitatea ca numărul obţinut să fie divizibil cu 396?

R. $p = \frac{96}{30240} = 0.0015$.

9. De câte ori trebuie să aruncăm un zar pentru ca să ne apară cel puţin o dată faţa 6 cu o probabilitate mai mare ca 0,5?

R. $p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2} \Rightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln 6 - \ln 5} \cong 3,80$.

10. Un trăgător nimereşte ţinta de 7 ori din 10 trageri, iar alt trăgător din 9 trageri nimereşte ţinta de 8 ori. Trăgând simultan în aceeaşi ţintă, care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă.

R. $p = \frac{7}{10} + \frac{8}{9} - \frac{7}{10}\frac{8}{9} = \frac{87}{90}$.

11. Fie n elemente oarecare într-o anumită ordine. Ele se permută aleator. Care este probabilitatea ca, cel puţin un element să se găsească pe locul său?

R. Dacă $A_i =$"elementul i este pe locul lui", atunci evenimentul căruia trbuie să-i calculăm probabilitatea este $B = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Cum $p(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$, $p(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$, etc, rezultă $p(B) = C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} - ... = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$.

12. Să se determine probabilitatea evenimentului A ştiind $p\left(A \cap B\right) = p_1$, $p\left(A \cap C_B\right) = p_2$.

Sol. Cum $A = A \cap B + A \cap C_B$ rezultă $p(A) = p_1 + p_2$.

17.2 Variabile aleatoare

Definiţia 1. Fie $(\Omega, \mathcal{S}, p)$ un spaţiu de probabilitate. O funcţie $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ se numeşte *variabilă aleatoare* sau variabilă eventuală dacă pentru orice $x, x \in \mathbf{R}$ mulţimea $\{\omega \in \mathcal{S} | \xi(\omega) < x\}$ este din σ -algebra $\mathcal{S}$ şi

$$p(\omega \in \mathcal{S} | -\infty < \xi(\omega) < \infty) = 1.$$

In loc de $\{\omega \in \mathcal{S} | \xi(\omega) < x\}$ se scrie simplu $\{\xi < x\}$. Prima condiţie din definiţie cere să se poată defini probabilitatea evenimentului $\{\xi < x\}$; a doua condiţie cere ca funcţia ξ să fie efectiv definită pe întreaga mulţime a evenimentelor elementare Ω .

Dacă A este un eveniment, variabila aleatoare definită prin relaţia

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \textit{pentru } \omega \in A, \\ 0 & \textit{pentru } \omega \notin A, \end{cases}$$

se numeşte *indicatorul evenimentului* A. (In analiză această funcţie se numeşte funcţia caracteristică a lui A, în teoria probabilităţilor prin funcţie caracteristică se va înţelege altceva). Sunt evidente relaţiile

$$I_{C_A} = 1 - I_A, I_{A \cap B} = I_A . I_B, I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}.$$

Variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ se numesc *variabile aleatoare independente* dacă oricare ar fi sistemul de numere reale $x_1, x_2, ..., x_n$ avem

$$p(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n) = p(\xi_1 < x_1) p(\xi_2 < x_2) ... p(\xi_n < x_n).$$

O funcţie vectorială $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) : \Omega \to \mathbf{R}^n$ ale cărei componente $\xi_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ sunt variabile aleatoare se numeşte *variabilă aleatoare n-dimensională* sau *vector aleator n-dimensional*.

Următoarele proprietăţi ale variabilelor aleatoare sunt frecvent folosite:

1). Dacă ξ este o variabilă aleatoare şi c o constantă, atunci $\xi + c$, $c\xi$, $|\xi|$, ξ^2, $\frac{1}{\xi}$ pentru $\xi \neq 0$ sunt de asemenea tot variabile aleatoare.

Intr-adevăr, avem

$$\{\xi + c < x\} = \{\xi < x - c\} \in \mathcal{S};$$

$$\{c\xi < x\} = \begin{cases} \{\xi < \frac{x}{c}\} \in \mathcal{S} \ pentru \ c > 0 \\ \{\xi > \frac{x}{c}\} \in \mathcal{S} \ pentru \ c < 0 \end{cases};$$

$$\{|\xi| < x\} = \{\xi < x\} \cup \{\xi > -x\} \in \mathcal{S};$$

$$\{\xi^2 < x\} = \{|\xi| < \sqrt{x}\} \in \mathcal{S};$$

$$\{\frac{1}{\xi} < x\} = \begin{cases} \{\xi < 0\} \in \mathcal{S} \quad pentru \ x = 0 \\ \{\xi < 0\} \cap \{\xi > \frac{1}{x}\} \in \mathcal{S} \quad pentru \ x > 0 \\ \{\xi < 0\} \cup \{\xi > 0\} \cap \{\xi > \frac{1}{x}\} \in \mathcal{S} \quad pentru \ x > 0 \end{cases}.$$

2). Dacă$\{\xi_n\}_{n\in N}$ este un şir de variabile aleatoare, atunci şi $\eta(\omega) = \inf\limits_{n\in N} \{\xi_n(\omega)\}$, $\varsigma(\omega) = \sup\limits_{n\in N} \{\xi_n(\omega)\}$, $\overline{\xi}(\omega) = \lim\limits_{n\in N} \sup \xi_n(\omega)$, $\underline{\xi}(\omega) = \lim\limits_{n\in N} \inf \xi_n(\omega)$ sunt de asemenea variabile aleatoare.

Intr-adevăr avem

$$\{\eta < x\} = \bigcup_{n\in N} \{\xi_n < x\} \in \mathcal{S};$$

$$\{\varsigma > x\} = \bigcup_{n\in N} \{\xi_n > x\} = C\left(\bigcap_{n\in N} \{\xi_n \le x\}\right) \in \mathcal{S};$$

$$\overline{\xi}(\omega) = \inf_{m\ge n\in N} \left(\sup \xi_m(\omega)\right);$$

$$\underline{\xi}(\omega) = \sup_{m\ge n\in N} \left(\inf \xi_m(\omega)\right).$$

3). Dacă ξ, η sunt variabile aleatoare atunci $\{\xi > \eta\} \in \mathcal{S}$, $\{\xi \ge \eta\} \in \mathcal{S}$, $\{\xi = \eta\} \in \mathcal{S}$.

4. Dacă ξ, η sunt variabile aleatoare atunci şi $\xi - \eta$, $\xi + \eta$, $\xi\eta$, $\frac{\xi}{\eta}$ sunt deasemenea variabile aleatoare.

Intr-adevăr avem

$$\{\xi - \eta > x\} = \{\xi > \eta + x\} \in \mathcal{S};$$

$$\xi + \eta = \xi - (-\eta); \xi\eta = \frac{1}{4}\left[(\xi+\eta)^2 - (\xi-\eta)^2\right],$$

etc.

Definiţia 2. Funcţia $F\xi(x) = p(\xi < x)$ se numeşte *funcţia de repartiţie* sau *funcţia cumulativă a probabilităţii* variabilei aleatoare ξ .

Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare are următoarele proprietăţi:

1) $x \leq y \Rightarrow F\xi(x) \leq F\xi(y)$ (este nedescrescătoare) pentru că

$$x \leq y \Rightarrow \{\xi < y\} = \{\xi < x\} \cup \{x \leq \xi < y\}$$

şi deci $F\xi(y) = F\xi(x) + p(x \leq \xi < y) \geq F\xi(x)$)

2) $p(x \leq \xi < y) = F_\xi(y) - F_\xi(x)$;

3) $F\xi(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F\xi(x) = 0, F\xi(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F\xi(x) = 1$.

Intr-adevăr avem implicaţiile

$$x_n \to -\infty, y_n \to \infty \Rightarrow \{-\infty < \xi < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n \leq \xi < y_n\} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n \leq \xi < y_n) = p(-\infty < \xi < \infty) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\xi(y_n) - F\xi(x_n) \to 1 \Rightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N\ a.i.n > N \Rightarrow F\xi(y_n) - F\xi(x_n) > 1 - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\xi(y_n) > 1 - \varepsilon, F\xi(x_n) < F\xi(y_n) - 1 + \varepsilon \leq 1 - 1 + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\xi(x_n) \to 0, F\xi(y_n) \to 1.$$

4) $p(\xi \geq x) = 1 - F\xi(x)$ pentru că $\{-\infty < \xi < \infty\} = \{\xi < x\} \cup \{\xi \geq x\}$);

5) $F\xi(x-0) = F\xi(x);\quad (F\xi(x)$ este continuă la stânga).

Intr-adevăr avem implicaţiile

$$x_n \uparrow x \Rightarrow \{\xi < x\} = \{\xi < x_1\} \cup \{x_1 < \xi < x_2\} \cup ...$$

$$p(\xi < x) = p(\xi < x_1) + p(x_1 < \xi < x_2) + ... \Rightarrow$$

$$p(\xi < x) \leq p(\xi < x_1) + p(x_1 < \xi < x_2) + ... + p(x_{n-1} < \xi < x_n) + \varepsilon \Rightarrow$$

$$F\xi(x) \leq F\xi(x_n) + \varepsilon \Rightarrow |F\xi(x) - F\xi(x_n)| \leq \varepsilon.$$

6) $p(\xi \leq x) = F_\xi(x+0)$;

7) $p(\xi = x) = F\xi(x+0) - F\xi(x)$.

Funcţia de repartiţie $F\xi(x) = p(\xi < x) = p$ fiind crescătoare pe $(-\infty, \infty)$ cu valori în $(0,1)$ se poate vorbi de inversa sa $Q\xi(p)$ definită pe $(0,1)$ cu valori în $(-\infty, \infty)$ astfel că $Q\xi(p) = x$ dacă $F\xi(x) = p = p(\xi < x)$. Funcţia $Q\xi(p)$ se numeşte *inversa funcţiei cumulative de probabilitate* sau *cuantila de ordin* p.

Definiţia 3. O variabilă aleatoare ξ se numeşte *discretă* dacă ea poate lua o mulţime cel mult numărabilă de valori. Dacă o variabilă aleatoare discretă ia un număr finit de valori ea se numeşte *simplă*.

Fie ξ o variabilă aleatoare discretă care poate lua valorile $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Fie $A_i = \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x_i\}$, $i = 1, 2, ..., n, ...$ Evident

$$\Omega = A_1 + A_2 + ... + A_n + ...,$$

adică evenimentele A_i, $i = 1, 2, ...$ constituie un sistem complet de evenimente. Invers dacă se poate scrie $\Omega = A_1 + A_2 + ... + A_n + ...$, atunci putem defini o variabilă aleatoare discretă punând $\omega \in A_i \Rightarrow \xi(\omega) = x_i$.

Definiţia 4. Prin *legea de repartiţie* a unei variabile aleatoare discrete ξ se înţelege mulţimea perechilor $(x_i, p_i = p(\xi = x_i))$, expresia $p_i = p(\xi = x_i)$ fiind *densitatea de repartiţie* a variabilei.

Conform definiţiei variabilei aleatoare $\sum_i p_i = 1$.

Legea de repartiţie a unei variabile aleatoare discrete poate fi dată fie printr-un tabel de forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n & ... \\ p_1 & p_2 & ... & p_n & ... \end{pmatrix},$$

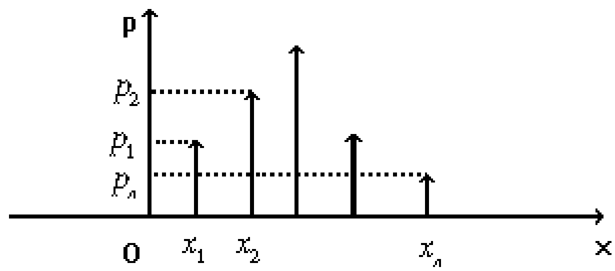

Fig. 17.1: Legea de repartiţie a unei variabile aleatoare discrete

fie printr-o reprezentare grafică de forma din figura de mai jos, fie printr-o reprezentare grafică în care segmentele cu săgeată de înlocuiesc prin dreptunghiuri (bare)

.

Legea de repartiţie a indicatorului evenimentului A este

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - p(A) & p(A) \end{pmatrix}.$$

Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare discrete este

$$F_\xi(x) = p(\xi < x) = \sum_{x_i < x} p_i.$$

Ea este o funcţie scară pentru care se păstrează proprietăţile amintite mai înainte

In cazul unei variabile aleatoare discrete, inversa funcţiei cumulative sau cuantila de ordin p $Q\xi(p)$ este definită pe $(0,1)$ cu valori mulţimea valorilor variabilei aleatoare $\{x_1, x_2, ...\}$ astfel încât $Q\xi(p) = x_i$ dacă

$$p_1 + p_2 + ... + p_i \leq p < p_1 + p_2 + ... + p_i + p_{i+1}.$$

17.3 Schema lui Bernoulli

17.3.1 Definirea schemei lui Bernoulli

Să presupunem că se efectuează n experienţe aleatoare independente, fiecare din ele putând avea două rezultate: *succes* cu probabilitatea p şi *insucces* cu probabilitatea

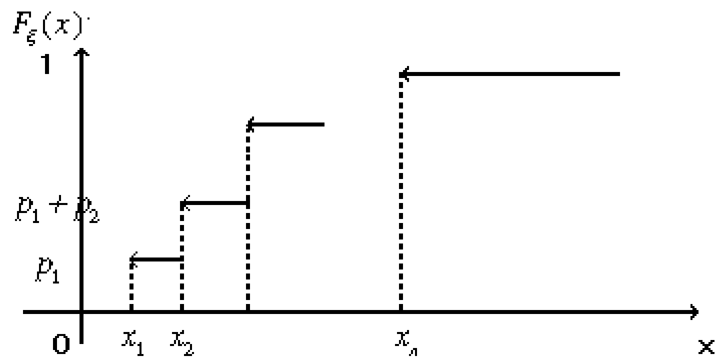

Fig. 17.2: Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare discrete

$q = 1 - p$. O asemenea schemă - de fapt, o asemenea experienţă aleatoare - se numeşte *schema lui Bernoulli.*

Să notăm cu b_n numărul succeselor în cele n experienţe. b_n este o variabilă aleatoare simplă. Să notăm cu $\omega_i, i = 1, 2, ..., n$ variabilele aleatoare

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & \text{dacă în a } i\text{-a experienţă a fost succes} \\ \\ 0 & \text{dacă în a } i\text{-a experienţă a fost insucces} \end{cases}$$

Fie vectorii $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$. Aceştia alcătuiesc evenimentele elementare, deci mulţimea Ω. Evident $b_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$. Cele n experienţe fiind independente avem $p(\omega) = p(\omega_1)p(\omega_2)...p(\omega_n)$. Cum $p(\omega_i = 1) = p, p(\omega_i = 0) = q = 1 - p$ avem

$$p(b_n = k) = p(\sum_{i=1}^{n} \omega_i = k) = \sum_{\omega_1+\omega_2+...+\omega_n=k} p(\omega_1)p(\omega_2)...p(\omega_n) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Vom nota

$$p_{n,k} = p(b_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Rezultă că variabila aleatoare simplă b_n are legea de repartiţie dată de tabelul

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & .... & k & .... & n \\ \\ \mathrm{q^n} & \mathrm{C_n^1} pq^{n-1} & \mathrm{C_n^2} p^2 q^{n-2} & .... & \mathrm{C_n^k} p^k q^{n-k} & .... & \mathrm{p^n} \end{pmatrix}.$$

Definiţia 1. Variabila aleatoare b_n discretă simplă cu valori naturale şi cu densitatea de repartiţie $p_{n,k} = p(b_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ se numeşte *varabilă aleatoare binomială*.

Uneori dacă b_n este o variabilă aleatoare binomială vom scrie $b_n \in binom(n,p)$ adoptând notaţiile din softul MATHCAD. Tot ca acolo, densitatea de repartiţie a unei asemenea variabile va fi notată prin $dbinom(k,n,p)$, funcţia de repartiţie cu $pbinom(k,n,p)$, funcţia inversă cu $qbinom(P,n,p)$. In MATHCAD funcţia $rbinom(N,n,p)$ generează N valori ale unor variabile de tipul binom(n,p).

Evident $\sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k} = 1$ cum rezultă şi din relaţia $1 = (p+q)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$.

Exemplul 1. Un aparat este compus din 5 elemente, fiecare putându-se defecta într-un timp dat cu probabilitatea $p = 0,1$. Aparatul funcţionează normal dacă nu se defectează mai mult de 2 elemente. Care este probabilitatea ca în timpul dat aparatul să funcţioneze normal?

Soluţia este evident

$$p(b_5 \leq 2) = p(b_5 = 0) + p(b_5 = 1) + p(b_5 = 2) =$$

$$\begin{aligned} &= C_5^0.0,1^0.0,9^5 + C_5^1.0,1^1.0,9^4 + C_5^2.0,1^2.0,9^3 = \\ &= pbinom(2,5,0.1) = 0,9914. \end{aligned}$$

17.3.2 Aliura repartiţiei schemei lui Bernoulli

Probabilităţile p_{nk} din schema lui Bernoulli se pot calcula din aproape în aproape pe baza relaţiei de recurenţă

$$p_{n,k+1} = \frac{n-k}{k+1} p_{nk}.$$

Din această relaţie rezultă

$$p_{n,k+1} > p_{nk} \iff \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q} > 1 \iff k < np - q,$$

$$p_{n,k+1} < p_{nk} \iff \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q} < 1 \iff k > np - q,$$

adică numerele p_{nk} cresc cât timp k este mai mic decât $np - q$, îşi ating maximul şi apoi scad. Dacă $np - q$ este întreg există două valori maxime şi anume $p_{n,np-q} = p_{n,np+p}$.

Dacă $np-q$ nu este întreg, atunci există o singură valoare maximă pentru k cuprins între $np-q$ şi $np+p$.

Dacă vom reprezenta grafic densitatea de repartiţie $dbinom(k,n,p)$ vom observa că pe măsură ce n creşte, diagrama capătă o formă apropiată de un clopot simetric faţă de verticala $k=np$.

17.3.3 Legea numerelor mari sub forma lui Bernoulli

Numărul cel mai probabil de realizări ale "succesului" în cele n experienţe din schema lui Bernoulli este apropiat de np. Fie $\varepsilon>0$ un număr oarecare. Să încercăm să evaluăm probabilitatea $p\left(\left|\frac{b_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)$, adică probabilitatea ca modulul diferenţei între frecvenţa apariţiei "succesului" în cele n experienţe şi probabilitatea "succesului" într-o experienţă să fie mai mare ca ε . După formula de adunare a probabilitaţilor avem

$$p\left(\left|\frac{b_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=\sum p_{nk},$$

unde suma se extinde la acele valori ale lui k pentru care $\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon$, adică pentru care $\frac{\left(\frac{k}{n}-p\right)^2}{\varepsilon^2}\geq 1$. Dar atunci putem scrie

$$p\left(\left|\frac{b_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon}\frac{\left(\frac{k}{n}-p\right)^2}{\varepsilon^2}p_{nk},$$

şi cu atât mai mult

$$p\left(\left|\frac{b_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}-p\right)^2}{\varepsilon^2}p_{nk}=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2\,p_{nk}=$$

$$=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{n}\left[k(k-1)+(1-2np)k+n^2p^2\right]C_n^kp^kq^{n-k}=$$

$$=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left(npq+n^2p^2-2n^2p^2+n^2p^2\right)=\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Trecând la evenimentul contrar avem

$$p\left(\left|\frac{b_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Am demonstrat deci

T1. (*Legea numerelor mari sub forma lui Bernoulli*). Ori care ar fi $\varepsilon>0$, probabilitatea ca modulul diferenţei dintre frecvenţa de realizare a "succesului" în n experienţe din schema lui Bernoulli şi probabilitatea de realizare a succesului într-o experienţă să fie mai mică decât ε tinde către 1 atunci când n tinde către infinit.

Exemplul 2. Intr-o localitate s-au născut într-un an 400 de copii. Probabilitatea naşterii unui băiat este egală cu probabilitatea naşterii unei fete. Să se evalueze probabilitatea ca numărul băieţilor născuţi în acel an să difere de 200 cu cel mult 20.

Avem

$$p\left(|b_{400} - 200| < 20\right) = p\left(\left|\frac{b_{400}}{400} - \frac{1}{2}\right| < \frac{20}{400}\right) \leq$$

$$\leq 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{400\left(\frac{1}{20}\right)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

17.3.4 Teorema limită a lui Poisson a evenimentelor rare

Pentru n mare este greu de calculat probabilităţile $p_{n,k}$ ale variabilei binomiale cu formula stabilită. Să ţinem cont că

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

şi că dacă $0 \leq a_i \leq 1, i = 0, 1, ..., k$ atunci are loc inegalitatea (se verifică prin inducţie!)

$$(1 - a_1)(1 - a_2)...(1 - a_k) \geq 1 - (a_1 + a_2 + ... + a_k),$$

adică în cazul nostru

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) > 1 - \left(\frac{1 + 2 + ...k - 1}{n}\right) = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Rezultă

$$1 - \frac{k(k-1)}{2n} \leq \frac{C_n^k k!}{n^k} \leq 1$$

şi deci dacă $k < 0,14\sqrt{n}$ atunci are loc formula aproximativă

$$p_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{k!}\left(\frac{np}{q}\right)^k q^n$$

cu o eroare relativă mai mică de 1%.

Mai mult rezultă şi teorema

T2. (*Teorema limită a lui Poisson a evenimentelor rare*) Dacă $n \to \infty,\ \ p \to 0$, astfel încât $np \to a,\ \ a$ număr pozitiv, atunci probabilitatea a k succese în schema lui Bernoulli tinde către $e^{-a}\frac{a^k}{k!}$ pentru orice $k = 0, 1, 2, ...$

Intr-adevăr putem scrie cu evaluarea de mai sus

$$\left[1-\frac{k(k-1)}{2n}\right]\frac{n^k}{k!}p^kq^{n-k}\leq p_{n,k}\leq\frac{n^k}{k!}p^kq^{n-k}.$$

Pentru $n\to\infty, p\to 0, np\to a$ şi k fixat

$$1-\frac{k(k-1)}{2n}\to 1,(np)^k\to a^k,q^{-k}=(1-p)^{-k}\to 1,$$

$$q^n=\left(1-\frac{np}{n}\right)^n\to e^{-a}\quad i\quad deci\quad p_{n,k}\to_{n\to\infty}e^{-a}\frac{a^k}{k!}$$

Definiţia 2. O variabilă aleatoare discretă ξ cu valori naturale cu densitatea de repartiţie

$$p\xi(\xi=k)=e^{-a}\frac{a^k}{k!},k=0,1,2,...$$

se numeşte *variabilă aleatoare repartizată după legea lui Poisson a evenimentelor rare.*

Uneori pentru o asemenea variabilă vom scrie ca în MATHCAD $\xi\in pois(a)$. In MATHCAD densitatea de repartiţie a unei asemenea variabile este $dpois(k,a)$, funcţia cumulativă de probabilitate este $ppois(k,a)$, iar funcţia inversă este $qpois(P,a)$. $rpois(N,a)$ este o funcţie care dă valorile ale a N variabile aleatoare de acest tip.

