Introducere

Teoria aplicaţiilor armonice între varietăţi riemanniene este astăzi un domeniu foarte cunoscut al geometriei riemanniene, având legături profunde şi cu alte ramuri ale matematicii: teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale, calculul variaţiilor, geometria complexă, grupurile Lie, etc. De la articolul publicat de J. Eells şi J.H. Sampson în 1964, numeroşi matematicieni şi-au adus contribuţia la dezvoltarea acestui domeniu: T. Aubin, P. Baird, R. Caddeo, J. Jost, L. Lemaire, A. Lichnerowicz, Y. Ohnita, A. Sanini, R. Schoen, K. Uhlenbeck, H. Urakawa, J.C. Wood, Y.L. Xin, etc. Dintre matematicienii români cu rezultate remarcabile în teoria aplicaţiilor armonice amintim: C.L. Bejan, S. Dragomir, C. Gherghe, S. Ianuş, V. Oproiu, R. Pantilie, etc.

Lucrarea de faţă are la bază cursul ţinut de autor studenţilor de la Master, Facultatea de Matematică, Universitatea "Al.I. Cuza" din Iaşi. Ea nu are ca obiectiv prezentarea ultimelor realizări în domeniu (lucru dealtfel imposibil datorită diversităţii şi complexităţii la care s-a ajuns) ci îşi propune să-l introducă pe cititor în acest fascinant domeniu şi să-i prezinte rezultate şi tehnici de bază. Cartea se adresează studenţilor de la Master, doctoranzilor şi tuturor celor interesaţi de teoria aplicaţiilor armonice.

Lucrarea este organizată astfel.

În *Capitolul 1* sunt prezentate noţiunile fundamentale din geometria riemanniană: metricile riemanniene, teoria geodezicelor, câmpurile tensoriale Riemann-Christoffel şi Ricci, curbura secţională, câmpurile Killing, operatorul Laplace, teorema Hodge-de Rham, elemente de teoria spectrală, prima şi a doua formulă variaţională a energiei unei curbe. O parte dintre demonstraţiile de natură tehnică au fost omise, ele putând fi găsite de cititor în monografiile [8], [9], [12], [23], [26], [27], [30], etc. Accentul, aici ca şi în restul lucrării, a fost pus pe noţiunile şi rezultatele care vor servi pentru înţelegerea mai bună a aplicaţiilor armonice şi de care autorul s-a folosit mai des în activitatea sa proprie de cercetare în domeniul aplicaţiilor armonice şi biarmonice.

Cadrul formal de prezentare a aplicaţiilor armonice este cel al fibratelor vectoriale. Astfel, în *Capitolul 2* sunt prezentate acele noţiuni din teoria fibratelor vectoriale care sunt utile în studiul aplicaţiilor armonice. Autorul a urmărit în special monografiile [18], [40].

Aplicaţiile armonice au legături deosebite cu geometria varietăţilor complexe. Prin urmare, în *Capitolul 3* sunt studiate varietăţile complexe şi kähleriene. Aceste subiecte pot fi aprofundate independent, urmărind, de exemplu, [23].

În *Capitolul 4* sunt introduse aplicaţiile armonice. Sunt studiate prima formulă variaţională, exemple, legătura cu aplicaţiile olomorfe între varietăţile kähleriene, teorema Ruh-Vilms, a doua formulă variaţională, teoreme de stabilitate pentru aplicaţiile armonice având domeniul, sau codomeniul, sfere euclidiene, rezultate de stabilitate pentru aplicaţiile olomorfe între varietăţi kähleriene. Apoi sunt prezentate submersiile riemanniene armonice şi suprafeţele minimale în $\mathbb{R}^3$ punându-se accent pe reprezentarea Weierstrass şi aplicaţia Gauss asociată. Alte subiecte interesante în teoria aplicaţiilor armonice (tensorul tensiune-impuls, morfismele armonice, probleme de regularitate sau existenţă, etc.) pot fi găsite în excelentele monografii [5], [16], [18], [38], [40].

Autorul doreşte să mulţumească referenţilor şi dr. D. Fetcu, drd. A. Balmuş pentru observaţiile făcute asupra manuscrisului. De asemenea, mulţumiri sunt aduse L. Teodorescu pentru tehnoredactarea îngrijită a lucrării.

Pe timpul elaborării acestei cărţi, autorul a beneficiat de sprijinul oferit de grantul CNCSIS nr. 191/2006.

Autorul

Cuprins

1

VARIETĂŢI RIEMANNIENE. GENERALITĂŢI

1.1. Definiţia şi existenţa metricilor riemanniene

Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune m, de clasă C^∞ (sau netedă), conexă şi fără bord.

Definiţia 1.1.1. Se numeşte *metrică riemanniană pe* M, sau *metrică riemanniană pe fibratul tangent* TM, un câmp tensorial g de tip $(0,2)$ pe M, adică $g \in C(T_2^0(M))$, sau încă g este o secţiune în fibratul vectorial $T_2^0(M) = \bigcup_{p\in M} T_{2,p}^0 M \equiv \bigcup_{p\in M} T_p^*M \otimes T_p^*M$, simetric şi cu forma pătratică asociată strict pozitiv definită în fiecare punct.

Echivalent, metrica g poate fi dată astfel

$$g : C(TM) \times C(TM) \to C^\infty(M), \quad (X,Y) \mapsto g(X,Y)$$

şi g satisface următoarele

i) g este $C^\infty(M)$-biliniară,

ii) $g(X,Y) = g(Y,X)$ pentru orice $X,Y \in C(TM)$,

iii) oricare ar fi $p \in M : g_p(X_p, X_p) > 0$ pentru orice $X_p \in T_pM \setminus \{0\}$.

Observaţia 1.1.1. Condiţia i) este echivalentă cu $g \in C(T_2^0(M))$, iar condiţiile i) şi ii) sunt echivalente cu $g \in C(\odot^2 T^*M)$, unde $\odot^2 T^*M$ este fibratul vectorial al tensorilor de tip $(0,2)$ simetrici. Fibratul $\odot^2 T^*M$ se mai numeşte *2-produsul simetric* al lui T^*M.

Exprimarea în coordonate locale. Fie $(U;\varphi) = (U; x^1, \dots, x^m)$ o hartă locală pe M. Reamintim că $\{dx^i_p \otimes dx^j_p\}_{i,j=1,\dots,m}$ este o bază în $\otimes^2 T^*_p M$, iar $\{dx^i_p \odot dx^j_p\}_{i\le j}$ este o bază în $\odot^2 T^*_p M$, unde

$$dx^i_p \odot dx^j_p = \frac{1}{2}\{dx^i_p \otimes dx^j_p + dx^j_p \otimes dx^i_p\}.$$

Cum $g(p) \in \otimes^2 T^*_p M$, avem $g_p = g_{ij}(p) dx^i_p \otimes dx^j_p$, unde $g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$. Mai mult,

ii) $\Leftrightarrow g_{ij} = g_{ji}$, adică $G = {}^T G$, unde $G = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$,

iii) $\Leftrightarrow \Delta_k > 0$ pentru orice $k = 1, \dots, m$, unde $\Delta_k = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{kk} \end{vmatrix}$.

Notăm că condiţia iii) este echivalentă cu faptul că matricea simetrică G are toate valorile proprii strict pozitive.

Deoarece g_p este simetric, folosind convenţia de sumare Einstein, putem scrie

$$\begin{aligned} g_p &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i<j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j + \sum_{i=j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j + \sum_{i>j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \\ &= \sum_{i<j} g_{ij}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i) + \sum_{i=j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \\ &= 2\sum_{i<j} g_{ij} dx^i \odot dx^j + \sum_i g_{ii} (dx^i)^2 \\ &= g_{ij} dx^i \odot dx^j. \end{aligned}$$

Pentru $X_p, Y_p \in T_pM$, $X_p = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y_p = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, avem

$$g_p(X_p, Y_p) = X^i g_{ij}(p) Y^j.$$

Când nu este pericol de confuzie, vom nota $\langle X, Y\rangle = g(X,Y)$ şi $|X| = \sqrt{g(X,X)}$.

Pentru a demonstra existenţa unei metrici riemanniene pe o varietate, ne vom folosi de partiţia unităţii. Reamintim

Definiţia 1.1.2. O *partiţie a unităţii* pe M este o mulţime de funcţii pozitive $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ce satisfac

i) oricare ar fi $p \in M$, există V deschisă în M ce conţine p astfel încât $V \cap$ supp $f_\alpha \neq \emptyset$ numai pentru un număr *finit* de indici α.

ii) $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha = 1$ pe M.