Evident pentru o asemenea variabilă

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_\xi(\xi=k)=e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}=e^{-a}e^a=1.$$

Dacă se fac diagramele densităţii de repartiţie dpois(k,a) se vede că maximul se atinge pentru k în jurul valorii lui a şi pentru a ceva mai mare graficul seamăna cu un clopot.

Exemplul 3. Un sistem constă din 10000 de elemente, fiecare putându-se defecta într-un timp dat cu probabilitatea $p=0,00005$, independent unul de altul. 1) Câte elemente de rezervă trebuie luate pentru ca toate elementele care se defectează să fie înlocuite cu altele noi cu o probabilitate de cel puţin 0,95. 2) Să se evalueze probabilitatea ca niciunul din elementele înlocuite să nu se defecteze (ele având aceeaşi probabilitate de defectare ca şi cele de bază).

Cum $n=10000$ (este mare), $p=0,00005$ (este mică), $np=0,5$, avem de-a face cu o variabilă aleatoare ξ distribuită după legea evenimentelor rare $p_\xi(\xi=k)=e^{-0,5}\frac{0,5^k}{k!}$. Dacă m este numărul de piese de schimb, condiţia 1) este echivalentă cu dubla inegalitate

$$p\xi(\xi = 0) + p\xi(\xi = 1) + ... + p\xi(\xi = m - 1) < 0,95 \leq$$

$$\leq p\xi(\xi = 0) + p\xi(\xi = 1) + ... + p\xi(\xi = m),$$

adică $m = qpois(0.95, a)$. Se găseşte m=2.

2) Probabilitatea ca nici unul din elementele înlocuite să nu se defecteze este mai mare ca $(1 - 0,00005)^2 > 1 - 0,0001$.

Exemplul 4. O centrală telefonică are 1000 de abonaţi. Intr-un interval dat de timp, fiecare abonat poate apela centrala cu probabilitatea $p = 0,005$. Care este probabilitatea ca în intervalul de timp dat să existe cel mult 7 apeluri în centrală.

Putem considera că avem de-a face cu o variabilă aleatoare repartizată după legea evenimentelor rare $np = 5$ şi probabilitatea cerută este

$$p\xi(\xi \leq 7) = ppois(7, 5) = 0.867.$$

Conform demonstraţiei de mai sus, legea lui Poisson se aplică variabilei binomiale b_n dacă $n \to \infty$ şi raportul $\frac{k^2}{n}$ este mic.

17.3.5 Teorema limită locală a lui Moivre-Laplace

Să presupunem acum că în cazul variabilei binomiale b_n odată cu $n \to \infty$ şi $k \to \infty$ astfel încât $n - k \to \infty$. Să notăm $\alpha = \frac{k}{n}, \beta = \frac{n-k}{n} = 1 - \alpha$ şi să folosim formula lui Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}, 0 \leq \theta_n < 1$$

sau prin logaritmare

$$\ln(n!) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{\theta_n}{12n}.$$

Vom avea deci

$$\begin{aligned}\ln C_n^k &= \ln\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \ln\frac{n!}{(n\alpha)!\,(n\beta)!} = \\ &= \ln\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{\theta_n}{12n} -\end{aligned}$$

$$-\ln\sqrt{2\pi}-\left(n\alpha+\frac{1}{2}\right)\ln n\alpha+n\alpha+\frac{\theta_{n\alpha}}{12n\alpha}-$$

$$-\ln\sqrt{2\pi}-\left(n\beta+\frac{1}{2}\right)\ln n\beta+n\beta+\frac{\theta_{n\beta}}{12n\beta}=$$

$$=-\ln\sqrt{2\pi n\alpha\beta}-n\left(\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta\right)+R_n.$$

Se vede că dacă $n\to\infty, k\to\infty, n-k\to\infty$ atunci $R_n\to 0$ uniform în raport cu α,β. Se poate deci scrie

$$p_{n,k}=C_n^k\left(p^\alpha q^\beta\right)^n\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha\beta}}e^{n\left(\alpha\ln\frac{p}{\alpha}+\beta\ln\frac{q}{\beta}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha\beta}}\left(\frac{p^\alpha q^\beta}{\alpha^\alpha\beta^\beta}\right)^n.$$

Dacă $\frac{1}{k}+\frac{1}{n+k}\leq 0,1$ atunci eroarea relativă care se face folosind evaluarea de mai sus este mică decât 1%.

Dacă notăm $\psi(\alpha)=\alpha\ln p-\alpha\ln\alpha+\beta\ln q-\beta\ln\beta$ putem scrie

$$p_{n,k}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha\beta}}e^{n\psi(\alpha)}.$$

Să observăm că $\psi(p)=0$. Ţinem cont că $\beta=1-\alpha$ şi derivăm

$$\psi'(\alpha)=\ln p-\ln q-\ln\alpha+\ln\beta;\quad \psi''(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{1}{\alpha\beta}.$$

Deci $\psi'(p)=0,\ \psi''(p)=-\frac{1}{pq}$. Cum $\psi'''(p)$ este mărginită, putem scrie

$$\psi\left(p+\Delta\right)=-\frac{\Delta^2}{2pq}+\vartheta\left(\Delta^3\right)\quad\left(\Delta\to 0\right).$$

Notând $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ avem $\alpha=\frac{k}{n}=p+x\sqrt{\frac{pq}{n}},\ \beta=1-\alpha=q-x\sqrt{\frac{pq}{n}}$. Dacă numărul k variază astfel încât $|x|\leq T$ atunci pentru $n\to\infty$, vom avea $\alpha\to p,\beta\to q$ uniform în raport cu x şi deci $\frac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha\beta}}$ se înlocuieşte cu $\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$, iar $e^{n\psi(\alpha)}$ se înlocuieşte prin $e^{-n\frac{\Delta^2}{2pq}+\vartheta\left(n\Delta^3\right)}$ unde $\Delta=x\sqrt{\frac{pq}{n}}$. Cum $n\frac{\Delta^2}{2pq}=\frac{x^2}{2},\ n\Delta^3=\vartheta\left(\frac{1}{n}\right)$ rezultă

$$p_{n,k}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Are loc deci teorema

T3. (*Teorema- limită locală a lui Moivre-Laplace*) Fie $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$; dacă $n \to \infty$, p fixat diferit de 0 şi 1 şi k variază astfel încât $|x| \leq T$, unde T este un număr fix, atunci uniform în raport cu x, $|x| \leq T$ are loc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n,k}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}} = 1.$$

Variabila $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ este, cum vom vedea mai târziu, ceea ce se numeşte *redusa* variabilei b_n.

Teorema-limită locală a lui Moivre-Laplace permite să evaluăm probabilităţile $p_{n,k}$ din distribuţia variabilei aleatoare binomiale b_n pentru $n \to \infty$ ca funcţie de valoarea k a variabilei aleatoare.

17.3.6 Teorema limită integrală a lui Laplace

Teorema următoare numită *teorema-limită integrală a lui Laplace* permite să evaluăm funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare binomiale b_n .

T4. (*Teorema-limită integrală a lui Laplace*) Fie $p \in (0,1)$ fixat. Atunci pentru $n \to \infty$ uniform în raport cu $a, b, a \leq b$

$$\lim_{n\to\infty} p\left(a \leq \frac{b_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Să notăm

$$\xi_n = \frac{b_n - np}{\sqrt{npq}}, x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \Phi(a,b) = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Vrem să arătăm că

$$p\left(a \leq \xi_n < b\right) \overset{n\to\infty}{\to} \Phi(a,b)$$

uniform în raport cu a şi b. Dar $p\left(a \leq \xi_n < b\right) = \sum\limits_{a \leq x_k < b} p_{n,k}$. Să presupunem că $-T \leq a \leq b \leq T$. După teorema precedentă $p_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(x_k\right)\left(1 + \varepsilon_{n,k}\right)$ unde $\varepsilon_{n,k} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ uniform în $|x_k| \leq T$. Cum $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}$ rezultă că

$$\begin{aligned} p\left(a \leq \xi_n < b\right) &= \sum_{a \leq x_k < b} p_{n,k} = \sum_{a \leq x_k < b} \varphi\left(x_k\right)\left(x_{k+1} - x_k\right)\left(1 + \varepsilon_{n,k}\right) = \\ &= \sum_{a \leq x_k < b} \varphi\left(x_k\right)\left(x_{k+1} - x_k\right) + parte\, neglijabil\breve{a} \end{aligned}$$

care diferă foarte puţin de o sumă riemanniană a lui $\Phi(a,b)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Consecinţa 1. Fie $F_n(x)$ funcţia de repartiţie a variabilei $\xi_n = \frac{b_n - np}{\sqrt{npq}}$. Atunci pentru $n \to \infty$

$$F_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

uniform în raport cu $x \in \mathbf{R}$.

Consecinţa rezultă din teoremă făcând $a \to -\infty, b = x$.

Funcţia $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ se numeşte *funcţia de repartiţie normală standard.* Evident, $\Phi(a,b) = F(b) - F(a)$.

Dacă o variabilă aleatoare ξ are funcţia cumulativa de probabilitate

$$F\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

se zice că ea este de tipul normal standard. Vom scrie $\xi \in norm(0,1)$. In MATHCAD densitatea sa de distribuţie este $dnorm(x,0,1)$, funcţia sa cumulativă este $pnorm(x,0,1)$, inversa funcţiei cumulative este $qnorm(P,0,1)$.

Consecinţa 2. (*O altă de monstraţie a legii numerelor mari sub forma lui Bernoulli*) Pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{b_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{b_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Intr-adevăr, cum

$$\left|\frac{b_n}{n} - p\right| = \frac{|b_n - np|}{\sqrt{npq}} \sqrt{\frac{pq}{n}} = |\xi_n| \sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{|\xi_n|}{2\sqrt{n}}$$

avem

$$p\left(\left|\frac{b_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq p\left(|\xi_n| > 2\varepsilon\sqrt{n}\right) = 2\Phi(2\varepsilon\sqrt{n}, \infty) \to 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Să reamintim că raportul $\frac{b_n}{n}$ din legea numerelor mari este tocmai frecvenţa medie de apariţie a succesului în schema lui Bernoulli.

Exemplul 4. Să reluăm exemplul 2., calculând probabilitatea ca printre cei 400 de nou născuţi, numărul băieţilor să difere de 200 cu cel mult 20, pe baza teoremei limită integrală a lui Laplace: vom avea:

$$p\left(|b_{400}-200|<20\right)=p\left(\frac{|b_{400}-200|}{\sqrt{400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\sqrt{400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}<20\right)=$$

$$\begin{aligned} &= p\left(|\zeta_k|<\frac{20}{10}\right)=pnorm(2,0,1)-pnorm(-2,0,1)= \\ &= 2pnorm(2,0,1)-1=2\cdot 0.9772-1=0.9544 \end{aligned}$$

17.3.7 Exerciţii şi probleme

1. Probabilitatea ca un trăgător să lovească o ţintă este p=0.3. Trăgătorul execută 4 trageri. Care este probabilitatea ca să lovească ţnta de 2 ori.

R. $dbinom(2,4,0.3)=0.265$.

2. Pe un canal de transmisie de date se transmit 5 mesaje. Fiecare mesaj independent de celelalte este distorsionat cu probabilitatea de p=0.3. Să se găsească probabilitatea ca: a) din 5 mesaje 3 să fie distorsionate; b) cel puţin 4 mesaje să nu fie distorsionate; c) cel mult două mesaje să fie distorsionate; d) toate mesajele să fie nedistorsionate; e) cel puţin două mesaje să fie distorsionate.

R. a) dbinom(3,5,0.3)=0.132; b) 1-pbinom(3,5,0.7)=0.528; c) pbinom(2,5,0.3)=0.837; d) dbinom(5,5,0.7)=0.168; e) 1-pbinom(1,5,0.3)=0.472.

3. Se ştie că $\frac{1}{45}$ din piesele produse de o fabrică sunt sub standarde. Fabrica a produs 4500 piese. Care este cel mai probabil număr de piese standard din acestea?

R. $4500*\frac{44}{45}-\frac{1}{45}\leq k\leq 4500*\frac{44}{45}+\frac{44}{45}$, k=4400.

4. Intr-o firmă lucrează 100 de salariaţi. Probabilitatea ca într-o săptămână să se îmbolnăvească un salariat este 0.01. Să se găsească probabilitatea ca într-o săptămână să se îmbolnăvescă: a) trei salariaţi; b) cel mult trei salariaţi; c) cel puţin trei salariaţi; d) cel puţin un salariat.

R. a) $\lambda=np=100*0.01=1, dpois(3,1)=0.061$; b) ppois(2,1)=0.9197; c) 1-ppois(2,1)=0.0803; d) 1-dpois(0,1)=0.6321.

5. Din întreaga cantitate de tranzistori făcuţi de o fabrică 80% nu au defecte. Să se găsească probabilitatea ca printre 400 de tranzistori luaţi la întâmplare 80 să fie defecţi.

R. $n = 400, k = 80, p = 0.2, q = 0.8, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = 0$. $\frac{1}{\sqrt{npq}} dnorm(0, 0, 1) = 0.04986$.

6. Să se găsească probabilitatea ca din 10000 de aruncări ale unei monede valoarea să apară: a) de cel puţin 4000 de ori şi de cel mult 6000 de ori; b) de cel mult 4000 de ori; c) de cel puţin 6000 de ori.

R. a) $p = 0.5, q = 0.5, n = 10000, k_1 = 4000, k_2 = 6000, x_1 = \frac{4000-10000*0.5}{\sqrt{2500}} = -20$, $x_2 = \frac{6000-10000*0.5}{\sqrt{2500}} = 20, pnorm(20, 0, 1) - pnorm(-20, 0, 1) = 1$;

b) $x_1 = \frac{0-5000}{50} = -100, x_2 = \frac{4000-5000}{50} = -20, pnorm(-20, 0, 1) - pnorm(-100, 0, 1) = 0$;

c) $x_1 = \frac{10000-5000}{50} = 100, x_2 = \frac{6000-5000}{50} = 20, pnorm(100, 0, 1) - pnorm(20, 0, 1) = 0$.

7. Probabilitatea ca o piesă dintr-un lot să fie nestandard este 0.1. Câte piese trebuie să se ia astfel încât cu probabilitatea de 0.9544 să se poată afirma că frecvenţa relativă de apariţie a pieselor nestandard diferă de probabilitatea p=0.1 în valoare absolută cu cel mult 0.03?

R. Avem $p = 0.1, q = 0.9, \varepsilon = 0.03$,

$p(|\frac{k}{n} - p| \leq \varepsilon) = 0.9544 = 2pnorm(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}, 0, 1) - 1$

$pnorm(0.1\sqrt{n}, 0, 1) = 0.9772, 0.1\sqrt{n} = qnorm(0.9772, 0, 1)$,

$n = \frac{qnorm(0.4772,0,1)^2}{0.01} \approx 400$.

17.4 Valori medii ale variabilelor aleatoare discrete

17.4.1 Legea numerelor mari sub forma lui Markov

Dacă ξ este o variabilă aleatoare, vom numi *observaţie independentă a lui* ξ orice variabilă aleatoare independentă cu aceeaşi lege de repartiţie ca şi ξ. Introducem o asemenea definiţie pentru că orice observaţie rezulta din observarea variabilei ξ, contând mai mult realizarile acesteia.

Fie variabila aleatoare ξ cu repartiţia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$ asociată unei experienţe. Repetând experienţa de n ori obţinem variabilele aleatoare $\xi_i, i = 1, 2, ..., n$ cu aceeaşi repartiţie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$. Acestea sunt observaţii independente ale variabilei ξ. Conform legii numerelor mari sub forma lui Bernoulli

$$p\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\overset{n\to\infty}{\to}1,$$

adică media aritmetică a rezultatelor observaţiilor independente ale lui ξ sunt oricât de apropiate de p pentru n mare cu o probabilitate oricât de apropiată de 1. De aceea este natural să numim probabilitatea p drept *speranţă matematică* sau *valoare medie* a variabilei aleatoare ξ cu repartiţia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$.

Fie acum o variabilă aleatoare simplă ξ cu legea de repartiţie

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_m \\ p_1 & p_2 & ... & p_m \end{pmatrix}$$

şi fie $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ observaţii independente ale lui ξ . Dacă $s_n=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$ atunci avem $s_n=N_1x_1+N_2x_2+...+N_nx_n$ unde N_j este numărul observaţiilor al căror rezultat a fost x_j, $j=1,2,...,m$. Fie ξ_i^j indicatorul evenimentului {rezultatul observaţiei i este x_j }. ξ_i^j reprezintă observaţii ale variabilei aleatoare ξ^j cu repartiţia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_j & 1-p_j \end{pmatrix}$. Evident avem $\xi_1^j+\xi_2^j+...+\xi_i^j=N_j$. Deci după legea numerelor mari a lui Bernoulli putem scrie

$$p\left(\left|\frac{N_j}{n}-p_j\right|\geq\delta\right)\overset{n\to\infty}{\to}0,\ j=1,2,...m,$$

de unde şi

$$p\left(\left|\frac{N_jx_j}{n}-p_jx_j\right|\geq\delta\left|x_j\right|\right)\overset{n\to\infty}{\to}0, j=1,2,...m.$$

Cum

$$\left|\sum_{j=1}^m\frac{N_jx_j}{n}-\sum_{j=1}^m x_jp_j\right|\leq\sum_{j=1}^m\left|\frac{N_jx_j}{n}-x_jp_j\right|$$

rezultă

$$p\left(\left|\sum_{j=1}^m\frac{N_jx_j}{n}-\sum_{j=1}^m x_jp_j\right|\geq\delta\sum_{j=1}^m|x_j|\right)\leq\sum_{j=1}^m p\left(\left|\frac{N_jx_j}{n}-x_jp_j\right|\geq\delta\left|x_j\right|\right)\overset{n\to\infty}{\to}0.$$

Cum δ este arbitrar, rezultă că

$$p\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-\sum_{j=1}^m x_jp_j\right|\geq\varepsilon\right)\overset{n\to\infty}{\to}0,$$

sau trecând la evenimentul contrar

$$p\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-\sum_{j=1}^m x_jp_j\right|<\varepsilon\right)\overset{n\to\infty}{\to}1.$$

Aceste relaţii constituie *legea numerelor mari sub forma lui Markov.*

17.4.2 Valoarea medie, proprietăţi

Din legea numerelor mari sub forma lui Markov rezultă că este natural ca suma $\sum_{j=1}^{m} x_j p_j$ să se numească *valoarea medie* sau *speranţa matematică* a variabilei aleatoare ξ (*expectation* în engleză, *esperance* în franceză). Mai mult introducem următoarea

Definiţia 1. Dacă ξ este o variabilă aleatoare discretă cu densitatea de repartiţie

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m & \dots \end{pmatrix},$$

dacă seria $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ este absolut convergentă atunci suma acestei serii se numeşte *valoarea medie a variabilei aleatoare* şi se va nota prin $E(\xi)$. Variabila aleatoare $\xi - E(\xi)$ se numeşte *abaterea variabilei aleatoare* ξ .

Exemplul 1. Dacă A este un eveniment, atunci valoarea medie a indicatorului lui A este $E(I_A) = p(A)$.

Exemplul 2. Fie b_n variabila aleatoare binomială. Cum $p(b_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ avem

$$E(b_n) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} n p^k q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np.$$

Exemplul 3. Fie ξ o variabilă aleatoare repartizată după legea evenimentelor rare cu parametrul a, adică $p(\xi = k) = e^{-a}\frac{a^k}{k!}$. Valoarea medie a acestei variabile este

$$E(\xi) = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!} = ae^{-a}e^{a} = a.$$

Valorile medii asociate variabilelor aleatoare discrete au o serie de proprietăţi.

Teorema 1. Fie ξ o variabilă aleatoare discretă cu repartiţia $p(\xi = x_i) = p_i$ şi $f(x)$ o funcţie definită pe mulţimea valorilor variabilei ξ astfel încât $\sum_i |f(x_i)| p_i < \infty$. Atunci $E(f(\xi))$ există şi $E(f(\xi)) = \sum_i f(x_i) p_i$.

Intr-adevăr, $f(\xi)$ este o variabilă aleatoare. Fie y_j valorile sale. Avem

$$\begin{aligned} \sum_j |y_j| p(f(\xi) = y_j) &= \sum_j |y_j| \sum_{i: f(x_i) = y_j} p_i = \sum_i \sum_{j: f(x_i) = y_j} |f(x_i)| p_i \\ &= \sum_i |f(x_i)| p_i \sum_{j: f(x_i) = y_j} 1 = \sum_i |f(x_i)| p_i < \infty. \end{aligned}$$

Consecinţă: $E(\alpha\xi + \beta) = \alpha E(\xi) + \beta$.

Teorema 2. Dacă ξ, η sunt două variabile aleatoare discrete atunci $E(\xi+\eta) = E(\xi) + E(\eta)$.