Reamintim de asemenea că supp $f_\alpha = \overline{\{p \in M | f_\alpha(p) \neq 0\}}$.

Observaţia 1.1.2. Din i) rezultă că, în orice punct, suma de la ii) are o mulţime finită de termeni nenuli.

Observaţia 1.1.3. $\{$ supp $f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ formează o acoperire închisă a lui M.

Existenţa partiţiei unităţii are două forme pe care le vom prezenta fără demonstraţie.

Teorema 1.1.1. *Dată o acoperire deschisă $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ a lui M, există o partiţie a unităţii $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ astfel încât supp $f_\alpha \subset U_\alpha$, oricare ar fi $\alpha \in I$. Spunem în acest caz că $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ este o partiţie a unităţii subordonată acoperirii deschise $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$.*

Teorema 1.1.2. *Dată o acoperire deschisă $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ a lui M, există o partiţie a unităţii $\{f_\beta\}_{\beta\in J}$ cu suport compact, astfel încât oricare ar fi $\beta \in J$, există $\alpha \in I$ cu supp $f_\beta \subset U_\alpha$.*

Observaţia 1.1.4. În Teorema 1.1.1 nu cerem ca supp f_α (care este închisă) să fie compactă, în schimb mulţimea de indici a partiţiei coincide cu cea a acoperirii.

Putem demonstra acum existenţa metricilor riemanniene.

Teorema 1.1.3. *Orice varietate M admite o metrică riemanniană.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{A} = \{(U_\alpha; \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ un atlas pe M şi $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ o partiţie a unităţii subordonată acoperirii $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Pe fiecare domeniu U_α construim metrica riemanniană

$$g_\alpha = \sum_{i=1}^{m} (dx_\alpha^i)^2 = \varphi_\alpha^* \langle , \rangle,$$

unde $\langle , \rangle$ reprezintă metrica euclidiană uzuală pe $\mathbb{R}^m$. Desigur, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ devine o izometrie. Considerăm operatorul $f_\alpha g_\alpha$ definit pe U_α şi îl extindem prin 0 pe tot M. Noul operator $f_\alpha g_\alpha$ definit pe M este neted deoarece $\operatorname{supp} f_\alpha g_\alpha \subset U_\alpha$, dar, desigur, $f_\alpha g_\alpha$ nu este o metrică riemanniană pe M. În schimb se verifică uşor că

$$g = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha g_\alpha$$

este o metrică riemanniană pe M. $\square$

Mai putem da o demonstraţie imediată a acestei teoreme dacă acceptăm fără demonstraţie rezultatul lui Withney

Teorema 1.1.4. (**Withney**.) *Orice varietate M^m poate fi scufundată în $\mathbb{R}^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este suficient de mare.*

Fie deci $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ scufundarea dată de Teorema lui Withney. Definim $g = \phi^* \langle , \rangle$, şi cum ϕ este o imersie rezultă că g este metrică riemanniană pe M. Considerăm $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$ o hartă locală pe M şi notăm cu $\{y^\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,n}$ coordonatele uzuale pe $\mathbb{R}^n$. În aceste coordonate, aplicaţia ϕ este reprezentată prin

$$\phi : y^\alpha = \phi^\alpha(x^1, \ldots, x^m), \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

iar componentele metricii g sunt date de

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \left\langle d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \phi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \phi_j^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right\rangle \\ &= \sum_\alpha \phi_i^\alpha \phi_j^\alpha, \end{aligned}$$

unde $\phi_i^\alpha = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}$.

În această lucrare, prin *curbă* vom înţelege *curbă parametrizată*, adică o aplicaţie netedă $\gamma : I \to M$, unde I este un interval deschis din $\mathbb{R}$.

Întotdeauna vom presupune că $\gamma : I \to M$ nu este periodică (în caz contrar vom menţiona acest lucru explicit).

Definiţia 1.1.3. O curbă *netedă pe porţiuni* este o aplicaţie continuă $\gamma : [a, b] \to M$, unde $[a, b]$ este interval închis real, cu proprietatea că există o partiţie $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ astfel încât restricţia $\gamma_{|[t_i, t_{i+1}]}$ este netedă, oricare ar fi $i = 0, \ldots, n-1$.

Mai mult, spunem că γ *uneşte punctele* $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$; $\gamma(t_i)$ se numeşte *vârf* a lui γ, iar unghiul format din $\lim_{t \nearrow t_i} \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t_i-)$ şi $\lim_{t \searrow t_i} \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t_i+)$ se numeşte *unghiul vârfului* $\gamma(t_i)$ (am folosit notaţia $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$).

Fie $\gamma : [a, b] \to M$ o curbă netedă pe porţiuni. Definim *lungimea curbei* γ prin

$$\ell(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Reamintim că orice varietate conexă M este conexă prin arce, adică oricare ar fi $p, q \in M$, există $\gamma : [a, b] \to M$ netedă astfel încât $\gamma(a) = p$ şi $\gamma(b) = q$. Fie p şi $q \in M$. Definim

$$d(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ curbă netedă pe porţiuni ce uneşte } p \text{ şi } q\}.$$

Din observaţia anterioară rezultă că oricare ar fi $p, q \in M$, există $d(p, q) \in \mathbb{R}_+$.

Teorema 1.1.5. *Funcţia d definită mai sus este o distanţă, iar topologia indusă de ea coincide cu topologia varietăţii.*

Demonstraţie. Simetria şi tranzitivitatea, adică $d(p, q) = d(q, p)$ şi $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, p)$, pentru orice $p, q, r \in M$, sunt evidente. De asemenea, dacă $p = q$ atunci $d(p, q) = 0$. Vom demonstra acum că dacă $d(p, q) = 0$ atunci $p = q$.

Prin reducere la absurd presupunem că $p \neq q$. Fără a restrânge generalitatea, presupunem $p, q \in (U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$. Cum $\varphi(p) \neq \varphi(q)$, există $B_{\rho_1}(\varphi(p)) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - \varphi(p)| < \rho_1\}$ şi $B_{\rho_2}(\varphi(q))$ astfel încât $\overline{B_{\rho_1}(\varphi(p))} \subset \varphi(U)$, $\overline{B_{\rho_2}(\varphi(q))} \subset \varphi(U)$ şi $\overline{B_{\rho_1}(\varphi(p))} \cap \overline{B_{\rho_2}(\varphi(q))} = \emptyset$.

Considerăm două funcţii

$$\psi_1 : \mathbb{S}^{m-1} \times \varphi^{-1}(\overline{B_{\rho_1}(\varphi(p))}) \to \mathbb{R}^*_+, \quad (x, \widetilde{p}) \mapsto x^i g_{ij}(\widetilde{p}) x^j$$

şi

$$\psi_2 : \mathbb{S}^{m-1} \times \varphi^{-1}(\overline{B_{\rho_2}(\varphi(q))}) \to \mathbb{R}^*_+, \quad (x, \widetilde{p}) \mapsto x^i g_{ij}(\widetilde{p}) x^j.$$

Cum ψ_1 şi ψ_2 sunt continue, iar domeniile lor de definiţie sunt mulţimi compacte, există $0 < \lambda_1 \leq \mu_1 < \infty$ şi $0 < \lambda_2 \leq \mu_2 < \infty$ astfel încât

$$\begin{cases} \lambda_1^2 \leq x^i g_{ij}(\widetilde{p}) x^j \leq \mu_1^2, & \forall x \in \mathbb{S}^{m-1} \quad \text{şi} \quad \forall \widetilde{p} \in \varphi^{-1}(\overline{B_{\rho_1}(\varphi(p))}) \\ \lambda_2^2 \leq x^i g_{ij}(\widetilde{p}) x^j \leq \mu_2^2, & \forall x \in \mathbb{S}^{m-1} \quad \text{şi} \quad \forall \widetilde{p} \in \varphi^{-1}(\overline{B_{\rho_2}(\varphi(q))}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1^2 |x|^2 \leq x^i g_{ij}(\widetilde{p}) x^j \leq \mu_1^2 |x|^2, & \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \text{şi} \quad \forall \widetilde{p} \in \varphi^{-1}(\overline{B_{\rho_1}(\varphi(p))}) \\ \lambda_2^2 |x|^2 \leq x^i g_{ij}(\widetilde{p}) x^j \leq \mu_2^2 |x|^2, & \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \text{şi} \quad \forall \widetilde{p} \in \varphi^{-1}(\overline{B_{\rho_2}(\varphi(q))}). \end{cases}$$