Fie $p(\xi = x_i) = p_i$, $p(\eta = y_j) = q_j$, $p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}$. Membrul stâng se scrie

$$\begin{aligned}
\sum_z zp(\xi+\eta=z) &= \sum_z z \sum_{x_i+y_j=z} p_{ij} = \sum_z \sum_{x_i+y_j=z} (x_i+y_j)\, p_{ij} = \\
&= \sum_{i,j} (x_i+y_j)\, p_{ij} \sum_{x_i+y_j=z} 1 = \\
&= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_i x_i p_i + \sum_j y_j p_j = \\
&= E(\xi) + E(\eta).
\end{aligned}$$

Definiţia 2. Variabilele aleatoare discrete ξ, η se numesc *independente* dacă evenimentele $\xi = x_i, \eta = y_j$ sunt independente oricare ar fi i, j. Analog se defineşte independenţa în totalitate a mai multor variabile aleatoare.

Teorema 3. Dacă ξ, η sunt variabile aleatoare discrete independente şi cu valori medii finite atunci $E(\xi\eta) = E(\xi)\, E(\eta)$.

Intr-adevăr

$$\begin{aligned}
E(\xi\eta) &= \sum_{i,j} x_i y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j p_i p_j \\
&= \sum_i x_i p_i \sum_j y_j p_j = E(\xi)\, E(\eta).
\end{aligned}$$

.

17.4.3 Momente, inegalităţile lui Markov şi Cebîşev

Definiţia 3. Dacă ξ este o variabilă aleatoare numărul $\nu_k(\xi) = E\left(\xi^k\right)$ se numeşte *momentul de ordin k al lui* ξ , iar numărul $E\left(|\xi|^k\right)$ se numeşte *momentul absolut de ordin k al lui* ξ . Numărul $\mu_k(\xi) = E\left((\xi - E(\xi))^k\right)$ se numeşte *momentul centrat de ordin k al lui* ξ , iar numărul $E\left(|\xi - E(\xi)|^k\right)$ se numeşte *momentul absolut centrat de ordin k*. In particular pentru $k = 2$ $\mu_2(\xi) = E\left((\xi - E(\xi))^2\right)$ se numeşte *dispersia* sau *variaţia lui* ξ şi se notează şi cu $D^2(\xi)$ sau $\operatorname{var}(\xi)$. $D(\xi) = \sqrt{\operatorname{var}(\xi)}$ se numeşte *abaterea medie pătratică a lui* ξ .

Notăm relaţiile

$$\operatorname{var}(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E(\xi)^2$$

$$(\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2)$$

$$\operatorname{var}(\alpha\xi + \beta) = \alpha^2 \operatorname{var}(\xi).$$

Dacă$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt variabile aleatoare independente atunci

$$\operatorname{var}(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = \operatorname{var}(\xi_1) + \operatorname{var}(\xi_2) + ... + \operatorname{var}(\xi_n),$$

aceasta rezultând din definiţia dispersiei şi multiplicativitatea valorilor medii ale variabilelor aleatoare independente.

Dacă ξ, η sunt două variabile aleatoare pentru care există momentele de ordinul doi $E(\xi^2), E(\eta^2)$ atunci are loc inegalitatea lui Schwarz

$$E(\xi\eta) \leq E(\xi^2)E(\eta^2).$$

In adevăr avem pentru orice $\lambda \in R$

$$E((\xi - \lambda\eta)^2) = E(\xi^2) - 2\lambda E(\xi\eta) + \lambda^2 E(\eta^2) \geq 0$$

şi deci realizantul trinomului este negativ.

Dacă notăm cu A evenimentul $A = \{|\xi|^k \geq \varepsilon\}$,pentru $\varepsilon > 0$, atunci $|\xi|^k \geq |\xi|^k I_A \geq \varepsilon^k I_A$ şi deci $E\left(|\xi|^k\right) \geq \varepsilon^k E(I_A) = \varepsilon^k p(A)$, adică are loc *inegalitatea lui Markov*

$$p\left(|\xi|^k \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E\left(|\xi|^k\right)}{\varepsilon^k}.$$

Pentru $k = 2$ şi înlocuind ξ cu $\xi - E(\xi)$ obţinem *inegalitatea lui Cebîşev*

$$p(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var}(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Luând $\varepsilon = 3\sqrt{\operatorname{var}(\xi)}$ rezultă $p\left(|\xi - E(\xi)| \leq 3\sqrt{\operatorname{var}(\xi)}\right) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Aceasta înseamnă că majoritatea abaterilor absolute ale lui ξ cu o probabilitate cuprinsă intre 8/9 şi 1 nu depăşesc $3\sqrt{\operatorname{var}(\xi)}$, ceea ce justifică denumirea de dispersie. Termenul dispersie provine din cuvântul latin *dispersio* cu semnificaţia de împrăştiere, răspândire.

Dacă ξ este o variabilă aleatoare cu legea de repartiţie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$ şi dacă $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt observaţii independente ale lui ξ, atunci

$$E\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots \xi_n}{n}\right) = p, \operatorname{var}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}npq = \frac{pq}{n},$$

şi inegalitatea lui Cebîşev devine

$$p\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots\xi_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

adică regăsim legea numerelor mari sub forma lui Bernoulli. (De altfel, prima demonstraţie dată de noi legii numerelor mari, calchiază demonstraţia inegalităţii lui Cebîşev în cazul particular al variabilei binomiale.)

Să notăm pentru comoditate $S_n=\xi_1+\xi_2+\cdots\xi_n$, $A_n=\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}$ şi fie $f(x)$ o funcţie continuă pe $[0,1]$. Vom putea scrie

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f(p)\right|\leq$$

$$\leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(p)\right|\cdot I_{C_{A_n}}\right)+E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(p)\right|\cdot I_{A_n}\right)\leq$$

$$\leq\sup_{|x|<\varepsilon}|f(p+x)-f(p)|+2F\cdot E\left(I_{A_n}\right)\leq\sup_{|x|<\varepsilon}|f(p+x)-f(p)|+2F\cdot\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Am notat cu F maximul modulului lui f pe $[0,1]$. Cum f este uniform continuă pe $[0,1]$, rezultă că

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\overset{uniform\ p\in[0,1]}{\longrightarrow}f(p).$$

Cum $p\left(S_n=k\right)=C_n^kp^k\left(1-p\right)^{n-k}$ rezultă, înlocuind p cu x, că

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k\left(1-x\right)^{n-k}\overset{uniform\ x\in[0,1]}{\longrightarrow}f(x).$$

Am obţinut astfel o demonstraţie a teoremei lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcţiilor continue pe un interval închis prin polinoame, construind efectiv aceste polinoame. Polinoamele $B_n(x)$ se numesc *polinoamele lui Bernstein*, căruia îi aparţine demonstraţia de mai sus.

Definiţia 4. Dacă ξ este o variabilă aleatoare, variabila aleatoare

$$\varsigma=\frac{\xi-E(\xi)}{\sqrt{\mathrm{var}(\xi)}}=\frac{\xi-E(\xi)}{D(\xi)}$$

se numeşte *redusa variabilei* ξ.

Valoarea medie a variabilei reduse este nulă, iar dispersia sa este egală cu 1.

Definiţia 5. Dacă ξ,η sunt două variabile aleatoare numărul

$$\mathrm{cov}\left(\xi,\eta\right)=E\left(\left(\xi-E(\xi)\right)\left(\eta-E(\eta)\right)\right)$$

se numeşte *covariaţia celor două variabile aleatoare*; numărul

$$\mathrm{cor}\,(\xi,\eta)=\frac{\mathrm{cov}\,(\xi,\eta)}{(\mathrm{var}\,(\xi)\,\mathrm{var}\,(\eta))^{1/2}}$$

se numeşte *corelaţia celor două variabile aleatoare.*

Totdeauna $|\mathrm{cor}\,(\xi,\eta)|\leq 1$. Dacă $\mathrm{cor}\,(\xi,\eta)=0$ variabilele ξ,η se numesc *necorelate.* Dacă variabilele sunt independente ele sunt necorelate; invers nu este adevărat totdeauna.

17.4.4 Funcţii generatoare

In cazul variabilelor aleatoare cu valori numere naturale, momentele se pot calcula uşor prin intermediul *funcţiei generatoare.*

Definiţia 6. Pentru variabila aleatoare

$$\xi=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix}$$

se numeşte funcţie generatoare funcţia olomorfă $p(z)$ definită în cercul unitate $|z|\leq 1$ prin

$$p(z)=\sum_{k\geq 0} p_k z^k = E\left(z\xi\right).$$

Teorema 4. Dacă $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ sunt variabile aleatoare independente cu funcţiile generatoare $p_1(z),p_2(z),...,p_n(z)$ atunci variabila aleatoare $\xi=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$ are funcţia generatoare $p(z)=p_1(z)p_2(z)...p_n(z)$.

Intr-adevăr,

$$p(z)=E\left(z^{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}\right)=E\left(z^{\xi_1}\right)E\left(z^{\xi_2}\right)...E\left(z^{\xi_n}\right)=p_1(z)p_2(z)...p_n(z).$$

Vom observa că dacă variabila ξ are funcţia generatoare $p(z)$ atunci au loc relaţiile:

$$\begin{aligned} E\left(\xi\right) &= \sum_k kp_k = p\prime(1), \\ E\left(\xi^{(l)}\right) &= E\left(\xi(\xi-1)...(\xi-l+1)\right)=p^{(l)}(1). \end{aligned}$$

In particular

$$E\left(\xi^2\right)=E\left(\xi(\xi-1)+\xi\right)=p\prime\prime(1)+p\prime(1)$$

şi deci

$$\operatorname{var}(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E(\xi)^2 = p\prime\prime(1) + p\prime(1) - p\prime(1)^2.$$

Exemplul 3. Fie b_n variabila din schema lui Bernoulli; avem $b_n = \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_n$ unde variabilele $\omega_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$ au funcţiile generatoare $p_i(z) = q + pz$; deci b_n are funcţia generatoare $p(z) = (q + pz)^n$. Regăsim astfel $p_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}$. Avem $E(b_n) = p\prime(1) = np(q + pz)^{n-1}|_{z=1} = np$. Cum $p\prime\prime(1) = n(n-1)p^2$ rezultă $\operatorname{var}(b_n) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq$. Se verifică uşor că suma a două variabile de tip Bernoulli cu aceeaşi probabilitate este tot o variabilă Bernoulli.

Exemplul 4. Fie o experienţa aleatoare cu două rezultate: *succesul* cu probabilitatea p şi *insuccesul* cu probabilitatea $q = 1 - p$. Fie $1 + \xi$ numărul de repetări al experienţei până apare succesul. ξ este o variabilă aleatoare cu valorile $0, 1, 2, ...$Avem $p(\xi = k) = q^k p$. Deci $p(z) = E(z\xi) = \frac{p}{1-qz}, E(\xi) = \frac{q}{p}, \operatorname{var}(\xi) = \frac{q}{p^2}$.

Dacă notăm cu $n+b_{-n}$ numărul de repetări ale experienţei până apar n succese putem scrie $b_{-n} = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ unde $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt variabile de tipul celor de mai înainte. Deci funcţia generatoare a lui b_{-n} este $p(z) = \left(\frac{p}{1-qz}\right)^n$ şi $E(b_{-n}) = n\frac{q}{p}, \operatorname{var}(b_{-n}) = n\frac{q}{p^2}$. Pentru a calcula $p(b_{-n} = k)$ aplicăm formula seriei binomiale

$$p(z) = p^n (1 - qz)^{-n} = p^n \sum_{k=0}^{\infty} C_{-n}^k (-q)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-n}^k p^n (-q)^k z^k.$$

Deci

$$p(b_{-n} = k) = C_{-n}^k p^n (-q)^k = C_{k+n-1}^{n-1} p^n q^k.$$

Se spune că b_{-n} este repartizată după *schema binomială negativă*. Urmând MATCAD vom scrie $b_{-n} \in nbinom(n, p)$. In MATHCAD densitatea unei asemenea variabile se notează prin $dnbinom(k, n, p)$, funcţia cumulativă prin $pnbinom(k, n, p)$ ş funcţia inversă cumulativă prin $qnbinom(P, n, p)$.

Exemplul 5. Să considerăm o urnă cu a bile albe şi b bile negre. Din urnă se fac $n < a + b$ extrageri succesive fără a pune bila extrasă înapoi. Fie ξ numărul de bile albe extrase. Aceasta este o variabilă aleatoare cu valorile posibile între $\max(0, n - b)$ şi $\min(n, a)$. Avem $p(\xi = k) = p_{nk} = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$. Intr-adevăr, numărul total de evenimente elementare este egal cu numărul combinărilor care se pot face cu cele $a+b$ bile luate câte n; numărul cazurilor favorabile este dat de numărul grupelor care se pot forma astfel încât fiecare grupă să conţină k bile albe şi $n-k$ bile negre: din cele a bile albe se pot forma C_a^k grupe cu câte k bile albe, cu cele b bile negre se pot forma C_b^{n-k} grupe cu câte $n-k$ bile negre, deci numărul cazurilor favorabile este $C_a^k C_b^{n-k}$.

Observând că

$$p_{nk} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \frac{a(a-1)...(a-k+1)}{(b-n+1)(b-n+2)...(b-n+k)} p_{n0}$$

rezultă că funcţia generatoare este

$$p(z) = p_{n0} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{a(a-1)...(a-k+1)}{(b-n+1)(b-n+2)...(b-n+k)} z^k.$$

Avem $E(\xi) = \frac{na}{a+b}$, $\operatorname{var}(\xi) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$.

Exemplul 6. Un lot de 400 de piese, conţine 8% piese cu defecţiuni. Să se identifice legea de repartiţie a numărului ξ de piese cu defecţiuni dintr-un eşantion de 10 piese din lot.

Lotul de $c = 400$ de piese conţine a piese defecte şi b piese bune astfel încât $c = a + b$, $\frac{a}{c} = 0,08$, $\frac{b}{c} = 0,92$, deci $a = 32$, $b = 368$. Un eşantion de $n = 10$ piese conţine k piese defecte şi $n - k = 10 - k$ piese bune. Cu cele b piese bune se pot obţine $C_b^{n-k} = C_{368}^{10-k}$ eşantioane de $n-k$ piese bune, cu cele $a = 32$ piese defecte se pot obţine $C_a^k = C_{32}^k$ eşantioane de k piese defecte; deci există $C_a^k C_b^{n-k} = C_{32}^k C_{368}^{10-k}$ eşantioane de $n = 10$ piese din care k sunt defecte. Rezultă că probabilitatea ca din eşantionul de $n = 10$ piese k să fie defecte este $p_k = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{C_{32}^k C_{368}^{10-k}}{C_{400}^{10}}$. Valoarea medie a variabilei ξ este $E(\xi) = \frac{10.32}{400} = \frac{4}{5}$, iar dispersia este $\operatorname{var}(\xi) = \frac{10.32.368.390}{400^2.399}$.

Este de observat că dacă $a+b = r, p = \frac{a}{r}, q = \frac{b}{r}$ atunci $\lim\limits_{r\to\infty} p_{nk} = C_n^k p^k q^{n-k}$, rezultat firesc.

Exemplul 7. Intr-un lac sunt N peşti. Se pescuiesc a peşti, se marchează aceşti peşti şi se aruncă în lac. In lac sunt acum $b = N - a$ peşti nemarcaţi. Se pescuiesc din nou n peşti. După exemplul 5 probabilitatea ca printre cei n peşti să se găsească k peşti marcaţi este

$$p_{N,k} = \frac{C_a^k C_{N-a}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Dacă după pescuirea celor n peşti s-au pescuit într-adevăr k peşti marcaţi, avem posibilitatea să apreciem numărul numărul total de peşti din lac N pentru că pescuirea celor

k peşti marcaţi este cea mai verosimilă atunci când probabilitatea $p_{N,k}$ este maximă în raport cu variabila N, adică

$$p_{N-1,k} \leq p_{N,k} \leq p_{N+1,k}.$$

Scriind aceasta se găseşte că N este valoarea întreagă cea mai apropiată de $\frac{na}{k}$.

17.4.5 Exerciţii şi probleme

1. La o tombolă se vând 200 bilete din care unul cu un câştig de 50ϵ, două cu un câştig de 25ϵ, 10 cu un câştig de 1ϵ. Să se scrie legea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ reprezentând câştigul la cumpărarea unui bilet.

R.

ξ	0	1	25	50
p	$\frac{187}{200}$	$\frac{10}{200}$	$\frac{2}{200}$	$\frac{1}{200}$

2. O variabilă aleatoare ξ ia valorile $x_k = k$, $k = 1, 2, ...$, cu probabilităţile $p(\xi = k) = 2^{-k}$. Să se scrie expresia funcţiei de repartiţie şi să se calculeze probabilitatea $p(3 \leq \xi \leq 6)$.

R. Fie $n - 1 < x \leq n$, $n \in N$. Evenimentul $(\xi < x)$ înseamnă că ξ ia valorile $1, 2, ..., n - 1$ cu probabilităţile corespunzătoare $2^{-1}, 2^{-2}, ..., 2^{-n+1}$. Funcţia de repartiţie va fi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \leq 1 \\ \\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^{-k} & pentru \quad n-1 < x \leq n \end{cases}$$

Evenimentul $(3 \leq \xi \leq 6)$ însemnă valorile $3, 4, 5, 6$ cu probabilităţile $2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$. Deci $p(3 \leq \xi \leq 6) = 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} = \frac{15}{64}$.

3. Variabila ξ are legea de repartiţie

ξ	-3	-2	0	2	3	5
p	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2

Să se scrie legea de repartiţie a variabilei $\eta = \xi^2$.

R.

η	0	4	9	25
p	0.3	$0.2 + 0.1 = 0.3$	$0.1 + 0.1 = 0.2$	0.2

4. Variabilele aleatoare ξ, η au legile de repartiţie

ξ	-2	-1	0
p	0.3	0.2	0.5

η	0	1	2
p	0.4	0.5	0.1

Să se scrie legile de repartiţie ale variabilelor $\xi + \eta$ şi $\xi\eta$; în ultimul caz se presupune că variabilele ξ, η sunt independente.

R.

$\xi + \eta$	-2	-1	0	1	2
p	0.12	0.23	0.33	0.27	0.05

$\xi\eta$	-4	-2	-1	0
p	0.03	0.17	0.10	0.70

5. Să se calculeze valoarea medie a câştigului la tombola din problema 1.

R. $E(\xi) = 0.\frac{187}{200} + 1.\frac{10}{200} + 25.\frac{2}{200} + 50.\frac{1}{200} = \frac{11}{20}\epsilon$

6. Să se calculeze valoarea medie a numărului de puncte realizate la aruncarea a două zaruri.

R. Dacă ξ, η sunt numărul de puncte de pe primul şi al doilea zar avem $E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta) = 2\frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7$.

7. Să se calculeze dispersia variabile cu legea de repartiţie

ξ	2	3	5
p	0.1	0.6	0.3

R. Avem

$$E(\xi) = 2.0.1 + 3.0.6 + 5.0.3 = 3.5,$$

$$E(\xi^2) = 4.0.1 + 9.0.6 + 25.0.3 = 13.3,$$

$$var(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = 13.3 - 3.5^2 = 1.05.$$

8. O variabilă aleatoare ia valorile $x_1 < x_2$. Ştiind că $p(\xi = x_1) = 0.2$, $E(\xi) = 3.8$, $var(\xi) = 0.16$ să se scrie legea de repartiţie.

R. Se rezolvă sistemul

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 19, \\ x_1^2 + 4x_2^2 &= 73 \end{aligned}$$

cu soluţia $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.8$.

17.5 Variabile aleatoare oarecare

17.5.1 Valori medii ale variabilelor aleatoare oarecare

Fie ξ o variabilă aleatoare oarecare cu funcţia de reparti¡ie $F\xi(x)$ şi să încercăm să definim valoarea medie a variabilei aleatoare $f(\xi)$ pe baza unui şir de valori rezultate în urma măsurătorilor efectuate asupra variabilei ξ. Pentru început să presupunem că variabila aleatoare este mărginită, adică presupunem că $F\xi(x) = 0$ pentru $x < a$ şi $F\xi(x) = 1$ pentru $x \geqq b$, altfel spus, valorile măsurate ale lui ξ se află în intervalul $[a, b]$. Pentru a obţine o aproximare a valorii medii împărţim intervalul $[a, b]$ în N părţi prin punctele $x_i, i = 0, 1, 2, ..., N$ astfel încât $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$. Notăm prin x_i' un punct oarecare din subintervalul $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., N$. Ponderea valorilor lui ξ din intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ este $F\xi(x_i) - F\xi(x_{i-1})$.. Deci, o valoare aproximativă a valorii medii este $\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i') \left(F\xi(x_i) - F\xi(x_{i-1})\right)$. La limită, când norma partiţiei tinde către zero, suma tinde către aşa numita integrală Stieltjes $\int\limits_a^b f(x) dF\xi(x)$.

Teoria integralei Stieltjes a unei funcţii continue aproape coincide cu teoria integralei Riemann. Integrala Stieltjes este folosită în modelarea multor noţiuni fizice. Vom prezenta pe scurt definiţia şi unele proprietăţi ale integralei Stieltjes.

Fie $F(x)$ o funcţie crescătoare pe intervalul $[a, b]$ şi $f(x)$ o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$. Oricărei diviziuni $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ a intervalului $[a, b]$ şi oricărei mulţimi asociate $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N\}$ cu $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ îi asociem suma Stieltjes

$$S(f; \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right).$$

Spunem că funcţia $f(x)$ este integrabilă Stieltjes în raport cu $F(x)$ pe $[a, b]$ dacă pentru orice şir de diviziuni Δ_n cu normele $|\Delta_n| = \max\limits_i |x_i - x_{i-1}|$ tinzând către zero şi pentru orice şir de mulţimi ξ_n asociate şirul sumelor Stieltjes $S(f;\Delta_n,\xi_n)$ converge către o aceeaşi limită independentă de şirul de diviziuni şi mulţimi asociate. Această limită se notează cu $\int\limits_a^b f(x)dF(x)$. Se poate arăta că dacă funcţia $f(x)$ este continuă, atunci integrala Stieltjes există.

Au loc proprietăţi asemănătoare integralei Riemann:

1) Dacă $f_1(x)$, $f_2(x)$ sunt integrabile Stieltjes atunci şi $\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$ este integrabilă Stieltjes şi

$$\int\limits_a^b (\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)dF(x)=\alpha\int\limits_a^b f_1(x)dF(x)+\beta\int\limits_a^b f_2(x)dF(x).$$

2) Dacă $a<c<b$ atunci $\int\limits_a^b f(x)dF(x)=\int\limits_a^c f(x)dF(x)+\int\limits_c^b f(x)dF(x)$.