Fie $\gamma : [a, b] \to M$ o curbă netedă pe porţiuni ce uneşte p cu q. Considerăm $\gamma(c_1), a < c_1 < b$, primul punct în care γ intersectează $\partial\varphi^{-1}(\overline{B_{\rho_1}(\varphi(p))})$ şi $\gamma(c_2), a < c_1 < c_2 < b$, ultimul punct în care γ intersectează $\partial\varphi^{-1}(\overline{B_{\rho_2}(\varphi(q))})$. Notăm $\gamma_1 = \gamma_{|[a,c_1]}$ şi $\gamma_2 = \gamma_{|[c_2,b]}$. Avem

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &> \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) = \int_a^{c_1} \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt + \int_{c_2}^b \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt \\ &= \int_a^{c_1} \sqrt{\dot x^i g_{ij} \dot x^j}\, dt + \int_{c_2}^b \sqrt{\dot x^i g_{ij} \dot x^j}\, dt \\ &\geq \lambda_1 \int_a^{c_1} |(\varphi \dot\circ \gamma)| dt + \lambda_2 \int_{c_2}^b |(\varphi \dot\circ \gamma)| dt \\ &\geq \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2. \end{aligned}$$

Cum curba γ ce uneşte p şi q a fost fixată arbitrar rezultă

$$d(p, q) \geq \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 > \lambda_1 \rho_1 > 0,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie.

Prin urmare am demontrat că d este o distanţă. Vom demonstra acum că topologia indusă de d coincide cu cea iniţială. Pentru aceasta definim

$$\overline{B_\rho(p)} = \{q \in M : d(q, p) \leq \rho\}.$$

Fie $p \in M$ şi $(U; \varphi)$ o hartă locală pe M în p. Vom arăta că

$$\overline{B_{\lambda\rho}(p)} \subset \varphi^{-1}(\overline{B_\rho(\varphi(p))}) \subset \overline{B_{\mu\rho}(p)},$$

ceea ce va încheia demonstraţia. Fie $q \in \overline{B_{\lambda\rho}(p)}$. Dacă $\varphi(q) \notin \overline{B_\rho(\varphi(p))}$, am văzut că $d(p,q) > \lambda\rho$, ceea ce contrazice $q \in \overline{B_{\lambda\rho}(p)}$. Fie $q \in \varphi^{-1}(\overline{B_\rho(\varphi(p))})$, adică $\varphi(q) \in \overline{B_\rho(\varphi(p))}$. Considerăm $\varphi \circ \gamma$ ca fiind segmentul din $\mathbb{R}^m$ ce uneşte $\varphi(p)$ cu $\varphi(q)$. Avem

$$d(p,q) \leq \ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}dt \leq \mu\rho.\square$$

1.2. Conexiunea Levi-Civita

În continuare vom prezenta un obiect foarte important în geometria riemanniană şi anume conexiunea Levi-Civita.

Teorema 1.2.1. *Fie (M,g) o varietate riemanniană. Atunci există şi este unică conexiunea liniară ∇ pe M ce satisface*

$$\nabla g = 0 \quad \text{şi} \quad T = 0,$$

adică ∇ este compatibilă cu metrica, sau g este paralelă în raport cu ∇, şi este simetrică.

Demonstraţie. Din condiţia $T = 0$ rezultă

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \quad \forall X, Y \in C(TM). \tag{1.2.1}$$

Condiţia $\nabla g = 0$ se scrie

$$(\nabla g)(X,Y,Z) = 0 \Leftrightarrow (\nabla_X g)(Y,Z) = 0$$

sau

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Făcând permutări circulare după X, Y, Z obţinem

$$\begin{cases} Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Yg(Z,X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \end{cases}$$

Înmulţind ultima relaţie cu (-1), adunându-le şi ţinând cont de (1.2.1) obţinem

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X)\}. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Relaţia (1.2.2) arată că dacă există ∇ cu proprietăţile cerute, atunci ea este unic determinată.

Pentru a arăta existenţa, considerăm $\nabla_X Y$ definit implicit prin (1.2.2) şi se verifică uşor că ∇ astfel definită este o conexiune liniară, este compatibilă cu metrica şi este simetrică. □

Conexiunea ∇ din teorema de mai sus se numeşte *conexiunea Levi-Civita.*

Exprimarea în coordonate locale. Fie $(U;\varphi) = (U;x^1,\dots,x^m)$ o hartă locală pe M. Înlocuim $X = \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ şi $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ în (1.2.2) şi obţinem

$$g\left(\Gamma^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

de unde rezultă

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}g^{hk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Funcţiile Γ^h_{ij} se numesc *simbolii lui Christoffel.*

În coordonate locate, condiţia $\nabla g = 0$ se scrie $\nabla_i g_{jk} = 0$, unde

$$\nabla_i g_{jk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^h_{ij} g_{hk} - \Gamma^h_{ik} g_{jh}.$$

Pornind de la câmpul tensorial metric g, vom construi un alt câmp tensorial, notat g^{-1}, şi vom demonstra că şi acest câmp tensorial este paralel în raport cu ∇, adică $\nabla g^{-1} = 0$. Fie $p \in M$ fixat arbitrar. Considerăm $(U;\varphi) = (U;x^1,\dots,x^m)$ o hartă locală pe M în p şi $g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ coeficienţii lui g în raport cu harta locală în discuţie. Definim

$$(g^{ij}(p)) = (g_{ij}(p))^{-1} \quad \text{şi} \quad g^{-1}(p) = g^{ij}(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}(p).$$

Se vede uşor că tensorul $g^{-1}(p)$ are caracter geometric, adică

$$g^{-1}(p) = g^{ij}(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = \widetilde{g}^{ij}(p)\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i}(p) \otimes \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j}(p)$$

unde $(\widetilde{U};\widetilde{\varphi}) = (\widetilde{U};\widetilde{x}^1,\ldots,\widetilde{x}^m)$ este o altă hartă locală pe M în p. Prin urmare, lăsând punctul p liber obţinem $g^{-1} \in C(T_0^2(M))$.

Propoziţia 1.2.1. $\nabla g^{-1} = 0$.

Demonstraţie. Vom prezenta o demonstraţie folosind coordonatele locale. Fie $(U;\varphi) = (U;x^1,\ldots,x^m)$ o hartă locală pe M arbitrară. Pe U avem

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$$

de unde, derivând covariant, obţinem $\nabla_h(g^{ij}g_{jk}) = 0$. Din regula lui Leibniz şi faptul că $\nabla_h g_{jk} = 0$, obţinem $\nabla_h g^{ij} = 0$. $\square$

1.3. Geodezice

O altă noţiune foarte importantă în geometria riemanniană este noţiunea de geodezică.

Definiţia 1.3.1. O curbă parametrizată $\gamma : I \to (M,g)$, unde I este un interval deschis din $\mathbb{R}$, se numeşte *geodezică* dacă $\frac{D}{dt}(\dot\gamma) = 0$.

Dacă $[a,b] \subset I$ şi $\gamma : I \to M$ este o geodezică, atunci restricţia lui γ la $[a,b]$ se numeşte *segment geodezic ce uneşte* $\gamma(a)$ *cu* $\gamma(b)$ (am notat cu $\frac{D}{dt}$ operatorul de derivare a câmpurilor vectoriale definite în lungul unei curbe asociat conexiunii Levi-Civita a lui (M,g)).

Propoziţia 1.3.1. *Dacă $\gamma : I \to M$ este o geodezică, atunci $|\dot\gamma|$ este constantă.*

Demonstraţie. Avem

$$\frac{d}{dt}|\dot\gamma|^2 = \frac{d}{dt}\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}(\dot\gamma),\dot\gamma\right\rangle = 0$$

şi deci $|\dot\gamma|^2$ este constantă.$\square$

Observaţia 1.3.1. Din proprietăţile operatorului $\frac{D}{dt}$, vedem imediat că geodezicele sunt invariante la schimbări afine de parametru. Prin urmare, dacă $\gamma(t)$ este o geodezică cu $|\dot{\gamma}| = c$, atunci reparametrizând-o prin lungimea de arc

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(t)| dt = c(t - t_0)$$

ea rămâne tot geodezică. Dacă o geodezică γ este parametrizată prin lungimea de arc, spunem că ea este *normalizată.*

Exprimarea în coordonate locale. Fie $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$ o hartă locală pe M şi γ o geodezică. Avem

$$(\varphi \circ \gamma)(t) = (x^1(t), \ldots, x^m(t))$$

şi

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) = \frac{D}{dt}\left(\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \ddot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{x}^i \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma\right) \\ &= \ddot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{x}^i \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Prin urmare γ este geodezică dacă şi numai dacă

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.3.1}$$

Notând $\dot{x}^i = y^i$, (1.3.1) devine

$$\begin{cases} y^i = \dot{x}^i \\ \dot{y}^k + \Gamma^k_{ij} y^i y^j = 0. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Prin urmare, oricare ar fi $p \in M$ şi oricare ar fi $v \in T_pM$, există şi este unică geodezica $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ astfel încât $\gamma(0) = p$ şi $\dot{\gamma}(0) = v$.