3) Dacă $f(x)\geq 0$ pe $[a,b]$ atunci $\int\limits_a^b f(x)dF(x)\geq 0$.

4) $\left|\int\limits_a^b f(x)dF(x)\right|\leq \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|.(F(b)-F(a))$.

5) $\int\limits_a^b f(x)d(F_1(x)+F_2(x))=\int\limits_a^b f(x)dF_1(x)+\int\limits_a^b f(x)dF_2(x)$.

6) Dacă $F(x)=x$ atunci integrala Stieltjes a lui $f(x)$ coincide cu integrala Riemann.

7) Dacă funcţia $F(x)$ este crescătoare pe $[a,b]$ şi derivabilă $F'(x)=p(x)$ atunci $\int\limits_a^b f(x)dF(x)$ coincide cu integrala Riemann $\int\limits_a^b f(x)p(x)dx$, adică pur şi simplu se înlocuieşte $dF(x)$ cu expresia sa $p(x)dx$.

8) Dacă $\alpha<\beta$ şi

$$F(x)=\begin{cases}\alpha & pentru \quad a\leq x\leq c\\ \beta & pentru \quad c<x\leq b\end{cases}$$

atunci

$$\int\limits_a^b f(x)dF(x)=(\beta-\alpha)f(c)=(F(c+0)-F(c-0))f(c).$$

Cum $F(x)=\alpha+(\beta-\alpha)h(x-c)$, h fiind funcţia treaptă, în distribuţii putem scrie $F'(x)=(\beta-\alpha)\delta(x-c)$ şi dacă ţinem cont de proprietatea de filtrare a funcţiei δ putem scrie

$$\int\limits_a^b f(x)d(\alpha+(\beta-\alpha)h(x-c))=\int\limits_a^b f(x)(\beta-\alpha)\delta(x-c)dx=(\beta-\alpha)f(c).$$

9) Dacă funcţia $F(x)$ este o funcţie crescătoare, constantă pe porţiuni cu salturile $F(c_i+0)-F(c_i-0)$ în punctele c_i, $i=1,2,...,n$ atunci

$$\int_a^b f(x)dF(x)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(F(c_i+0)-F(c_i-0).$$

10) Dacă funcţia $F(x)$ crescătoare pe $[a,b]$ este derivabilă pe porţiuni cu derivata $p(x)$ cu salturile $F(c_i+0)-F(c_i-0)$ în punctele c_i, $i=1,2,...,n$ atunci

$$\int_a^b f(x)dF(x)=\int_a^b f(x)p(x)dx+\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(F(c_i+0)-F(c_i-0),$$

adică pur şi simplu înlocuim $dF(x)$ prin expresia sa în distribuţii

$$dF(x)=p(x)dx+\sum_{i=1}^{n}(F(c_i+0)-F(c_i-0)\delta(x-c_i).$$

Definiţia 1. Dacă ξ este o variabilă aleatoare oarecare cu funcţia de repartiţie $F\xi(x)$, se numeşte *valoare medie* sau *speranţă matematică* a variabilei aleatoare $f(\xi)$ integrala Stieltjes (improprie)

$$E\left(f(\xi)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF\xi(x)=\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)dF\xi(x),$$

cu condiţia ca aceasta să existe.

In cazul particular, în care funcţia $f(x)$ este o putere naturală a lui x sau a modulului lui x, mărimile $E\left(\xi^k\right), E\left(|\xi|^k\right)$, dacă există, constituie *momentele* respectiv *momentele absolute de ordin k.* Mărimile $E\left((\xi-E(\xi))^k\right)$, $E\left(|\xi-M(\xi)|^k\right)$ se numesc momentele centrale respectiv momentele centrale absolute de ordinul k. In particular $var(\xi)=E\left((\xi-E(\xi))^2\right)$ este dispersia variabilei aleatoare ξ. Proprietăţile valorii medii şi ale momentelor stabilite în cazul variabilelor aleatoare discrete rămân valabile şi în cazul variabilelor aleatoare oarecare. In particular are loc inegalitatea lui Cebîşev:

$$p\left(|\xi-E(\xi)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\mathrm{var}\,(\xi)}{\varepsilon^2}$$

pentru orice $\varepsilon>0$.

Definiţia 2. O variabilă aleatoare ξ se numeşte *cu repartiţie absolut continuă* dacă există o funcţie integrabilă $p\xi(x), -\infty < x < \infty$ astfel încât în orice punct x $F\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p\xi(t)dt$. Funcţia $p\xi(x), -\infty < x < \infty$ se numeşte *densitatea de repartiţie a variabilei* ξ sau *densitatea funcţiei de repartiţie* $F\xi(x)$.

In cazul unei variabile aleatoare ξ cu repartiţie absolut continuă $p(\xi = x) = 0$ şi deci

$$\begin{aligned} p(x \leq \xi \leq y) &= p(x < \xi < y) = p(x \leq \xi < y) = \\ &= p(x < \xi \leq y) = \int_x^y p\xi(t)dt. \end{aligned}$$

De aici semnificaţia densităţii de repartiţie

$$p(x < \xi < x + dx) = p_\xi(x)dx + \vartheta(dx), \quad dx \to 0.$$

Exemplul 1. O variabilă aleatoare ξ are o *repartiţie uniformă* în intervalul (a, b) (uneori urmând MATHCAD vom scrie $\xi \in unif(a, b)$) dacă are o densitate de repartiţie

$$p\xi(x) = dunif(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in (a, b) \\ 0, x \notin (a, b) \end{cases}.$$

In MATHCAD densitatea de repartiţie a acestei variabile este $dunif(x, a, b)$, funcţia cumulativă este $punif(x, a, b)$ iar inversa cumulativă este $qunif(P, a, b)$.

Exemplul 2. O variabilă aleatoare ξ are o repartiţie normală $norm(a, \sigma)$ (scriem urmând MATHCAD $\xi \in norm(a, \sigma)$) dacă are densitate de repartiţie de forma

$$p\xi(x) = dnorm(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbf{R}.$$

Graficul unei asemenea densităţi de repartiţie este de forma unui clopot simetric în raport cu dreapta $x = a$. Am văzut că pentru n mare $p(b_n)$ tinde către un asmenea grafic. Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare $\xi \in norm(a, \sigma)$ este notată în MATHCAD prin $dnorm(x, a, \sigma)$, funcţia cumulativă prin $pnorm(x, a, \sigma)$, iar inversa cumulativă prin $qnorm(P, a, \sigma)$.

Exemplu 3. Dacă ξ este o variabilă aleatoare cu distribuţie continuă cu densitatea de repartiţie $p\xi(x) = 0$ pentru $x < 0$, funcţia $\lambda\xi(x) = \frac{p\xi(x)}{1-F\xi(x)}, x > 0$ se numeşte *intensitatea variabilei aleatoare* ξ . Denumirea este justificată de următoarea interpretare:

Fie ξ timpul de funcţionare fără defecţiuni al unui aparat. ξ este o variabilă aleatoare cu o densitate de repartiţie $p_\xi(x)$. Să calculăm probabilitatea $p(x,dx)$ a faptului că aparatul se defectează în intervalul de timp $(x, x+dx)$ cu condiţia ca el să fi lucrat fără defecţiuni până la momentul x. Avem

$$p(x,dx) = p(x < \xi < x+dx|\xi \geq x) = \frac{F_\xi(x+dx) - F_\xi(x)}{1 - F_\xi(x)}.$$

Deci avem

$$\frac{p(x,dx)}{dx} = \frac{1}{1-F_\xi(x)}\frac{F_\xi(x+dx) - F_\xi(x)}{dx} = \frac{p_\xi(x)}{1-F_\xi(x)} = \lambda_\xi(x).$$

Rezultă că $\lambda_\xi(x)$ reprezintă probabilitatea ca ξ să ia valori în intervalul elementar $(x, x+dx)$ cu condiţia ca $\xi > x$. In teoria fiabilităţii funcţia $\lambda_\xi(x)$ se numeşte *intensitate sau rată a defectărilor aparatului.* Cunoaşterea funcţiei $\lambda_\xi(x)$ implică cunoaşterea funcţiei de repartiţie $F_\xi(x)$ din ecuaţia diferenţială

$$\frac{F\prime_\xi(x)}{1-F_\xi(x)} = \lambda_\xi(x),$$

pe care integrănd-o avem

$$\int_0^t \frac{F\prime_\xi(x)}{1-F_\xi(x)}dx = -\ln\left(1-F_\xi(x)\right)\Big|_0^t = -\ln\left(1-F_\xi(t)\right) = \int_0^t \lambda_\xi(x)dx\ ,$$

de unde

$$F_\xi(t) = 1 - e^{\int\limits_0^t \lambda_\xi(x)dx}, t \geq 0.$$

Experienţa arată că funcţia $\lambda_\xi(x)$ are graficul la dreapta lui Oy de forma unui lighean ca în figura de mai jos.

Prima parte corespunde perioadei de rodaj, următoarea parte - perioadei de lucru normal şi ultima parte - perioadei de îmbătrânire.

In perioada de lucru normal se poate presupune că funcţia $\lambda\xi(x) = \lambda(= const.)$ Atunci funcţia de repartiţie este

$$F\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

numită *repartiţie exponenţială de parametru* λ . Urmând MATHCAD vom scrie $\xi \in exp(\lambda)$. Densitatea repartiţiei este

$$p\xi(x) = dexp(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}.$$

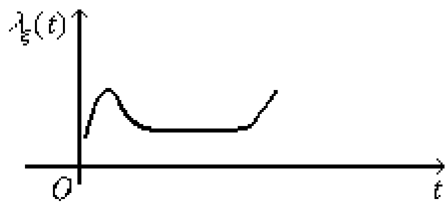

Fig. 17.3:

In MATHCAD această densitate se notează prin $dexp(x, \lambda)$, funcţia cumulativă prin $pexp(x, \lambda)$, iar funcţia inversă cumulativă prin $qexp(P, \lambda)$.

Distribuţia exponenţială se caracterizează prin faptul că pentru x>0 şi t>0

$$p\left(\xi > x + t | \xi > x\right) = \frac{p(\xi > x + t)}{p(\xi > x)} = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda t},$$

adică restul timpului de lucru fără defecţiuni nu depinde de cât a lucrat fără defecţiuni până atunci.

Dacă ξ este o variabilă aleatoare cu repartiţie continuă cu densitatea $p_\xi(x)$, atunci valoarea medie a sa (sau speranţa matematică) este mărimea $M\left(\xi\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_\xi(x)dx$.

Definiţia 3. Abscisa $M_o(\xi)$ a punctului de maxim global al densităţii de repartiţie $p\xi(x)$ a variabilei aleatoare ξ se numeşte *valoarea modală sau moda variabilei aleatoare.* Dacă densitatea de repartiţie prezintă mai multe maxime locale, se zice că variabila aleatoare este *plurimodală*.

Definiţia 4. Numărul $M_e(\xi)$ pentru care

$$p\left(\xi \geq M_e(\xi)\right) \geq \frac{1}{2} \leq p\left(\xi \leq M_e(\xi)\right),$$

sau prin intermediul funcţiei de repartiţie

$$F\xi\left(M_e(\xi) + 0\right) \geq \frac{1}{2} \geq F\xi\left(M_e(\xi)\right)$$

se numeşte *mediana variabilei aleatoare* ξ .

In cazul variabilelor aleatoare cu repartiţie continuă mediana $M_e(\xi)$ este unic determinată de egalitatea $\int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \int\limits_{x}^{\infty} p_\xi(t)dt = \frac{1}{2}$ şi este de fapt abscisa verticalei care împarte în părţi egale aria limitată de graficul densităţii de repartiţie şi de axa Ox.

Definiţia 5. Dacă ξ este o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiţie $p\xi(x)$, numerele $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ pentru care $\int\limits_{-\infty}^{x_1} p\xi(x)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} p\xi(x)dx = ... = \int\limits_{x_{n-1}}^{\infty} p\xi(x)dx = \frac{1}{n}$ se numesc *cuantile de ordin n.* In cazul $n = 4$ se numesc *cuartile*, în cazul $n = 10$ se numesc *decile*, iar în cazul $n = 100$ se numesc *procentile.*

Definiţia 6. Prin cuantilă de nivel P a variabile aleatoare cu densitatea de repartiţie $p\xi(x)$ vom înţelege abscisa x_P determinată de ecuaţia $\int\limits_{-\infty}^{x_P} p\xi(x)dx = P$, adică x_P este valoarea funcţiei inverse cumulative pentru P.

Evident, cuantila $x_{0.5}$ coincide cu mediana variabilei aleatoare.

Observaţie. Dacă ξ este o variabilă aleatoare discretă cu repartiţia

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_k & ... \\ p_1 & p_2 & ... & p_k & ... \end{pmatrix}$$

o putem considera ca repartiţie cu densitate concentrată în punctele $x_1, x_2, ..., x_k, ...$. Intr-adevăr funcţia sa de repartiţie se poate scrie sub forma

$$F\xi(x) = \sum_k p_k h\left(x - x_k\right)$$

densitatea de repartiţie fiind de fapt

$$p\xi(x) = \sum_k p_k \delta(x - x_k).$$

Funcţia treaptă a lui Heaviside $h\left(x - x_k\right)$ apare ca funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare care ia valoarea x_k cu probabilitatea 1.

17.5.2 Funcţia caracteristică.

Dacă $f(x) = e^{itx}$ valoarea medie $E\left(e^{it\xi}\right)$ există totdeauna.

Definiţia 7. Dacă ξ este o variabilă aleatoare oarecare cu funcţia de repartiţie $F\xi(x)$, funcţia complexă de variabila reală t

$$\varphi\xi(t) = E\left(e^{it\xi}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF\xi(x),$$

se numeşte *funcţia caracteristică* a variabilei aleatoare ξ .

Notăm că funcţia caracteristică a fost introdusă de către Cauchy sub forma $\psi\xi(\theta) = E\left(e^{\theta\xi}\right), \theta \in \mathbf{R}$. Aceasta se numeşte uneori *funcţia generatoare a momentelor* pentru că are loc relaţia $\frac{d^k\psi\xi(0)}{d\theta^k} = E(\xi^k) = \nu_k(\xi)$. Sub forma din definiţia noastră funcţia caracteristică a fost introdusă de către Paul Levy.

Aşa cum arată denumirea, se poate arăta că funcţia caracteristică determină complet repartiţia variabilei aleatoare.

In cazul variabilei ξ cu densitatea $p_\xi(x)$ funcţia caracteristică este

$$\varphi\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p\xi(x)dx,$$

adică este

$$\varphi\xi(t) = \sqrt{2\pi} F_t^{+}[p\xi(x)]$$

diferind de transformata Fourier directă a densităţii numai prin factorul $\sqrt{2\pi}$. Evident, funcţia caracteristică determină repartiţia cum rezultă din formula de inversiune a transformatei Fourier

$$p\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi\xi(t)dt.$$

Pentru variabila aleatoare cu legea de repartiţie

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_k & ... \\ p_1 & p_2 & ... & p_k & ... \end{pmatrix}$$

funcţia caracteristică este

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{itx_k}.$$

Au loc următoarele teoreme:

Teorema 1. Dacă variabila aleatoare ξ admite moment de ordinul k atunci există derivata de ordin k a funcţiei caracteristice $\varphi\xi^{(k)}(t)$ şi $\varphi\xi^{(k)}(t) = i^k M\left(\xi^k e^{it\xi}\right)$; în particular $\varphi\xi^{(k)}(0) = i^k M(\xi^r)$.

Teorema rezultă din proprietăţile transformatei Fourier.

Sunt importante relaţiile

$$M(\xi) = -i\varphi\prime_\xi(0)$$

$$M\left(\xi^2\right)=-\varphi\prime\prime_{\xi}(0)$$

$$\operatorname{var}(\xi)=\varphi\prime_{\xi}(0)^2-\varphi\prime\prime_{\xi}(0).$$

Teorema 2. Dacă $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ sunt variabile aleatoare independente, atunci

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\,\varphi_{\xi_2}(t)...\varphi_{\xi_n}(t).$$

Relaţia rezultă din definiţia funcţiei caracteristice.

17.5.3 Teoreme-limită centrale.

Folosind funcţia caracteristică obţinem demonstraţii mai simple pentru teorema limită a lui Moivre-Laplace şi teorema limită integrală a lui Laplace. In adevăr dacă ξ este o variabilă aleatoare cu distribuţia binomială

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & .... & k & .... & n \\ \\ \mathrm{q}^{\mathrm{n}} & \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{1}pq^{n-1} & \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{2}p^2q^{n-2} & .... & \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}p^kq^{n-k} & .... & \mathrm{p}^{\mathrm{n}} \end{pmatrix},$$

atunci funcţia sa caracteristică este

$$\varphi\xi(t)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{itk}p^kq^{n-k}=\left(e^{it}p+q\right)^n.$$

Dacă considerăm varabila redusă

$$\varsigma=\frac{\xi-M(\xi)}{D(\xi)}=\frac{\xi-np}{\sqrt{npq}}=\frac{\xi-np}{D}$$

funcţia sa caracteristică va fi

$$\varphi\varsigma(t)=e^{-i\frac{tnp}{D}}\left(e^{i\frac{t}{D}}p+q\right)^n.$$

Logaritmând şi ţinând cont că $q=1-p$ avem

$$\ln\varphi_{\varsigma}(t)=-\frac{itnp}{D}+n\ln\left[1+p\left(e^{i\frac{t}{D}}-1\right)\right].$$

Dezvoltând paranteza rotundă ţinând cont că$\frac{t}{D}=\frac{t}{\sqrt{npq}}\to 0$ pentru $n\to\infty$, avem

$$\ln\varphi_{\varsigma}(t)=-\frac{itnp}{D}+n\ln\left[1+p\left(\frac{it}{D}-\frac{1}{2}\frac{t^2}{D^2}+...\right)\right].$$

Cum $\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - ...$ găsim

$$\begin{aligned} \ln \varphi_\varsigma(t) &= -\frac{itnp}{D} + n\left[\frac{itp}{D} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{D^2}\left(p-p^2\right) + \vartheta\left(D^{-3}\right)\right] = \\ &= -\frac{1}{2}t^2\frac{np(1-p)}{D^2} + \vartheta\left(nD^{-3}\right) = -\frac{1}{2}t^2 + \vartheta\left(nD^{-3}\right). \end{aligned}$$

Rezultă că la limită pentru $n \to \infty$ variabila redusă ς are funcţia caracteristică $\varphi\varsigma(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ şi deci are densitatea de repartiţie $f\varsigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_x^-\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, adică am regăsit teorema limită locală. Din semnificaţia densităţii de repartiţie rezultă teorema limită integrală.

Demonstraţia de mai sus ne arată că teorema limită integrală poate fi generalizată sub forma aşa numitei *teoreme limită centrală*. In adevăr, fie ξ_n un şir infinit de variabile aleatoare independente cu aceeaşi repartiţie cu valoarea medie M şi cu dispersia D^2. Variabilele aleatoare $\xi\prime_n = \xi_n - M$ au valoarea medie nulă şi aceeaşi dispersie D^2. Nu cunoaştem nimic altceva despre repartiţia acestor variabile. Fie $\varphi(t)$ funcţia caracteristică a acestor variabile aleatoare. Pentru ea cunoaştem prima şi a doua derivată în 0: $\varphi\prime(0) = 0, \varphi\prime\prime(0) = -D^2$ şi deci putem scrie dezvoltarea Taylor

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{2}D^2t^2 + ...$$

Variabilele aleatoare $\eta_n = \frac{\xi\prime_n}{D\sqrt{n}} = \frac{\xi_n - M}{D\sqrt{n}}$ au funcţia caracteristică $\varphi_{\eta_n}(t) = \varphi\left(\frac{t}{D\sqrt{n}}\right)$ cu dezvoltarea Taylor

$$\varphi_{\eta_n}(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + ...,$$

unde termenii nescrişi au ordinul lui $n^{-\frac{3}{2}}$. Trecând la limită $n \to \infty$, variabila aleatoare

$$\eta = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\eta_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i - M}{D\sqrt{n}}$$

are funcţia caracteristică

$$\varphi_\eta(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_{\eta_n}(t)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + ...\right)^n = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Rezultă deci

Teorema 3. (*Teorma-limită centrală*). Dacă variabilele independente ξ_n sunt repartizate după aceeaşi repartiţie cu aceeaşi valoare medie M şi aceeaşi dispersie D^2, atunci variabila $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ pentru $n \to \infty$ este repartizată după legea normală cu media M şi dispersia $\frac{D^2}{n}$.

Se poate arăta că media variabilelor aleatoare este repartizată după legea normală chiar în condiţii mai slabe decât cele de sus, în particular chiar când nu toate variabilele sunt repartizate după aceeaşi repartiţie.

17.5.4 Exerciţii şi probleme

1. Densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ este

$$f(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x < 0 \\ cx^2e^{-kx}, k > 0 & pentru \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Să se determine: a) coeficientul c; b) funcţia de repartiţie $F(x)$; c) probabulitatea ca ξ să ia valori în $(0, 1/k)$.

R. a) $c = \frac{k^3}{2}$; b) $F(x) = 1 - \frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}$; c) $p(0 < \xi < 1/k) = 1 - \frac{5}{2e}$.

2. Să se arate că funcţia

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & pentru \quad 0 \leq x < 2 \\ x^2 - \frac{7}{4} & pentru \quad 2 \leq x < \frac{11}{4} \\ 1 & pentru \quad x \geq \frac{11}{4} \end{cases}$$

este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare ξ şi să se determine $p(1 \leq \xi \leq 1.5)$.

R. 0.0919.

3. Variabila aleatoare ξ are funcţia de repartiţie $F(x)$ şi densitatea de repartiţie $f(x)$. Să se arate că variabila $\eta = \xi^2$ are funcţia de repartiţie

$$G(y) = \begin{cases} 0 & pentru \quad y \leq 0 \\ F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) & pentru \quad y > 0 \end{cases}$$

şi densitatea de repartiţie

$$g(y) = \begin{cases} 0 & pentru \quad y \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right) & pentru \quad y > 0 \end{cases}$$

4. Să se arate că dacă variabila aleatoare ξ are funcţia de repartiţie $F(x)$ şi densitatea de repartiţie $f(x)$ atunci variabila $\eta = a\xi + b$ are funcţia de repartiţie

$$G(y) = \begin{cases} F(\frac{y-b}{a}) & dac\breve{a} \quad a > 0 \\ 1 - F(\frac{y-b}{a}) & dac\breve{a} \quad a < 0 \end{cases}$$

şi densitatea de repartiţie

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f(\frac{y-b}{a}).$$

5. O variabilă aleatoare are funcţia caracteristică $\varphi(t) = e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Să se găsească densitatea de repartiţie.

R. $\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$.

6. O variabilă aleatoare are funcţia caracteristică $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Să se găsească densitatea de repartiţie.

R. $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

7. O variabilă aleatoare are funcţia caracteristică $\varphi(t) = \frac{e^{it}(1-e^{-6t})}{6(1-e^{it})}$. Să se arate că variabila coincide cu numărul de puncte ieşit la aruncarea unui zar.

17.6 Convergenţa şirurilor de variabile aleatoare

Teoremele referitoare la şiruri de variabile aleatoare demonstrate în paragrafele precedente pot fi exprimate mai clar dacă se definesc anumite moduri de convergenţă a şirurilor de variabile aleatoare.

Definiţia 1. Şirul de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n\in N}$ *converge în probabilitate către variabila aleatoare* ξ dacă pentru orice numere $\varepsilon > 0,\ \delta > 0$ există numărul natural $N(\varepsilon, \delta)$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon, \delta)$ avem $p\left(|\xi_n - \xi| \geq \delta\right) \leq \varepsilon$. Vom scrie în acest caz $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$.

Din definiţie rezultă că $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} p\left(|\xi_n - \xi| \geq \delta\right) = 0, \forall\delta > 0$.

Cu această definiţie legea numerelor mari sub forma lui Bernoulli se poate enunţa sub forma:

T1. Dacăξ este o variabilă aleatoare cu legea de repartiţie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$ şi dacă $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt observaţii independente ale lui ξ , atunci $\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_2}{n} \xrightarrow{p} p$.

De asemenea legea numerelor mari sub forma lui Markov se enunţă sub forma:

T2. Fie ξ este o variabilă aleatoare simplă cu legea de repartiţie $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_m \\ p_1 & p_2 & ... & p_m \end{pmatrix}$ şi fie $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ observaţii independente ale lui ξ . Atunci $\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n} \overset{p}{\to} M(\xi)$.

Definiţia 2. Şirul de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n\in N}$ converge tare (sau cu probabilitate 1) către variabila aleatoare ξ dacă pentru orice numere $\varepsilon > 0, \ \delta > 0$ există numărul natural $N(\varepsilon, \delta)$ astfel încât avem $p\left(\bigcup\limits_{n>N(\varepsilon,\delta)} (|\xi_n - \xi| \geq \delta)\right) < \varepsilon$. Vom scrie în acest caz $\xi_n \overset{p=1}{\to} \xi$.

Definiţia 3. Şirul de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n\in N}$ converge în repartiţie către variabila aleatoare ξ dacă în orice punct x de continuitate al funcţiei de repartiţie $F\xi(x)$ are loc relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F\xi(x)$, $F_{\xi_n}(x)$ fiind funcţia de repartiţie a lui ξ_n .Vom scrie în acest caz $\xi_n \overset{rep}{\to} \xi$

Definiţia 4. Şirul de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n\in N}$ converge în medie de ordinul r către variabila aleatoare ξ dacă există momentele de ordinul r ale variabilelor ξ_n , ξ şi $\lim\limits_{n\to\infty} M\left(|\xi_n - \xi|^r\right) = 0$ Vom scrie în acest caz $\xi_n \overset{med\, r}{\to} \xi$.

Au loc următoarele teoreme:

T3. Dacă $\xi_n \overset{p}{\to} \xi$ sau dacă $\xi_n \overset{p=1}{\to} \xi$ atunci $\xi_n \overset{rep}{\to} \xi$.

T4. Dacă $\xi_n \overset{med\, r}{\to} \xi$ atunci $\xi_n \overset{p}{\to} \xi$.

Teorema limita Moivre-Laplace se poate enunţa sub forma:

T5. Dacă ξ este o variabilă aleatoare cu legea de repartiţie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$ şi dacă $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt observaţii independente ale lui ξ , atunci $\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n-np}{\sqrt{npq}} \overset{rep}{\to} \varsigma$, unde ς este o variabilă aleatoare cu repartiţie normală standard.

Teorema limită centrală enunţată mai sus se poate enunţa sub forma:

T6. Dacă variabilele independente ξ_n sunt repartizate după aceeaşi repartiţie cu aceeaşi valoare medie M şi aceeaşi dispersie D, atunci $\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n-nM}{D\sqrt{n}} \overset{rep}{\to} \varsigma$, unde ς este o variabilă aleatoare cu repartiţie normală standard.

17.7 Variabile aleatoare vectoriale

Dacă într-un anumit proces de producţie se realizează piese caracterizate prin doi parametri, să zicem lungimea şi lăţimea, aceşti parametri se vor încadra cu o anumită precizie în anumite intervale, nici un proces ne fiind ideal. Dacă ξ este lungimea piesei, iar η este lăţimea piesei, suntem conduşi la o variabilă aleatoare bidimensională $\varsigma = (\xi, \eta)$, adică un vector aleator ale cărui componente sunt variabile aleatoare. Uneori este mai comod să considerăm vectorul ca o coloană $\zeta = (\xi, \eta)^t$.

Definiţia 1. Pentru vectorul aleator $\varsigma = (\xi, \eta)^t$ se numeşte funcţie de repartiţie funcţia

$$F_\varsigma(x, y) = p(\xi < x, \eta < y), \quad (x, y) \in R^2.$$

Valoarea funcţiei de repartiţie $F\varsigma\,(x, y)$ reprezintă probabilitatea ca punctul de coordonate (ξ, η) să se afle în cadranul situat la stânga şi mai jos de punctul (x, y). Prin funcţia de repartiţie $F\varsigma\,(x, y)$ se pot exprima diferite probabilităţi. Este clar că avem $F\varsigma(\infty, \infty) = 1, \quad F\varsigma(x, -\infty) = 0\ \forall x \in R, \quad F\varsigma(-\infty, y) = 0\ \forall y \in R.$

Dacă $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ atunci

$$p\left(x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2\right) =$$

$$= F\varsigma(x_2, y_2) - F\varsigma(x_1, y_2) - F\varsigma\left(x_2, y_1\right) + F\varsigma\left(x_1, y_1\right).$$

Dacă vom nota cu D domeniul dreptunghiular din stânga egalităţii, vom putea scrie relaţia de mai sus sub forma

$$p\left(\varsigma = (\xi, \eta) \in D\right) = F\varsigma(D),$$

cu notaţia corespunzătoare pentru membrul drept.

Condiţia de nedescreştere din cazul variabilelor aleatoare unidimensionale se va scrie în această situaţie prin relaţia $F_\varsigma(D) \geq 0$ pentru orice dreptunghi D de tipul celui de sus. In particular, la limită cu $y_1 \to -\infty,\ x_1 \to -\infty$ funcţia $F_\varsigma\left(x, y\right)$ trebuie să fie nedescrescătoare în fiecare variabilă. In aceste condiţii, funcţia $F_\varsigma\left(x, y\right)$ se numeşte nedescrescătoare în cele două variabile.

Funcţia de repartiţie a valorilor lui ξ când se ignoră complet valorile lui η este $F_\varsigma(x, \infty)$ şi se numeşte *funcţia de repartiţie marginală* a lui ξ . Analog, $F_\varsigma(\infty, y)$ este funcţia de repartiţie marginală a lui η .

Pentru a găsi valoarea medie a unei funcţii continue $\varphi(\xi, \eta)$ să presupunem pentru moment că variabilele ξ, η sunt mărginite, adică valorile lor rezultate în urma experienţei aleatoare (x, y) sunt cuprinse în dreptunghiul $a < x < b, c < y < d$. Impărţim acest dreptunghi în mai multe dreptunghiuri mai mici D_{jk} prin dreptele $x = a = x_0, x_1, ..., x_N = b$ şi $y = c = y_0, y_1, ..., y_M = d$. Valoarea medie a funcţiei $\varphi(\xi, \eta)$ se va putea aproxima prin suma Riemann-Stieltges

$$\sum_{j,k} \varphi\left(x\prime_j, y\prime_k\right) F\varsigma(D_{jk}), (x\prime_j, y\prime_k) \in D_{jk}$$

care va tinde când $N \to \infty, M \to \infty$ către integrala Stieltges notată $\int\limits_a^b \int\limits_c^d \varphi(x, y) d^2 F\varsigma(x, y)$. Dacă în cazul oarecare, există limita acestei integrale când $b, d \to \infty, a, c \to -\infty$ atunci se defineşte valoarea medie a funcţiei $\varphi(\xi, \eta)$ prin integrala

$$E\left(\varphi(\xi, \eta)\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) d^2 F\varsigma(x, y).$$

Definiţia 2. Dacă există o funcţie $f_\varsigma(x, y)$ definită şi continuă pe $\mathbf{R}^2$ astfel ca

$$F\varsigma(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f\varsigma(u, v) du dv$$

atunci funcţia $f\varsigma(x, y)$ se numeşte densitatea de repartiţie sau densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $\varsigma = (\xi, \eta)^t$. In acest caz se spune că variabila aleatoare $\varsigma = (\xi, \eta)^t$ este *cu repartiţie continuă*.

Semnificaţia densităţii de repartiţie este dată de relaţia

$$p\left(x < \xi < x + dx, y < \eta < y + dy\right) = f_\varsigma(x, y) dx dy + \vartheta(dx dy).$$

Evident, în această situaţie

$$f\varsigma(x, y) = \frac{\partial^2 F\varsigma(x, y)}{\partial x \partial y}$$

şi

$$f\varsigma(x, y) \geq 0, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\varsigma(x, y) dx dy = 1.$$

Repartiţia marginală a lui ξ are ca densitate funcţia $f\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\varsigma(x, y) dy$, iar repartiţia marginală a lui η are ca densitate funcţia $f\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\varsigma(x, y) dx$.

Conform semnificaţiilor densităţilor de repartiţie avem

$$p\left(x \leq \xi \leq x+dx, y \leq \eta \leq y+dy\right) = f_{\varsigma}(x,y)dxdy + \vartheta(dxdy),$$

$$\begin{aligned} p\left(-\infty < \xi < \infty, y \leq \eta \leq y+dy\right) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\varsigma(x,y)dx.dy + \vartheta(dy) = \\ &= f\eta(y)dy + \vartheta(dy). \end{aligned}$$

Probabilitatea evenimentului $x \leq \xi \leq x+dx$ cu condiţia ca $y \leq \eta \leq y+dy$ este deci $\frac{f\varsigma(x,y)}{f\eta(y)}dx + \vartheta(dx)$. Prin definiţie

$$f\xi\left(x|\eta = y\right) = \frac{f\varsigma(x,y)}{f\eta(y)} = \frac{f\varsigma(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\varsigma(x,y)dx}$$

se numeşte *densitatea probabilităţii condiţionate a lui* ξ cu *condiţia* $\eta = y$. La fel

$$f\eta\left(y|\xi = x\right) = \frac{f\varsigma(x,y)}{f\xi(x)} = \frac{f\varsigma(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\varsigma(x,y)dy}$$

este densitatea probabilităţii condiţionate a lui η cu condiţia $\xi = x$. Dacă integrăm relaţiile

$$\begin{aligned} f\varsigma(x,y) &= f\eta(y)f\xi\left(x|\eta = y\right), \\ f\varsigma(x,y) &= f\xi(x)f\eta\left(y|\xi = x\right) \end{aligned}$$

prima în raport cu y, a doua în raport cu x între $-\infty$ şi ∞ avem

$$\begin{aligned} f\xi(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\eta(y)f\xi\left(x|\eta = y\right)dy, \\ f\eta(y) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\xi(x)f\eta\left(y|\xi = x\right)dx \end{aligned}$$

adică formule ale probabilităţii totale. Vom putea scrie

$$f\xi\left(x|\eta = y\right) = \frac{f\zeta(x,y)}{f\eta(y)} = \frac{f\xi(x)f\eta\left(y|\xi = x\right)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\xi(x)f\eta\left(y|\xi = x\right)dx}$$

respectiv

$$f\eta\left(y|\xi=x\right)=\frac{f\zeta(x,y)}{f\xi(x)}=\frac{f\eta(y)f\xi\left(x|\eta=y\right)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\eta(y)f\xi\left(x|\eta=y\right)dy}$$

adică formulele lui Bayes pentru densităţile variabilelor ξ, η.

Variabilele ξ, η sunt independente dacă $f\xi\left(x|\eta=y\right)=f\xi(x)$ adică $f\varsigma(x,y)=f\xi(x)f\eta(y)$.

Valoarea medie a funcţiei $\varphi(\xi,\eta)$ este în cazul repartiţiei continue

$$E\left(\varphi(\xi,\eta)\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)f\varsigma(x,y)dxdy$$

In cazul în care $\varphi(\xi,\eta)=\xi^l\eta^m$ se obţine momentul de ordin l,m în raport cu originea:

$$\mu_{lm}=E\left(\xi^l\eta^m\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^ly^mf\varsigma(x,y)dxdy.$$

Dacă $\varphi(\xi,\eta)=(\xi-a)^l(\eta-b)^m$ se obţine momentul de ordin l,m în raport cu punctul (a,b). Mai interesante sunt momentele în raport cu punctul $(E(\xi),E(\eta))$.

Vectorul $(E(\xi),E(\eta))^t$ se numeşte media vectorului aleator ζ şi e notat uneori $E(\zeta)$. Dacă $A=(a_{i,j})$ este o matrice constantă de tipul $(n,2)$ şi b este un vector constant cu n componente atunci putem vorbi de vectorul $A\zeta+b$ şi evident

$$E(A\zeta+b)=AE(\zeta)+b.$$

Dacă notăm $m=E(\zeta)$ definim matricea covariaţională a vectorului ζ prin

$$cov(\zeta)=E((\zeta-m)(\zeta-m)^t).$$

Avem

$$\begin{aligned}cov(\zeta) &= E\begin{pmatrix}(\xi-m\xi)^2 & (\xi-m\xi)(\eta-m\eta)\\(\eta-m\eta)(\xi-m\xi) & (\eta-m\eta)^2\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}var(\xi) & cov(\xi,\eta)\\cov(\eta,\xi) & var(\eta)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Se verifică uşor că au loc relaţiile

$$cov(\zeta)=E(\zeta\zeta^t)-E(\zeta)E(\zeta)^t,$$

$$cov(A\zeta + b) = Acov(\zeta)A^t.$$

Cum

$$cov\left((\alpha,\beta)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) = cov(\alpha\xi+\beta\eta) = (\alpha,\beta)cov(\zeta)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \geq 0$$

rezultă că matricea de covarianţă este pozitiv definită exceptând cazul când există α,β astfel încât $\alpha\xi+\beta\eta = constant$.

Dacă matricea covariaţională K a unui vector aleator $\zeta = (\xi,\eta)^t$ este pozitiv definită atunci ea are inversă K^{-1}. Se zice că vectorul ζ are o repartiţie normală cu media vectorială $m = (m\xi, m\eta)^t$ şi cu matricea variaţională K dacă densitatea sa de repartiţie are forma

$$f\zeta(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2\sqrt{det(K)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-m\xi, y-m\eta)K^{-1}\begin{pmatrix}x-m\xi\\ y-m\eta\end{pmatrix}\right)$$

Cele prezentate mai sus se extind în cazul variabilelor aleatoare multidimensionale.

17.7.1 Exerciţii şi probleme

1. Vectorul aleator $\zeta = (\xi,\eta)$ are densitatea de repartiţie

$$f(x,y) = \frac{A}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}, x, y \in R.$$

Să se determine: a) constanta A; b) funcţia de repartiţie $F(x,y)$; c) probabilitatea ca punctul (ξ,η) să aparţină dreptunghiului $-4 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5$; d) funcţiile de repartiţie marginale; e) densităţile de repartiţie marginale.

R. a) Se găseşte A din relaţia

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}dxdy = 1$$

sau

$$\frac{A}{\pi^2}\frac{1}{4}\,arctg\frac{x}{4}\Big|_{-\infty}^{\infty} * \frac{1}{5}\,arctg\frac{y}{5}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

de unde $A = 20$. b) Funcţia de repartiţie este

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \frac{20}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{dudv}{(16+u^2)(25+v^2)} = \\ &= \left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

c) Avem

$$p(-4 \le \xi \le 4, 0 \le \eta \le 5) = \frac{20}{\pi^2} \int_{-4}^{4} \int_{0}^{5} \frac{dydx}{(16+x^2)(25+y^2)} = \frac{1}{4}.$$

d)

$$F\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dudy}{(16+u^2)(25+y^2)} = \frac{1}{\pi}\left(arctg\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$F\eta(y) = \frac{1}{\pi}\left(arctg\frac{y}{5} + \frac{\pi}{2}\right).$$

e)

$$f\xi(x) = F\xi(x)' = \frac{4}{\pi(16+x^2)}; f\eta(y) = F\eta(y)' = \frac{5}{\pi(25+y^2)}.$$

2. Vectorul aleator $\zeta = (\xi, \eta)$ este repartizat cu densitate constantă în pătratul limitat de dreptele $y = x \pm a, y = -x \pm a$. Să se determine: a) densitatea; b) densităţile marginale; c) dacă variabilele ξ, η sunt independente.

R. a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2a^2} & dac\breve{a} \quad (x,y) \in p\breve{a}tratului, \\ 0 & dac\breve{a} \quad (x,y) \notin p\breve{a}tratului. \end{cases}$$

b)

$$f\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(a-|x|) & pentru \quad |x| < a \\ 0 & pentru \quad |x| > a \end{cases}$$

$$f\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(a-|y|) & pentru \quad |y| < a \\ 0 & pentru \quad |y| > a \end{cases}$$

c) Cum $f\xi(x)f\eta(y) \ne f(x,y)$ variabilele ξ, η sunt dependente.

3. Variabila aleatoare bidimensională (ξ, η) este uniform distribuită în cercul cu centrul în origine de rază a. Să se determine: a) densitatea; b) densităţile $f\xi(x)$, $f\eta(y)$; c) densităţile $f\xi(x|\eta = y)$, $f\eta(y|\xi = x)$.

R. a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} & pentru \quad x^2+y^2 < a^2, \\ 0 & pentru \quad x^2+y^2 > a^2; \end{cases}$$

b)

$$f\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2} & pentru \quad |x| < a; \\ 0 & pentru \quad |x| > a; \end{cases}$$

$$f\eta(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2} & pentru \quad |y| < a \\ 0 & pentru \quad |y| > a; \end{cases}$$

c)

$$f\xi(x|\eta = y) = \frac{f(x,y)}{f\eta(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{a^2-y^2} & pentru \quad |y| < a, |x| < \sqrt{a^2-y^2} \\ 0 & pentru \quad |y| > a, |x| > \sqrt{a^2-y^2} \end{cases}$$

$$f\eta(y|\xi = x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} & pentru \quad |x| < a, |y| < \sqrt{a^2-x^2} \\ 0 & pentru \quad |x| > a, |y| > \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}.$$

4. Densitatea variabilei bidimensionale (ξ, η) este

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & pentru \quad x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & pentru \quad x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Să se determine matricea de covariaţie.

R. Avem

$$E(\xi) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty xf(x,y)dxdy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, E(\eta) = E(\xi),$$

$$E(\xi^2) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x^2 f(x,y)dxdy = 1, E(\eta^2) = E(\xi^2),$$

$$E(\xi\eta) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty xyf(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4}.$$

Deci

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1-\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

5. Densitatea variabilei bidimensionale (ξ, η) este

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}sin(x+y) & pentru \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & pentru \quad x \notin [0, \frac{\pi}{2}], , y \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Să se determine matricea de covariaţie.

R.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32} \\ \frac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32} & 1 \end{pmatrix}.$$

17.8 Operaţii cu variabile aleatoare.

Fie ξ o variabilă aleatoare cu densitatea $p_\xi(x)$ şi $f(\xi)$ o funcţie oarecare. Vrem să determinăm repartiţia variabilei aleatoare $\eta = f(\xi)$.

1) Fie cazul când

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } \xi \in [\mathrm{a}_1,\mathrm{b}_1] \cup [\mathrm{a}_2,\mathrm{b}_2].... \\ 0 \text{ in rest} \end{cases}.$$

Evident avem

$$\begin{aligned} p(\eta = 1) &= p(f(\xi) = 1) = p\left(\xi \in \bigcup [a_i, b_i]\right) = \\ &= \sum_i p(\xi \in [a_i, b_i]) = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} p\xi(x)dx. \end{aligned}$$

2) Fie $\eta = f(\xi)$ o funcţie crescătoare şi fie $\xi = g(\eta)$ inversa sa. Avem

$$F\eta(x) = p(f(\xi) < x) = p(\xi < g(x)).$$

Deci $F\eta(x) = \int_{-\infty}^{g(x)} p\xi(t)dt$. Cum $\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{g(x)} p\xi(t)dt = p\xi(g(x))\, g\prime(x)$ rezultă

$$F\eta(x) = \int_{-\infty}^{g(x)} p\xi(t)dt = \int_{-\infty}^{x} p(g(t))\, g\prime(t)dt.$$

Avem deci

$$p_{\eta=f(\xi)}(x) = p_\xi(g(x))\, g\prime(x).$$

De exemplu dacă ξ are densitatea $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ atunci $\eta = \xi^3$ are densitatea

$$p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^{2/3}}{2}}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

pentru că $g(x) = x^{1/3}, g\prime(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

Dacă $\eta = f(\xi)$ este descrescătoare, se vede în mod analog ca

$$p_{\eta=f(\xi)}(x) = p\xi(g(x))\,|g\prime(x)|,$$

$g(x)$ fiind şi aici inversa lui $f(x)$.

De exemplu, dacă ξ este o variabilă aleatoare cu $p(\xi > 0) = 1$ atunci variabila $\eta = \frac{1}{\xi}$ are densitatea

$$p_{\eta=\frac{1}{\xi}}(x) = \frac{1}{x^2} p_\xi \left(\frac{1}{x}\right), x > 0.$$

De asemenea are loc relaţia

$$p_{\eta=a\xi+b}(x) = \frac{1}{|a|} p_\xi \left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Dacă funcţia $\eta = f(\xi)$ nu este monotonă, dar are intervale Δ_i^+ în care creşte şi intervale Δ_i^- în care descreşte, are puncte de extremum izolate şi este derivabilă, atunci

$$p_{\eta=f(\xi)}(x) = \sum_i p\xi\left(a_i(x)\right) a\prime_i(x) - \sum_i p\xi\left(b_i(x)\right) b\prime_i(x),$$

unde $a_i(x)$ şi $b_i(x)$ sunt inversele restricţiei funcţiei $f(x)$ pe intervalele Δ_i^+, respectiv Δ_i^-.

De exemplu, dacă variabila ξ are densitatea $p\xi(x)$, atunci

$$p_{|\xi|}(x) = p_\xi(x) + p_\xi(-x), x > 0,$$

$$p_{\xi^2}(x) = \left(p_\xi(\sqrt{x}) + p_\xi(-\sqrt{x})\right) \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Dacă ξ este o variabilă aleatoare cu densitatea $p\xi(x)$, atunci variabila aleatoare

$$\eta = f(\xi) = \begin{cases} a, & \xi < a \\ \xi, & \xi \in [a,b] \\ b, & \xi > b \end{cases}$$

se numeşte *tăietura variabilei* ξ. Ea are distribuţia

$$p_\eta(x) = \int_a^b \delta(t-x)\, dt . p_\xi(x) + \delta(x-a) F_\xi(a) + \delta(x-b)\left(1 - F_\xi(b)\right).$$

Dacă ξ este o variabilă aleatoare cu densitatea $p\xi(x)$, se numeşte *variabilă secţionată* variabila η cu densitatea

$$p\eta(x) = \begin{cases} Cp\xi(x), & a < x < b \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases},$$

unde evident

$$C = \frac{1}{\int\limits_a^b p\xi(x)dx}.$$

Variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ se numesc independente în totalitate dacă oricare ar fi numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n$ are loc relaţia

$$p(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n) = p(\xi_1 < x_1) .p(\xi_2 < x_2) ...p(\xi_n < x_n) .$$

Aceasta este echivalent cu faptul că

$$\begin{aligned} & p(a_1 \le \xi_1 < b_1, a_2 \le \xi_2 < b_2, ..., a_n \le \xi_n < b_n) = \\ = \ & p(a_1 \le \xi_1 < b_1) p(a_2 \le \xi_2 < b_2) ...p(a_n \le \xi_n < b_n) \end{aligned}$$

Atunci rezultă că dacă D este un domeniu în $\mathbf{R}^n$ atunci

$$p((\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in D) = \int\limits_D p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)...p_{\xi_n}(x_n)dx_1dx_2...dx_n.$$

Fie ξ_1, ξ_2 două variabile independente cu densităţile $p_{\xi_1}(x), p_{\xi_2}(x)$ şi fie variabila sumă $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Vom avea

$$\begin{aligned} F_{\eta=\xi_1+\xi_2}(z) &= p(\xi_1 + \xi_2 < z) = \iint\limits_{x_1+x_2<z} p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2) dx_1dx_2 = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{z} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(t)p_{\xi_2}(x-t)dt \right) dx. \end{aligned}$$

Deci densitatea sumei este

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(t)p_{\xi_2}(x-t)dt = (p_{\xi_1} * p_{\xi_2})(x),$$

produsul de convoluţie al celor două densităţi. Acest lucru rezulta şi cu ajutorul funcţiei caracteristice.

De aici rezultă din aproape în aproape că dacă $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt variabile independente cu densitatea

$$p_{\xi_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

atunci suma lor este distribuită cu densitatea

$$p_{s_n=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}(x) = \lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}, x > 0,$$

aceasta fiind numită *densitatea repartiţiei Erlang.*

Să presupunem că variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sunt repartizate normal standard norm(0,1) şi că sunt independente. Să arătăm că variabila

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2$$

are aşa numita *repartiţie hi pătrat* cu n grade de libertate notată $chisq(n)$, adică

$$p(\chi_n^2 < x) = G_n(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x < 0 \\ \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int\limits_0^x t^{n/2-1}e^{-t/2}dt & pentru \quad x > 0, \end{cases}$$

unde

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy.$$

Vom demonstra prin inducţie matematică. Pentru $n = 1$ avem $\chi_1^2 = \xi_1^2$. Cum funcţia de repartiţie a lui ξ_1 este $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ rezultă că $\chi_1^2 = \xi_1^2$ are funcţia de repartiţie pentru $x > 0$

$$G_1(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Cum

$$g_1(x) = G_1'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}x^{-1/2}e^{-x/2}$$

proprietatea se verifică. Presupunem proprietatea adevărată pentru $n-1$, adică pentru $x > 0$ avem

$$g_{n-1}(x) = G_{n-1}'(x) = \frac{1}{2^{(n-1)/2}\Gamma((n-1)/2)}x^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{x}{2}}.$$

Cum $\chi_n^2 = \chi_{n-1}^2 + \chi_1^2$ rezultă că

$$g_n(x) = g_{n-1}(x) * g_1(x) = \int\limits_0^x g_{n-1}(t)g_1(x-t)dt =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x t^{\frac{n-3}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt \overset{t=x\tau, d\tau=xdt}{=}$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-2}{2}}}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_0^1 \tau^{\frac{n-1}{2}-1}(1-\tau)^{\frac{1}{2}-1} d\tau =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-2}{2}} B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}$$

pentru că

$$B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Funcţia caracteristică a repartiţiei $chisq(n)$ este

$$\varphi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}.$$

Vom putea calcula momentele repartiţiei hi pătrat

$$\nu_r = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^\infty x^{\frac{n+2r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \overset{x=2t}{=} \frac{2^{\frac{n}{2}+r}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^\infty t^{\frac{n}{2}+r-1} e^{-t} dt =$$

$$= \frac{2^r}{\Gamma(\frac{n}{2})}\Gamma(\frac{n}{2}+r).$$

In particular

$$\nu_1 = \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})}\Gamma(\frac{n}{2}+1) = 2\frac{n}{2}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = n,$$

$$\nu_2 = \frac{2^2}{\Gamma(\frac{n}{2})}\Gamma(\frac{n}{2}+2) = \frac{2^2(\frac{n}{2}+1)\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = n(n+2).$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} E(\chi_n^2) &= n, \\ var(\chi_n^2) &= 2n. \end{aligned}$$

Dacă se fac graficele densităţii de repartiţie a lui χ_n^2 se constată că pentru n mic graficele au o coadă spre dreapta, iar pentru n mare devin aproape simetrice. Uneori aceste curbe se numesc *curbele lui Pearson*.

Fie acum variabilele U, V independente astfel că $U \in norm(0,1)$ şi $V \in chisq(n)$. Se poate arăta că variabile $T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}} = U\sqrt{\frac{n}{V}}$ are densitatea

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Această repartiţie se numeşte *repartiţia Student* cu n grade de libertate şi se notează cu $t(n)$. Densitatea ei de repartiţie este simetrică în raport cu axa ordonatelor şi deci $E(T) = 0$. Dispersia ei este $var(T) = \frac{n}{n-2}$. Se poate arăta că pentru $n > 30$ practic repartiţia $t(n)$ coincide cu repartiţia normală standard $norm(0,1)$.

17.9 Estimaţii punctuale

In multe cazuri funcţia de distribuţie a unei variabile aleatoare ξ este necunoscută; ea se determină pe baza rezultatelor observaţiilor sau, cum se mai spune, pe baza unei *selecţii* sau a unui *eşantion.*

Prin *selecţie sau eşantion de volum* n al variabilei aleatoare ξ se înţelege o mulţime de n observaţii independente $X_1, X_2, ..., X_n$ ale variabilei aleatoare ξ, sau altfel spus, o mulţime de n variabile aleatoare independente $X_1, X_2, ..., X_n$ care au aceeaşi funcţie de repartiţie $F\xi(x)$ ca şi variabila aleatoare ξ. Obţinerea rezultatelor $x_1, x_2, ..., x_n$ ale celor n observaţii independente se numeşte *sondaj.* Pentru a nu complica notaţia, de multe ori vom nota tot prin $X_1, X_2, ..., X_n$ şi rezultatele celor n observaţii. Conform acestei convenţii pâna la efectuarea sondajului prin $X_1, X_2, ..., X_n$ notăm cele n observaţii ale variabilei aleatoare ξ, iar după efectuarea sondajului acestea devin rezultatele observaţiilor. Mulţimea tuturor observaţiilor posibile ale variabilei aleatoare ξ formează *populaţia generală a variabilei aleatoare* ξ. Se mai spune că eşantionul $X_1, X_2, ..., X_n$ a fost extras din *populaţia generală cu funcţia de repartiţie* $F\xi(x)$.

Pentru a determina funcţia de repartiţie $F\xi(x)$, adică probabilitatea evenimentului $\{\xi < x\}$ vom încerca să evaluăm această probabilitatea prin frecvenţa de realizare a acestui eveniment. Fie $X_1, X_2, ..., X_n$ o selecţie de volum n a lui ξ, $x_1, x_2, ..., x_n$ rezultatele unui sondaj şi x un număr real. Vom nota prin ν_x numărul rezultatelor mai mici ca x. Atunci $\frac{\nu_x}{n}$ este frecvenţa de realizare a evenimentului $\{\xi < x\}$ sau *funcţia empirică de reparti*ţie $F\xi^n(x) = \frac{\nu_x}{n}$ a variabilei ξ în selecţia dată. Funcţia $F\xi^n(x)$ are toate proprietăţile unei veritabile funcţii de repartiţie, fiind o funcţie în trepte. Pentru un x fixat funcţia empirică de repartiţie poate fi considerată ca o variabilă aleatoare - frecvenţa relativă în n realizări a unui eveniment cu probabilitatea $F\xi(x)$.Valorile acestei variabile fiind $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}$ avem

$$M(F\xi^n(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k \left(F\xi(x)\right)^k \left(1 - F\xi(x)\right)^{n-k} = F\xi(x).$$

Conform legii numerelor mari a lui Bernoulli, pentru x fixat $F\xi^*(x) \xrightarrow{p} F\xi(x)$. Deci pentru n mare avem o evaluare a funcţiei de repartiţie $F\xi(x)$ a variabilei ξ. Este însă evident că procedeul este destul de incomod în practică.

De multe ori, în practică se ştie că funcţia de repartiţie $F\xi(x)$ respectiv densitatea de repartiţie $p\xi(x)$ aparţine unei anumite clase şi că depinde de unul sau mai mulţi parametri: $F\xi(x) = F(x, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$, $p\xi(x) = p(x, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ şi problema revine la determinarea unor estimaţii ale acestor parametri $\lambda_1^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\lambda_2^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, ..., $\lambda_k^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ pe baza rezultatelor $x_1, x_2, ..., x_n$ ale selecţiei. Acestea se numesc *estimaţii punctuale* ale parametrilor. Până la realizarea sondajului funcţiile $\lambda_1^*(X_1, X_2, ..., X_n)$, $\lambda_2^*(X_1, X_2, ..., X_n)$, ..., $\lambda_k^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ sunt de fapt variabile aleatoare care depind de selecţie.

O funcţie oarecare $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ care depinde de o selecţie se numeşte uneori *statistică*. Cu această denumire, o estimaţie punctuală a unui parametru este o statistică a cărei valoare la realizarea sondajului dă o aproximaţie a parametrului. Evident, odată determinată o estimaţie a parametrului trebuie stabilită precizia acelei estimaţii.

Dacă ξ este o variabilă aleatoare cu valori discrete cu densitatea de repartiţie $p\xi(x) = p(x; \lambda)$ atunci probabilitatea ca o selecţie să ia valorile $x_1, x_2, ..., x_n$ este

$$\begin{aligned} p(X_1 &= x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = p(x_1; \lambda)p(x_2; \lambda)...p(x_n; \lambda) = \\ &= L(x_1, x_2, ...x_n; \lambda). \end{aligned}$$

Dacă ξ este o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de repartiţie $p\xi(x) = p(x; \lambda)$ atunci probabilitatea ca o selecţie să ia valori cuprnse între x_1 şi $x_1 + dx_1$, x_2 şi $x_2 + dx_2$, ... x_n şi $x_n + dx_n$ este

$$p(x_1 \leq X_1 \leq x_1 + dx_1, x_2 \leq X_2 \leq x_2 + dx_2, ..., x_n \leq X_n \leq x_n + dx_n) =$$

$$= p(x_1; \lambda)p(x_2; \lambda)...p(x_n; \lambda)dx_1 dx_2...dx_n = L(x_1, x_2, ...x_n; \lambda)dx_1 dx_2...dx_n.$$

Funcţia $L(x_1, x_2, ...x_n; \lambda)$ definită mai sus se numeşte *funcţia de verosimilitate a selecţiei. Func*ţia $l(x_1, x_2, ...x_n; \lambda) = lnL(x_1, x_2, ...x_n; \lambda)$ se numeşte *funcţia de log-verosimilitate a selecţiei.*

Definiţia 1. O statistică $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ se numeşte *suficientă* pentru o variabilă aleatoare a cărei repartiţie depinde de un parametru (poate fi şi un vector) λ dacă toată informaţia referitoare la parametrul λ în selecţia $X_1, X_2, ..., X_n$ coincide cu informaţia referitoare la λ în statistica $T(X_1, X_2, ..., X_n)$, cu alte cuvinte

$$p\xi(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n | T(x_1, x_2..., x_n) = t)$$

nu depinde de parametrul λ.

Are loc aşa numita *teoremă de factorizare*

Teorema 1. Statistica $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ este suficientă dacă şi numai dacă există o funcţie $g(t; \lambda)$ şi o funcţie $h(x_1, x_2, ..., x_n)$ astfel că

$$L(x_1, x_2, ...x_n; \lambda) = g(T(x_1, x_2, ..., x_n); \lambda)h(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Exemplul 1. Fie $\xi \in binom(a, \sigma_0^2)$ unde σ_0^2 este dat şi a este necunoscut. Funcţia de verosimilitate este

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, ..., x_n; a) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^n (x_i^2 - 2ax_i + a^2)} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(na^2 - 2a\sum\limits_{i=1}^n x_i + \sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)} \end{aligned}$$

de unde rezultă că o statistică suficientă în raport cu parametrul a este suma selecţiei $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ sau orice altă funcţie depinzând de aceasta.

Exemplul 2. Dacă $\xi \in norm(a_0, \sigma^2)$ cu a_0 cunoscut şi σ^2 necunoscut, din expresia de mai sus resultă că o statistică suficientă în raport cu σ^2 este $2a_0 \sum\limits_{i=1}^n X_i - \sum\limits_{i=1}^n X_i^2$ sau orice altă funcţie depinzând de aceasta.

Exemplul 3. Dacă $\xi \in norm(a, \sigma^2)$ cu a şi σ^2 necunoscuţi atunci o statistică suficientă pentru (a, σ^2) este (T_1, T_2) cu $T_1 = \sum\limits_{i=1}^n X_i$, $T_2 = \sum\limits_{i=1}^n X_i^2$ sau orice altă funcţie vectorială depinzând de aceasta.

Definiţia 2: Estimaţia $\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ a parametrului λ se numeşte *corectă sau nedeplasată* dacă media sa este egală cu valoarea parametrului λ, adică

$$E\left(\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n)\right) = \lambda.$$

In caz contrar estimaţia se numeşte *incorectă sau deplasată*.

Estimaţia $\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ a parametrului λ este corectă dacă

$$E\left(\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n)\right) =$$

$$= \int \lambda^*(x_1, x_2, ..., x_n)L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)dx_1dx_2....dx_n = \lambda$$

Definiţia 3: Estimaţia corectă $\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ a parametrului λ este *mai eficientă* decât estimaţia $\lambda^{**}(X_1, X_2, ..., X_n)$ dacă are loc relaţia

$$E\left((\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n) - \lambda)^2\right) < E\left((\lambda^{**}(X_1, X_2, ..., X_n) - \lambda)^2\right),$$

adică dacă dispersia primeia este mai mică decât dispersia celei de-a doua.

Definiţia 4: Dacă mulţimea numerelor $E\left(\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n) - \lambda\right)^2$ are margine inferioară în raport cu toate estimaţiile posibile $\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n)$, acea estimaţie pe care se atinge acea margine inferioară se numeşte *estimaţie eficientă*.

Definiţia 5: O estimaţie $\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ a parametrului λ pentru care are loc relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E\left(\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n) - \lambda\right)^2}{\inf\limits_{\lambda^*} E\left(\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n) - \lambda\right)^2} = 1$$

se numeşte *estimaţie asimptotic eficientă*.

Definiţia 6: O estimaţie $\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ a parametrului λ care tinde în probabilitate către λ când n tinde către infinit se numeşte *consistentă*.

Conform legii numerelor mari

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = E(\xi)$$

adică

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \overline{X}$$

este o estimaţie consistentă a lui $E(\xi)$. Evident ea este şi o estimaţie corectă a lui $E(\xi)$. Această estimaţie se numeşte *media selecţiei*.

Să considerăm acum *dispersia selecţiei*

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2.$$

Notând $m = E(\xi)$ se poate scrie

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[(X_k - m) - \left(\overline{X} - m\right)\right]^2 = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2 - \frac{2}{n}\left(\overline{X} - m\right)\sum_{k=1}^{n}(X_k - m) + \frac{n}{n}\left(\overline{X} - m\right)^2 = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2 - \frac{2}{n}\left(\overline{X} - m\right) n \left(\overline{X} - m\right) + \frac{n}{n}\left(\overline{X} - m\right)^2 = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)^2 - \left(\overline{X} - m\right)^2 \end{aligned}$$

Conform legii numerelor mari,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2 \xrightarrow{p} E(\xi-m)^2=\sigma^2(\xi).$$

Al doilea termen tinde în probabilitate către zero pentru că

$$p\left(\left(\overline{X}-m\right)^2>\varepsilon\right)=p\left(\left|\overline{X}-m\right|>\sqrt{\varepsilon}\right)\to 0.$$

Rezultă că $S^2 \xrightarrow{p} \sigma^2(\xi)$, adică dispersia selecţiei este o estimaţie consistentă pentru dispersia variabilei aleatoare. Cum

$$\begin{aligned} E\left(S^2\right) &= \frac{1}{n}E\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2\right)-E\left(\overline{(X-m)^2}\right)=\frac{1}{n}n\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2= \\ &= \frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2 \end{aligned}$$

rezultă că dispersia selecţiei este o estimaţie incorectă a dispersiei variabilei aleatoare. Este însă evident că aşa numita *dispersie modificată a selecţiei*

$$S^{*2}=\frac{n}{n-1}S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$$

este o estimaţie corectă şi consistentă a dispersiei variabilei aleatoare.

Fie λ un parametru de care depinde funcţia de distribuţie $F\xi(x,\lambda)$. Presupunem că este finit momentul $m_1(\lambda)=\int xdF\xi(x,\lambda)$ şi că ecuaţia $m_1(\lambda)=z$ are soluţie unică pentru orice z. Media selecţiei

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$$

este funcţie de valorile selecţiei. Egalând momentul teoretic cu momentul empiric obţinem ecuaţia $m_1(\lambda)=\overline{X}$. Soluţia $\widehat{\lambda}$ a acestei ecuaţii este o posibilă estimaţie a parametrului λ. Dacă există mai mulţi parametrii, atunci se vor egala mai multe momente teoretice cu momentele corespunzătoare ale selecţiei. Această metodă de determinare a estimaţiilor parametrilor se numeşte *metoda momentelor sau metoda lui K.Pearson.* Ea se bazează pe faptul ca momentele selecţiei tind în probabilitate către momentele teoretice de acelaşi ordin.

Exemplul 4. Se ştie că variabila aleatoare ξ este distribuită uniform într-un interval $[a,b]$ necunoscut. Fie $(X_1,X_2,...,X_n)$ o selecţie. Vrem să determinăm estimaţiile punctuale $a^*(X_1,X_2,...,X_n)$, $b^*(X_1,X_2,....,X_n)$ pentru capetele intervalului a,b. Primele două momente teoretice ale lui ξ se vor egala cu momentele corespunzătoare ale selecţiei

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\\ \frac{a^2+ab+b^2}{3} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\end{aligned}$$

din care deducem estimaţiile punctuale

$$\begin{aligned}a^* &= \overline{X} - S\sqrt{3},\\ b^* &= \overline{X} + S\sqrt{3},\end{aligned}$$

cu notaţiile de mai înainte.

Exemplul 5. Variabila aleatoare $\xi \in gamma(\lambda)$, adică are densitatea de repartiţie $p\xi(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-x}, x > 0$. Să gasim o estimaţie punctuală a parametrului de formă λ pe baza unei selecţii prin metoda momentelor. Vom avea

$$M(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x.x^{\lambda-1}e^{-x}dx = \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X},$$

deci estimaţia este $\lambda^* = \overline{X}$.

O altă metodă de determinare a estimaţiilor punctuale ale parametrilor se bazează pe faptul că se alege estimaţia λ^* pentru care probabilitatea de realizare a selecţiei $X_1, X_2, ..., X_n$ să fie maximă. Cum probabilitatea de realizare a selecţiei este verosimiltatea $L(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda)$, o asemenea estimaţie se numeşte *estimaţie de verosimilitate maximă (EVM).*

Estimaţia λ^* de verosimilitate maximă se obţine din rezolvarea ecuaţiei

$$\frac{\partial L(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

sau a ecuaţiei uneori mai simple

$$\frac{\partial \ln L(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

In cazul mai multor parametri condiţia de verosimilitate maximă conţine atâtea ecuaţii câţi parametri.

Se poate arăta că în metoda verosimilităţii maxime

- ecuaţia obţinută are o soluţie care este o estimaţie consistentă pentru λ;
- soluţia este distribuită la limită asimptotic normal, adică pentru o normare corespunzătoare distribuţia limită este normală;
- dacă pentru λ există o estimaţie eficientă, atunci metoda verosimilităţii maxime dă această estimaţie.

In legătură cu ultima proprietate are loc aşa numita teoremă a lui Rao-Cramer:

Teorema 2. Dacă $\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ este o estimaţie corectă eficientă a parametrului λ din densitatea de repartiţie $p\xi(x, \lambda)$ a variabilei aleatoare ξ atunci dispersia sa este

$$\mathrm{var}(\lambda^*(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{1}{I_n}$$

unde I_n este *informaţia lui Fisher* dată de

$$I_n = nM\left[\left(\frac{\partial \ln p\xi(\xi, \lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right] = -nM\left[\left(\frac{\partial^2 \ln p\xi(\xi, \lambda)}{\partial \lambda^2}\right)\right]$$

sau

$$I_n = n\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \ln p\xi(x, \lambda)}{\partial \lambda}\right)^2 p\xi(x, \lambda)dx.$$

In cazul variabilelor discrete integrala se înlocuieşte prin seria corespunzătoare.

Exemplul 6. Se repetă de n ori o experienţă cu două rezultate posibile: succesul cu probabilitatea necunoscută p şi insuccesul cu probabilitatea $q = 1 - p$. Succesul apare de m ori. Funcţia de verosimilitate este

$$\begin{aligned} L(X_1, X_2, ..., X_n, p) &= p^m(1-p)^{n-m}, \\ l(X_1, X_2, ..., X_n, p) &= m\ln p + (n-m)\ln(1-p). \end{aligned}$$

Vom putea scrie

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p} = 0.$$

Obţinem astfel estimaţia de verosimilitate maximă pentru probabilitatea p: $p^*(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{m}{n}$, adică tocmai frecvenţa de realizare a succesului în cele n repetări. Acestă frecvenţă este o estimaţie nedeplasată a lui p pentru că $E(\frac{m}{n}) = p$, este o estimaţie consistentă pentru că după legea numerelor mare a lui Bernoulli avem $\frac{m}{n} \xrightarrow{p} p$ când $n \to \infty$. In plus după legea lui Moivre-Laplace, frecvenţa este o estimaţie asimptotic normală. Avem succesiv

$$\operatorname{var}(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n^2}\operatorname{var}(m) = \frac{pq}{n^2},$$

$$p\xi(m,p) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

$$\ln p\xi(m,p) = \ln C_n^m + n\ln p + (n-m)\ln(1-p),$$

$$\frac{\partial \ln p\xi}{\partial p} = \frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p}, \frac{\partial^2 \ln p\xi}{\partial p^2} = -\frac{m}{p^2} - \frac{n-m}{(1-p)^2}$$

Deci

$$\begin{aligned} I_n &= n\sum_{=0}^{n}\left(\frac{m}{p^2} + \frac{n-m}{(1-p)^2}\right) C_n^m p^m q^{n-m} = \\ &= n\left(\frac{np}{p^2} + \frac{n}{q^2} - \frac{np}{q^2}\right) = \frac{n^2}{pq}, \end{aligned}$$

adică se verifică $\operatorname{var}(\frac{m}{n}) = \frac{1}{I_n}$ şi deci frecvenţa relativă este o estimaţie eficientă.

Exemplul 7. Pentru a obţine estimaţii ale parametrilor a şi σ din legea normală scriem funcţia de verosimilitate

$$L(X, X, ..., X, a, \sigma) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}$$

de unde

$$l = \ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 .$$

Derivând în raport cu a şi cu σ^2 obţinem sistemul

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a) = 0,$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 = 0,$$

de unde obţinem estimaţiile de verosimilitate maximă

$$a^* = \widehat{a}(X_1, X_2, ..., X_n) = \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n},$$

$$\sigma^{*2} = \widehat{\sigma}^2(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = S^2.$$

Acestea coincid cu estimaţiile obţinute prin metoda momentelor. Aşa cum s-a spus, ambele sunt consistente, prima este nedeplasată, a doua este deplasată.

17.10 Intervale de încredere

A stabili un *interval de încredere* pentru parametrul λ însemnă să determinăm două statistici $\lambda_1(X_1, X_2, ..., X_n, \alpha)$, $\lambda_2(X_1, X_2, ..., X_n, \alpha)$ asfel încât

$$p(\lambda_1(X_1, X_2, ..., X_n, \alpha) < \lambda < \lambda_2(X_1, X_2, ..., X_n, \alpha)) = 1 - \alpha.$$

Numărul $1 - \alpha$ se numeşte *coeficient de încredere* şi se exprimă uneori în procente de $(1-\alpha)100$. Numărul α sau $\alpha 100\%$ se numeşte *nivel de semnificaţie sau eroarea cu care se determină intervalul de încredere.* Intervalul de încredere este aleator de la o selecţie la alta, dar după realizarea unui sondaj capetele intervalului au valori determinate.

Se poate stabili un interval de încredere pentru parametrul λ dacă există o statistică $T(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda)$ continuă şi monotonă în λ şi cărei densitate de probabilitate nu depinde de λ. In adevăr dacă presupunem că statistica $T(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda)$ este crescătoare în funcţie de λ şi $P(x)$, $Q(p)$ sunt funcţia cumulativă de probabilitate respectiv funcţia inversă cumulativă şi p_1, p_2 sunt două numere, atunci relaţia $p(T(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda) \geq t_1) \geq p_1$ este echivalentă cu relaţia $\lambda \geq \lambda_1(X, X, ..., X, t_1)$ unde $t_1 = Q(p_1)$ şi $\lambda_1(X, X, ..., X, t_1)$ este soluţia ecuaţiei în $\lambda : T(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda) = t_1$. La fel relaţia $p(T(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda) \leq t_2) \leq p_2$ este echivalentă cu relaţia $\lambda \leq \lambda_2(X_1, X_2, ..., X_n, t_2)$ unde $t_2 = Q(p_2)$ şi $\lambda_2(X_1, X_2, ..., X_n, t_2)$ este soluţia ecuaţiei în $\lambda : T(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda) = t_2$. Atunci relaţia

$$p(t_1 \leq T(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda) \leq t_2) = p_2 - p_1$$

este echivalentă cu relaţia

$$\lambda_1(X_1, X_2, ..., X_n, t_1) \leq \lambda \leq \lambda_2(X_1, X_2, ..., X_n, t_1).$$

Alegând $p_2 - p_1 = 1 - \alpha$ găsim un interval de încredere pentru parametru λ cu nivelul de semnificaţie α.

Statistica $T(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda)$ se poate determina prin aşa numitul *principiu al raportului de verosimilitate.* Să presupunem că funcţia de repartiţie a populaţiei depinde de un singur parametru λ. Considerăm raportul

$$r(X_1, X_2, ..., X_n; \lambda) = \frac{L(X_1, X_2, ..., X_n; \lambda)}{\max\limits_{\lambda} L(X_1, X_2, ..., X_n; \lambda)},$$

$L(X_1, X_2, ..., X_n; \lambda)$ fiind funcţia de verosimilitate. Maximul de la numitor se atinge pentru estimaţia lui λ de verosimilitate maximă λ^*. Este evident că valoarea raportului este cuprinsă între 0 şi 1. Cu cât acest raport este mai apropiat de 1 cu atât este valoarea lui λ este mai apropiată de λ^*. Deci vom putea găsi intervale de încredere scriind

$$p(r(X_1, X_2, ..., X_n; \lambda) > c\alpha) = 1 - \alpha.$$

Exemplul 1. Interval de încredere pentru media unei variabile aleatoare $\xi \in norm(a, \sigma_0)$ cu σ_0 cunoscut.

Funcţia de verosimilitate este

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum(X_i - a)^2}$$

de unde funcţia de log-verosimilitate

$$l = n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\right) - \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum(X_i - a)^2.$$

Cum

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum(X_i - a) = 0$$

rezultă că estimaţia de verosimilitate maximă a lui a este

$$a^* = \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}.$$

Valoarea funcţiei de verosimilitate pe aceasta este

$$L^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum(X_i - \overline{X})^2}$$

şi deci

$$r = \frac{L}{L^*} = e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left[\sum(X_i - a)^2 - \sum(X_i - \overline{X})^2\right]} = e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\overline{X} - a)^2 n}.$$

Inegalitatea $r > c\alpha$ este echivalentă cu inegalitatea

$$\left|\frac{(\overline{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma_0}\right| < \sqrt{-2\ln c\alpha} = c\alpha'$$

Statistica

$$T(X_1, X_2, ..., X_n, a) = \frac{(\overline{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma_0} \in norm(0, 1)$$

este o variabilă normală standard. Ea este descrescătoare în a.

Vom avea

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= p\left(\left|\frac{(\overline{X}-a)\sqrt{n}}{\sigma_0}\right| < c\alpha'\right) = pnorm(c\alpha',0,1) - pnorm(-c\alpha',0,1) = \\ &= -1 + 2pnorm(c\alpha',0,1) \end{aligned}$$

adică $pnorm(c\alpha',0,1) = 1-\frac{\alpha}{2}$ sau $c\alpha' = qnorm(1-\frac{\alpha}{2},0,1)$. Rezultă intervalul de încredere

$$\overline{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}qnorm(1-\frac{\alpha}{2},0,1) \le a \le \overline{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}qnorm(1-\frac{\alpha}{2},0,1).$$

Exemplul 2. Interval de încredere pentru media unei variabile aleatoare normale $\xi \in norm(a,\sigma)$ când nu se cunoaşte σ.

Vom considera raportul

$$r = \frac{\max\limits_{\sigma} L(X_1, X_2, ..., X_n; a, \sigma)}{\max\limits_{a,\sigma} L(X_1, X_2, ..., X_n; a, \sigma)}.$$

Se găseşte

$$r = \left(\frac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{\sum(X_i-a)^2}\right)^{n/2}.$$

Inegalitatea $r > c\alpha$ este echivalentă cu inegalităţile

$$\frac{\sum(X_i-a)^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2} < \left(\frac{1}{c\alpha}\right)^{2/n}$$

sau

$$\frac{\sum(X_i-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-a)^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2} < \left(\frac{1}{c\alpha}\right)^{2/n}$$

sau

$$\frac{(n-1)n(\overline{X}-a)^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2} < (n-1)\left(\left(\frac{1}{c\alpha}\right)^{2/n} - 1\right)$$

sau

$$\left|\sqrt{n-1}\frac{\overline{X}-a}{S}\right| < \sqrt{(n-1)\left(\left(\frac{1}{c\alpha}\right)^{2/n} - 1\right)} = c\alpha'.$$

Am notat

$$S^2 = \frac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{n}$$

dispersia de selecţie.

Se poate arăta că variabila $V = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ are o repartiţie $chisq(n-1)$. Ar trebui să se înţeleagă acest lucru din cauză că $\sum(X_i - \overline{X}) = 0$. Variabila $U = \frac{\overline{X}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ satisface relaţiile $E(U) = 0$, $cov(U) = 1$ adică $U \in norm(0,1)$. Deci variabila

$$T = U\sqrt{\frac{n-1}{V}} = \frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sqrt{n}\sqrt{n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}S} = \sqrt{n-1}\frac{\overline{X}-a}{S}$$

este de tipul $t(n-1)$ cu densitatea de repartiţie $dt(x, n-1)$, cu funcţia cumulativă $pt(x, n-1)$ şi cu funcţia inversă cumulativă este $qt(p, n-1)$.

Avem

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= p\left(\left|\sqrt{n-1}\frac{\overline{X}-a}{S}\right| < c\alpha'\right) = pt(c\alpha', n-1) - pt(-c\alpha', n-1) = \\ &= -1 + 2pt(c\alpha', n-1) \end{aligned}$$

şi deci $1 - \frac{\alpha}{2} = pt(c\alpha')$ sau $c\alpha' = qt(1-\frac{\alpha}{2})$. Rezultă intervalul de încredere

$$\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n-1}}qt(1-\frac{\alpha}{2}, n-1) \leq a \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n-1}}qt(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)$$

Exemplul 3. Interval de încredere pentru dispersia σ^2a unei variabile $\xi \in norm(a, \sigma)$. Am văzut că statistica

$$T = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \in chisq(n-1)$$

este o variabilă aleatoare de aşa numitul tip *hi-pătrat cu n-1 grade de libertate*. Densitatea de repartiţie a acestei variabile este

$$dchisq(x, n-1) = \frac{1}{2\Gamma(\frac{n-1}{2})}exp(-\frac{x}{2})\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}, x > 0.$$

Funcţia cumulativă este $pchisq(x, n-1)$, iar funcţia inversă cumulativă este $qchisq(p, n-1)$.

Procedând ca mai sus găsim intervalul de încredere

$$\frac{(n-1)S^{*2}}{t_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^{*2}}{t_1}$$

unde

$$\begin{aligned} t_1 &= qchisq(\frac{\alpha}{2}, n-1), \\ t_2 &= qchisq(1-\frac{\alpha}{2}, n-1). \end{aligned}$$

Exemplul 4. Interval de încredere pentru parametrul λ pentru $\xi \in exp(\frac{1}{\lambda})$. Se arată că în cazul unei selecţii a unei asemenea variabile, statistica

$$T = \frac{2}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} X_k \in chisq(2n),$$

este de tipul hi-pătrat cu 2n grade de libertate. Rezultă intervalul de încredere

$$\frac{2\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{t_2} < \lambda < \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}{t_1}$$

unde

$$\begin{aligned} t_2 &= qchisq(1-\frac{\alpha}{2}, 2n), \\ t_1 &= qchisq(\frac{\alpha}{2}, 2n). \end{aligned}$$

17.10.1 Exerciţii şi probleme

1. O selecţie de volum $n = 20$ a unei variabile normale despre care se ştie că are $\sigma = 2$ dă o medie de selecţie $\overline{X} = 4.2$. Să determinăm un interval de încredere pentru media variabilei cu coeficientul de încredere 95%.

R. Avem $\alpha = 0.05$. Găsim $t = qnorm(1-0.025, 0, 1) = 1.96$. $\overline{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.323$, $\overline{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5.077$. Deci pentru media variabilei se poate lua orice valoare din intervalul $(3.323, 5.077)$ cu o probabilitate foarte mare egală cu 0.95.

2. O selecţie de volum $n = 10$ ale unei populaţii normale este

$$3.1, 3.3, 2.9, 3.3, 3.1, 3.2, 2.9, 2.9, 3.1, 3.2.$$

Să se găsească un interval de încredere pentru media acestei populaţii la un nivel de 2%.

R. Avem

$$mean(X) = 3.1, var(X) = 0.022, S = \sqrt{var(X)} = 0.148,$$

$$mean(X) - qt(1-0.01, 9)\frac{S}{\sqrt{N-1}} = 2.961,$$

$$mean(X) + qt(1-0.01, 9)\frac{S}{\sqrt{N-1}} = 3.239.$$

Deci găsim intervalul de încredere $(2.961, 3.239)$ la nivelul de semnificaţie de 2%.

3. Cu datele din exerciţiul precedent să se determine un interval de încredere pentru σ^2 cu nivelul de semnificaţie de 2%.

R. Avem

$t_2 = qchisq(1 - 0.01, 9) = 21.666$, $t_1 = qchisq(0.01, 9) = 2.088$,
$\frac{(n-1)S^{*2}}{t_1} = 0.105369$, $\frac{(n-1)S^{*2}}{t_2} = 0.010154$.

Deci găsim intervalul de încredere $(0.010154, 0.105369)$.

4. Timpul de funcţionare pâna la defectare al unor dispozitive electronice are o repartiţie exponenţială $exp(\frac{1}{\lambda})$. Se măsoară timpul de funcţionare până la defectare a 12 astfel de dispozitive şi se găseşte durata lor totală de funcţionare $\sum_{k=1}^{n} X_k = 800$ ore. Să se determine cu un nivel de semnificaţie de 10% un interval de încredere pentru parametrul repartiţiei.

Cum

$t_1 = qchisq(0.05, 24) = 13.848$, $t_2 = qchisq(1 - 0.05, 24) = 36.415$,
$\frac{1600}{t_2} = 43.938$, $\frac{1600}{t_1} = 115.537$,
rezultă intervalul de încredere (43.938,115.537).

17.11 Verificarea ipotezelor statistice

Fie ξ o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie $F(x;\lambda)$ unde λ este un parametru scalar sau vectorial care aparţine unei mulţimi Λ. Vom numi *ipoteză statistică* orice presupunere privind funcţia de repartiţie. Metodele de verificare a ipotezelor statistice se vor numi *teste statistice*.

Fie Λ_0, Λ_1 o partiţie a mulţimii Λ, adică $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1$, $\Lambda_0 \cap \Lambda_1 = \emptyset$. O ipoteză statistică poate fi ipoteza că parametrul λ aparţine mulţimii Λ_0, $\lambda \in \Lambda_0$. Aceasta se notează $H_0 : \lambda \in \Lambda_0$ şi se numeşte *ipoteza nulă*. Ipoteza $H_1 : \lambda \in \Lambda_1$ se numeşte *ipoteza alternativă*. Cauza separării ipotezei nule este aceea că în mod obişnuit aceasta este o afirmaţie care în problema dată este mai important să fie respinsă decât admisă. Respingerea unei ipoteze se face pe baza principiului că o ipoteză trebuie respinsă dacă există un exemplu care o contrazice, dar nu este obligatoriu să fie admisă dacă nu există un asemenea exemplu. Vom spune că o ipoteză este acceptată dacă nu există motive ca ea să fie respinsă.

Fie S mulţimea valorilor variabilei aleatoare ξ. Atunci S^n este mulţimea valorilor selecţiilor de volum n din populaţia variabilei aleatoare ξ. O submulţime D_c a lui S^n se numeşte *regiune critică pentru ipoteza* H_0 dacă decidem să respingem ipoteza H_0 când valorile unei selecţii cad în mulţimea D_c şi acceptăm ipoteza H_0 dacă valorile selecţiei nu aparţin mulţimii D_c. In mod obişnuit un test statistic înseamnă găsirea unei statistici $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ astfel încât dacă selecţia $X_1, X_2, ..., X_n$ aparţine regiunii critice atunci şi numai atunci valorile statisticii aparţin unei anumite mulţimi. Şi această mulţime poate fi numită regiune critică. Statistica $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ se numeşte *statistica testului.*

Verificarea ipotezelor statistice făcându-se pe baza selecţiilor aleatoare există riscul apariţiilor erorilor. Pentru un test bazat pe o regiune critică D_c există *eroarea de prima speţă* care constă în respingerea ipotezei H_0 cu toate că ea este adevărată şi *eroarea de a două speţă* care constă în acceptarea ipotezei H_0 deşi ea este falsă. Aceste erori pot fi evaluate prin probabilităţile lor

$$\alpha = prob(respinge\ H_0\ când\ H_0\ este\ adevărată),$$

$$\beta = prob(acceptă\ H_0\ când\ H_0\ este\ falsă.$$

Evident, trebuie să avem α, β cât mai mici posibile. Putem scrie

$$1 - \alpha = prob(acceptă\ H_0\ când\ H_0\ este\ falsă),$$

$$1 - \beta = prob(respinge\ H_0\ când\ H_0\ este\ falsă).$$

Acestea ar trebui să fie cât mai mari. Dar nu este posibil să facem simultan cât mai mici şi α şi β.

Este clar că putem scrie

$$\alpha = prob((X_1, X_2, ..., X_n) \in D_c\ când\ H_0\ este\ adevărată),$$

$$1 - \beta = prob((X_1, X_2, ..., X_n) \in D_c\ când\ H_1\ este\ adevărată).$$

Probabilitatea $1 - \alpha$ se numeşte *coeficient de încredere*, α se numeşte *nivel de semnificaţie*, iar probabilitatea $1 - \beta$ se numeşte *puterea de testare.*

O ipoteză statistică H_0 se numeşte *simplă* dacă mulţimea Λ_0 este compusă dintr-un singur punct. O ipoteză se numeşte *compusă* dacă nu este simplă.

Are loc *lema lui Neyman-Pearson.*

Lema lui Neyman-Pearson. Dacă $H_0 : \lambda = \lambda_0$ este o ipoteză simplă cu alternativa simplă $H_1 : \lambda = \lambda_1$ atunci există o *cea mai bună regiune critică* D_c^* de nivel α definită prin

$$\begin{aligned} D_c^* &= \left\{ (X_1, X_2, ..., X_n) | \frac{L(X_1, X_2, ..., X_n; \lambda_0)}{L(X_1, X_2, ..., X_n; \lambda_1} < c\alpha \right\}, \\ prob((X_1, X_2, ..., X_n) &\in D_c^* | \lambda_0) = \alpha \end{aligned}$$

astfel încât oricare ar fi regiunea critică D_c de nivel α

$$prob((X_1, X_2, ..., X_n) \in D_c) = \alpha$$

are loc relaţia

$$prob((X_1, X_2, ..., X_n) \in D_c^* | \lambda_1) \geq prob((X_1, X_2, ..., X_n) \in D_c | \lambda_1).$$

Observaţie. Este evident că dacă raportul $\frac{L(X_1,X_2,...,X_n;\lambda_0)}{L(X_1,X_2,...,X_n;\lambda_1}$ dintre verosimilitatea selecţiei condiţionată de $\lambda = \lambda_0$ şi verosimilitatea selecţiei condiţionată de $\lambda = \lambda_1$ este mic atunci suntem îndreptăţiţi să respingem ipoteza H_0.

In adevăr fie $C = D_c^* \cap D_c$, $A = D_c^* \backslash C$, $B = D_c \backslash C$. Avem

$$\begin{aligned} prob(A|\lambda_0) &= prob(B|\lambda_0), \\ prob(A|\lambda_0) &\leq c\alpha prob(A|\lambda_1), \\ prob(B|\lambda_0) &\geq c\alpha prob(B|\lambda_1). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} prob(D_c^*|\lambda_1) &= prob(A|\lambda_1) + prob(B|\lambda_1) \geq \frac{1}{c\alpha} prob(A|\lambda_0) + prob(C|\lambda_1) \geq \\ &\geq \frac{1}{c\alpha} prob(B|\lambda_0) + prob(C|\lambda_1) \geq prob(B|\lambda_1) + prob(C|\lambda_1) = \\ &= prob(D_c|\lambda_1), \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Exemplul 1. Fie $\xi \in norm(0, \sigma^2)$ cu ipoteza $H_0 : \sigma = \sigma_0$ contra ipoteza $H_1 : \sigma = \sigma_1$. Cea mai bună regiune critică este definită de

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^n exp \left(\frac{-1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) < c\alpha$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2} \right) < c\alpha - n \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$$

sau dacă $\sigma_1 < \sigma_0$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 < \left(c\alpha - n \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right) \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_0^2} \right)^{-1} = c\alpha'$$

sau încă

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 < \frac{1}{\sigma_0^2} c\alpha'.$$

Cum $\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \in chisq(n)$ rezultă că nivelul de semnificaţie este

$$\alpha = pchisq \left(\frac{1}{\sigma_0^2} c\alpha', n \right)$$

de unde constanta $c\alpha'$ este dată de relaţia

$$\frac{1}{\sigma_0^2} c\alpha' = qchisq(\alpha, n).$$

Deci regiunea de acceptare a ipotezei $H_0 : \lambda = \lambda_0$ la nivelul de semnificaţie α este

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \geq c\alpha'$$

In cazul $\sigma_1 > \sigma_0$ se schimbă sensul inegalităţii.

Exemplul 2. Fie $\xi \in norm(a, \sigma_0^2)$ cu σ_0 cunoscut. Considerăm ipoteza simplă $H_0 : a = a_0$ contra ipoteza ipoteza simplă $H_1 : a = a_1$ cu $a_1 > a_0$. Regiunea critică cea mai bună este dată de relaţia

$$exp \left(\frac{-1}{2\sigma_0^2} \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - a_0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (X_i - a_1)^2 \right) \right) < c\alpha$$

sau

$$exp \left(\frac{-(a_1 - a_0)}{2\sigma_0^2} \left(2 \sum_{i=1}^{n} X_i - a_0 - a_1 \right) \right) < c\alpha$$

sau

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i > c\alpha'.$$

Dar $\overline{X} \in norm(a, \frac{\sigma_0^2}{n})$ şi $\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - a)}{\sigma_0} \in norm(0, 1)$ şi regiunea critică este dată de

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - a_0)}{\sigma_0} > \frac{\sqrt{n}(c\alpha' - a_0)}{\sigma_0}$$

de unde nivelul de semnificaţie este

$$\alpha = 1 - pnorm(\frac{\sqrt{n}(c\alpha' - a_0)}{\sigma_0}, 0, 1)$$

sau

$$\frac{\sqrt{n}(c\alpha' - a_0)}{\sigma_0} = qnorm(1-\alpha, 0, 1)$$

sau

$$c\alpha' = a_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} qnorm(1-\alpha, 0, 1)$$

Regiunea de acceptare a ipotezei H_0 la nivelul de semnificaţie α este

$$\overline{X} \le c\alpha'.$$

Exemplul 3. Fie $\xi \in binom(m, p)$. Fie ipoteza simplă $H_0 : p = p_0$ contra ipoteza simplă $H_1 : p = p_1$ cu $p_1 < p_0$. Regiunea critică cea mai bună este dată de

$$exp\left(\left(\ln\frac{p_0}{p_1} - \ln\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)\sum_{i=1}^{n} X_i + nm\ln\frac{1-p_0}{1-p_1}\right) < c\alpha$$

sau

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i > c\alpha'$$

Cum $T \in binom(nm, p)$ rezultă că nivelul de semnificaţie α este dat de

$$\alpha = 1 - pbinom(c\alpha', nm, p_0)$$

de unde constanta $c\alpha'$ este

$$c\alpha' = qbinom(1-\alpha, nm, p_0).$$

Regiunea de acceptare a ipotezei H_0 la nivelul de semnificaţie α este

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \le c\alpha'.$$

Când ipoteza $H_0 : \lambda \in \Lambda_0$ este compusă contra alternativei compuse $H_1 : \lambda \in \Lambda_1 = \Lambda\backslash\Lambda_0$, o regiune critică D_c^* de nivel cel mult α, adică $prob(D_c^*|\lambda \in \Lambda_0) \le \alpha$, se numeşte *regiune critică uniform cea mai bună* dacă oricare ar fi regiunea critică D_c de nivel cel mult α are lor relaţia $prob(D_c^*|\lambda \in \Lambda_1) \ge prob(D_c|\lambda \in \Lambda_1)$.

Testul uniform cel mai bun (cel mai puternic) nu există întotdeauna.

Exemplul 4. Fie $\xi \in norm(a, 1)$ şi ipoteza $H_0 : a = a_0$ contra ipoteza $H_1 : a > a_0$. Regiunea de respingere va fi dată de

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum(X_i - a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum(X_i - a)^2\right) =$$

$$= \exp\left(n(a_0 - a)(\overline{X} - \frac{a_0 + a}{2})\right) < c\alpha$$

sau

$$\overline{X} > c\alpha'$$

Mulţimea

$$D_c = \left\{(X_1, X_2, ..., X_n)|\overline{X} > c\alpha'\right\}$$

va fi regiunea critică uniform cea mai bună dacă alegem constanta $c\alpha'$ din condiţia

$$prob(D_c|a = a_0) = \alpha$$

adică

$$c\alpha' = a_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}qnorm(1 - \alpha, 0, 1).$$

Dacă contra ipotezei H_0 luam ipoteza $H_1 : a \neq a_0$ atunci pentru $a > a_0$ găseam regiunea critică uniform cea mai bună

$$\overline{X} > a_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}qnorm(1 - \alpha, 0, 1),$$

iar pentru $a < a_0$ găseam regiunea critică uniform cea mai bună

$$\overline{X} < a_0 - \frac{1}{\sqrt{n}}qnorm(1 - \alpha, 0, 1),$$

adică nu putem găsi o regiune critică uniform cea mai bună în cazul alternativei $H_1 : a \neq a_0$.

In situaţia în care nu există o regiune critică uniform cea mai bună, cum a fost mai sus, ar trebui redefinit ce înţelegem prin cea mai bună regiune regiune critică. Aceasta nefiind un lucru simplu ne limităm numai a prezenta o metodă care dă un test uşor de aplicat.

O metodă larg utilizată pentru verificarea ipotezelor statistice este *testul raportului de verosimilitate*

$$r(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{\max\limits_{\lambda \in \Lambda_0} L(X_1, X_2, ..., X_n; \lambda)}{\max\limits_{\lambda \in \Lambda} L(X_1, X_2, ..., X_n; \lambda)}.$$

Se caută regiunea de respingere D_c ca determinată de relaţia

$$r(X_1, X_2, ..., X_n) < c\alpha$$

unde constanta $c\alpha$ se determină din nivelul de semnificaţie

$$prob((X_1, X_2, ..., X_n) \in D_c | \lambda \in \Lambda_0) = \alpha.$$

Se poate arăta ca variabila $-2 \ln r(X_1, X_2, ..., X_n)$ tinde în repartiţie pentru $n \to \infty$ către o variabilă repartizată $chisq(r)$ unde r este diferenţa între numărul de dimensiuni al mulţimii Λ şi numărul de dimensiuni al mulţimii Λ_0.

Exemplul 5. Fie $\xi \in norm(a, \sigma_0^2)$ şi ipoteza $H_0 : a = a_0$ contra ipoteza $H_1 : a \neq a_0$. Presupunem σ_0^2 cunoscut. Fie $(X_1, X_2, ..., X_n)$ o selecţie din populaţia variabilei ξ. Se ştie că media de selecţie $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ este estimaţia de verosimilitate maximă a parametrului a. Raportul de verosimilitate este

$$r(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_0)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]} = \exp\left[-\frac{n}{2\sigma_0^2}(\overline{X} - a_0)^2\right]$$

şi deci

$$-\ln r(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{n}{2\sigma_0^2}(\overline{X} - a_0)^2.$$

Regiunea de respingere a ipotezei H_0 este

$$\frac{n}{\sigma_0^2}(\overline{X} - a_0)^2 > -2 \ln c\alpha$$

unde

$$prob\left(\frac{n}{\sigma_0^2}(\overline{X} - a_0)^2 > -2 \ln c\alpha\right) = \alpha$$

sau

$$prob\,(chisq(1) > -2 \ln c\alpha) = 1 - prob(chisq(1) < -2 \ln c\alpha) = \alpha$$

sau

$$-2 \ln c\alpha = qchisq(1 - \alpha, 1).$$

Puteam scrie şi

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}|\overline{X} - a_0| > \sqrt{-2 \ln c\alpha}$$

$$prob\left(norm(0,1) < \sqrt{-2\ln c\alpha}\right) + prob\left(norm(0,1) > -\sqrt{-2\ln c\alpha}\right) = 1-\alpha$$

sau

$$prob(norm(0,1) < \sqrt{-2\ln c\alpha}) - 1 + prob(norm(0,1) < \sqrt{-2\ln c\alpha}) = 1-\alpha$$

sau

$$prob(norm(0,1) < \sqrt{-2\ln c\alpha}) = 1-\frac{\alpha}{2}$$

adică

$$\sqrt{-2\ln c\alpha} = qnorm(1-\frac{\alpha}{2}, 0, 1).$$

Exemplul 6. Fie $\xi \in norm(a,\sigma^2)$ şi ipoteza $H_0 : a = a_0$ contra ipoteza $H_1 : a \neq a_0$. Se presupune σ necunoscut. In acest caz avem

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{(a,\sigma^2)|a \in R, \sigma \in R\} \\ \Lambda_0 &= \{(a_0,\sigma^2)|\sigma \in R\} \end{aligned}$$

Estimaţiile de maximă verosimilitate ale lui a şi σ^2 în mulţimea Λ sunt

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \\ S^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \end{aligned}$$

iar în mulţimea Λ_0 sunt

$$\begin{aligned} & a_0, \\ \widehat{S}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}(X_i-a_0)^2. \end{aligned}$$

Raportul de verosimilitate va fi

$$\begin{aligned} r &= \frac{\left(\frac{1}{\widehat{S}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\widehat{S}^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a_0)^2\right]}{\left(\frac{1}{S}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2S^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]} = \left(\frac{S}{\widehat{S}}\right)^n = \\ &= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a_0)^2}\right]^{n/2} = \left[1+\frac{n(\overline{X}-a_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\right]^{-n/2} = \\ &= \left(1+\frac{T^2}{n-1}\right)^{-n/2} \end{aligned}$$

unde variabila aleatoare

$$T = \frac{(n-1)(\overline{X} - a_0)}{S}$$

este de tipul Student cu $n-1$ grade de libertate $t(n-1)$. Regiunea de respingere va fi

$$D_c = \{(X_1, X_2, ..., X_n) | |T| > c\alpha\}$$

unde

$$pt(c\alpha, n-1) - 1 + pt(c\alpha, n-1) = 1 - \alpha$$

sau

$$c\alpha = qt(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1).$$

Dacă drept ipoteză alternativă considerăm ipoteza $H_1 : a < a_0$ atunci regiunea critică pentru ipoteza nulă H_0 este

$$D_c = \{(X_1, X_2, ..., X_n) | T < c\alpha\}$$

unde

$$pt(c\alpha, n-1) = \alpha$$

sau

$$c\alpha = qt(\alpha, n-1).$$

In cazul ipotezei alternative $H_1 : a > a_0$ regiunea critică pentru ipoteza nulă H_0 este

$$D_c = \{(X_1, X_2, ..., X_n) | T > c\alpha\}$$

unde

$$1 - pt(c\alpha, n-1) = \alpha$$

sau

$$c\alpha = qt(1 - \alpha, n-1).$$

17.12 Teste de concordanţă

Ipotezele statistice din paragraful precedent se refereau la parametrii repartiţiei variabilei aleatoare ξ. Testele prin care se verifică aceste ipoteze se numesc teste parametrice. Există situaţii când este necesară testarea unei ipoteze referitoare chiar la funcţia de repartiţie $F\xi(x) = p(\xi < x)$, adică avem ca ipoteză nulă ipoteza $H_0 : F\xi(x) = F(x)$ cu $F(x)$ o funcţie dată contra alternativei $H_1 : F\xi(x) \neq F(x)$.

17.12.1 1. Criteriul de concordanţă hi pătrat

Pentru a estima concordanţa între repartiţia datelor de selecţie cu repartiţia presupusă se consideră o partiţie a intervalului $[A, B]$ al valorilor posibile ale variabilei ξ dată de $A = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{r-1} < t_r = B$. Obţinem astfel r subintervale $I_1, I_2, ..., I_r$. Probabilitatea ca variabila aleatoare ξ să ia valori în subintervalul I_k este

$$p_k = p(\xi \in I_k) = F(t_k) - F(t_{k-1}).$$

După realizarea selecţiei notăm cu n_k numărul elementelor selecţiei de volum n care cad în subintervalul I_k. $\sum\limits_{k=1}^{r} n_k = n$. Este de aşteptat ca valoarea lui n_k să fie egală cu np_k. Drept măsură a abaterii repartiţiei selecţiei de la repartiţia ipotetică este normal să luăm statistica

$$X^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Pentru $n \to \infty$ statistica X^2 tinde în repartiţie către o variabilă $\zeta \in chisq(r-1)$.

In adevăr probabilitatea ca n_1 elemente ale selecţiei să cadă în I_1, n_2 elemente să cadă în I_2, etc, n_r elemente să cadă în I_r este

$$P = \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{r} n_k!} \prod_{k=1}^{r} p_k^{n_k}.$$

Dacă considerăm r variabile aleatoare independente

$$\eta_1 \in pois(np_1), \eta_2 \in pois(np_2), ..., \eta_r \in pois(np_r)$$

atunci

$$\begin{aligned} p(\eta_1 &= n_1, \eta_2 = n_2, ..., \eta_r = n_r) = \prod_{k=1}^{r} \frac{(np_k)^{n_k}}{n_k!} e^{-np_k} = \\ &= e^{-n} n^n \prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{n_k}}{n_k!}. \end{aligned}$$

Variabila $\eta = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_r \in pois(np_1 + np_2 + ... + np_r) = pois(n)$ şi deci

$$p(\eta = n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} p(\eta_1 &= n_1, \eta_2 = n_2, ..., \eta_r = n_r | \eta = n) = \frac{p(\eta_1 = n_1, \eta_2 = n_2, ..., \eta_r = n_r)}{p(\eta = n)} = \\ &= \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{r} n_k!} \prod_{k=1}^{r} p_k^{n_k} = P \end{aligned}$$

adică situaţia noastră poate fi descrisă fie prin repartiţia polinomială fie prin r variabile aleatoare repartizate Poisson cu valorile medii şi dispersiile egale cu np_k. In locul variabilelor n_k considerăm redusele lor

$$u_k = \frac{n_k - np_k}{\sqrt{np_k}}$$

care au media nulă şi dispersia egală cu unitatea. După teorema limită centrală variabilele u_k tind către variabile repartizate normal standard. Atunci statistica

$$X^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} = \sum_{k=1}^{r} u_k^2$$

suma a r pătrate de variabile repartizate normal standard cu condiţia suplimentară

$$\sum_{k=1}^{r} \sqrt{np_k} u_k = \sum_{k=1}^{r} n_k - \sum_{k=1}^{r} np_k = 0$$

va tinde către o variabilă repartizată $chisq(r-1)$.

Regiunea critică a ipotezei nule H_0 va fi

$$D_c = \left\{(X_1, X_2, ..., X_n) | X^2 > c\alpha\right\}$$

unde

$$\alpha = prob(X^2 > c\alpha) = 1 - pchisq(c\alpha, r-1)$$

sau

$$c\alpha = qchisq(1-\alpha, r-1).$$

Până acum am presupus că repartiţia este complet specificată. Dacă repartiţia depinde de p parametri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ atunci probabilităţile p_k vor fi funcţii de aceşti parametri $p_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$. Funcţia de verosimilitate va fi

$$L(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{r} n_k!} \prod_{k=1}^{r} p_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)^{n_k}$$

şi pentru determinarea estimaţiilor parametrilor vom avea sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_i} = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{p_k} \frac{\partial p_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)}{\partial \lambda_i} = 0, i = 1, 2, ..., p.$$

Aceste relaţii impun deci p condiţii şi deci statistica

$$X^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p))^2}{np_k}$$

va tinde către o variabilă repartizată $chisq(r-p-1)$.

Din punct de vedere practic testul hi pătrat este simplu de aplicat dar trebuie să se ţină seamă de unele recomandări:

- fiecare interval să conţină cel puţin 5 elemente ale selecţiei;
- unii recomandă ca numărul r de intervale să fie dat de relaţia $r \approx 1 + 3.332 lg(n)$, alţii recomandă $r \approx 4[0.75(n-1)^2]^{1/5}$, alţii recomandă pentru valori moderate ale lui n $r \approx \left[\frac{n}{5}\right]$.

17.12.2 2. Testul de concordanţă al lui Kolmogorov

Testul de concordanţă al lui Kolmogorov pentru ipoteza $H_0 : F\xi(x) = F(x)$ contra ipoteza $H_1 : F\xi(x) \neq F(x)$, cu $F(x)$ funcţie continuă, se bazează repartiţia variabilei

$$d_n = \max_{x \in R} |F(x) - F_n(x)|$$

unde $F_n(x)$ este funcţia de repartiţie de selecţie

$$F_n(x) = \frac{n_x}{n} = \sum_{i<x} \frac{n_i}{n}.$$

Se demonstrează că

$$prob(d_n > c_{\alpha n}) = \alpha$$

implică

$$c_{\alpha n} = \frac{\lambda\alpha}{\sqrt{n}}$$

unde $\lambda\alpha$ se află din tabele speciale din care dăm numai valorile mai folosite

α	0.5	0.1	0.05	0.01
$\lambda\alpha$	0.826	1.224	1.358	1.627

Ipoteza H_0 se respinge dacă $d_n > \frac{\lambda\alpha}{\sqrt{n}}$.

17.12.3 Exerciţii şi probleme

1. Se fac 100 observaţii independente asupra variabile aleatoare ξ. Valorile obţinute sunt cuprinse între 0 şi 1 astfel încât dacă notăm cu n_i numărul valorilor mai mici decât

$p_i = 0.1i$, $i = 1, 2, ..., 10$ acestea sunt

$$7 \quad 24 \quad 30 \quad 34 \quad 45 \quad 60 \quad 69 \quad 80 \quad 94 \quad 100.$$

Să se verifice cu nivelul de semnificaţie $\alpha = 0.05$ dacă variabila $\xi \in unif(0, 1)$.

R. Dacă aplicăm testul hi pătrat avem

$$X^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(n_i - 100p_i)^2}{100p_i} = 3.392.$$

Pe de altă parte $qchisq(0.95, 9) = 16.919$ şi deci acceptăm ipoteza că $\xi \in unif(0, 1)$.

Dacă aplicăm testul lui Kolmogorov obţinem pentru $|F(0.1i) - \frac{n_i}{n}|$ valorile

$$0.03 \quad 0.04 \quad 0 \quad 0.06 \quad 0.05 \quad 0 \quad 0.01 \quad 0 \quad 0.04 \quad 0$$

adică $d_{100} = 0.06$. Cum $\frac{\lambda_{0.05}}{\sqrt{100}} = \frac{1.358}{10} = 0.1358$ resultă că şi acum ipoteza se acceptă. Datele au fost construite cu $runif(1000, 0, 1)$.

2. Un sondaj de volum 1000 asupra unei variabile ξ dă valori întregi cuprinse între 0 şi 8 repartizate ca mai jos

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n_k	129	271	278	179	89	40	12	1	1

Să se verifice cu nivelul de semnificaţie $\alpha = 0.01$ dacă $\xi \in pois(\lambda)$.

R. Estimăm parametrul λ prin

$$\lambda = \frac{\sum_{k=0}^{8} kn_k}{1000} = 2.007.$$

Găsim

k	0	1	2	3	4	5	6..8
$dpois(k, \lambda)$	0.134	0.27	0.271	0.181	0.091	0.036	0.017

Ca să aplicăm testul hi pătrat grupăm ultimele trei valori şi avem

$$X^2 = \sum_{k=0}^{5} \frac{(n_k - 1000dpois(k, \lambda))^2}{1000dpois(k, \lambda)} + \frac{(n_6 + n_7 + n_8 - 1000 * 0.017)^2}{n_6 + n_7 + n_8 - 1000 * 0.017} = 10.016.$$

Cum $qchisq(0.99, 1000 - 2) = 13.277 > 10.016$ rezultă că ipoteza $\xi \in pois(\lambda)$ se acceptă. Datele au fost obţinute cu $rpois(1000, 2)$.

Pentru a aplica testul lui Kolmogorov se calculează

$$m_i = \sum_{j=0}^{i} n_j, i = 0, 1, 2, ..., 8$$

şi

$$d = \max_{i=0,...,8} |ppois(i, \lambda) - \frac{m_i}{1000}| = 0.0054.$$

Cum $\frac{\lambda_{0.01}}{\sqrt{1000}} = 0.051 > 0.0054$ rezultă că şi pe baza acestui test ipoteza se acceptă.

3. Pentru a controla functionarea unei maşini automate se prevalează la fiecare jumătate de oră câte 20 de piese care sunt verificate. După prelevarea a 100 de piese datele se prezintă astfel:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	1	5	16	22	18	22	8	5	2	1

Să se verifice cu ajutorul testului hi pătrat concordanţa repartiţiei cu o repartiţie binomială la nivelul de semnificaţie de 0.05.

R. Cum găsim $mean(x) = 3.93$ rezultă că valoarea estimată a lui p este $p^* = \frac{3.93}{20} = 0.1965$. Vom grupa primele două valori şi ultimele trei valori cu probabilităţile

nn_i	6	16	22	18	22	8	8
p_i	0.074	0.143	0.209	0.218	0.170	0.104	0.078

Vom calcula

$$X^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(nn_i - 100p_i)^2}{100p_i} = 3.186$$

în timp ce $qchisq(0.95, 5) = 11.070$. Deci ipoteza se acceptă.

Index