Exemplul 1.3.1. Considerăm $M = \mathbb{R}^m$ cu metrica euclideană uzuală. Atunci $\Gamma^k_{ij} = 0$, iar ecuaţia geodezicei se scrie

$$\ddot{x}^i(t) = 0.$$

Integrând, obţinem că geodezicele lui $\mathbb{R}^m$ sunt dreptele parametrizate proporţional cu lungimea de arc.

Exemplul 1.3.2. Considerăm $M = \mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1\}$ cu metrica indusă. Un câmp vectorial $X \in C(T\mathbb{S}^m)$ poate fi gândit ca un câmp vectorial pe $\mathbb{R}^{m+1}$ cu proprietatea $\langle x, X(x)\rangle = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{S}^m$. Se demonstrează uşor că conexiunea Levi-Civita ∇ pe $\mathbb{S}^m$ este dată de

$$(\nabla_X Y)_x = (\nabla_X^{\mathbb{R}^{m+1}} Y)_x + \langle X, Y\rangle_x x, \quad \forall x \in \mathbb{S}^m.$$

Fie acum $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^m$ o geodezică parametrizată cu lungimea de arc, adică $|\dot\gamma| = 1$. Atunci ea este un cerc mare al lui $\mathbb{S}^m$. Într-adevăr, avem

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \Leftrightarrow \ddot\gamma + \gamma = 0,$$

iar soluţia generală a sistemului $\ddot\gamma + \gamma = 0$ este

$$\gamma(t) = (\cos t)x + (\sin t)v,$$

unde $x, v \in \mathbb{R}^{m+1}$. Din $|\gamma(t)| = 1$ obţinem $|x| = |v| = 1$, adică $x, v \in \mathbb{S}^m$, iar din $|\dot\gamma(t)| = 1$ rezultă $x \perp v$, adică $\langle x, v\rangle = 0$. În concluzie, geodezicele lui $\mathbb{S}^m$ sunt cercurile mari parametrizate proporţional cu lungimea de arc.

În cele ce urmează vom încerca să "controlăm" domeniul de definiţie al geodezicelor. Vom admite fără demonstraţie următorul rezultat

Propoziţia 1.3.2. *Fie $p \in M$ fixat arbitrar. Atunci există U deschisă în $M, p \in U$, există $\delta > 0$ şi $\varepsilon > 0$, şi există o aplicaţie netedă*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times V \to M, \quad V = \{v \in T_qM : q \in U \text{ şi } |v| < \varepsilon\}$$

astfel încât curba $t \to \gamma(t, q, v), t \in (-\delta, \delta)$, este unica geodezică a lui M care la $t = 0$ trece prin q cu vectorul viteză v, oricare ar fi $q \in U$ şi oricare ar fi $v \in T_qM$ cu $|v| < \varepsilon$.

Deci, dacă $|v| < \varepsilon$, atunci geodezica $\gamma(t, q, v)$ este definită pe $(-\delta, \delta)$. De fapt putem mări viteza geodezicei prin micşorarea intervalului de definiţie şi invers. Acest lucru este dat de următorul rezultat

Propoziţia 1.3.3. (**Proprietatea de omogenitate a geodezicei**.) *Fie $\gamma = \gamma(t, q, v)$ geodezica definită pe $(-\delta, \delta)$ şi fie $a > 0$. Atunci geodezica $\gamma(t, q, av)$ este definită pe $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ şi în plus*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v), \quad \forall t \in \left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right).$$

Demonstraţie. Fie $h : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \to M$ curba definită prin

$$h(t) = \gamma(at, q, v).$$

Această curbă are următoarele proprietăţi:

$$h(0) = q, \quad \dot{h}(0) = av \quad \text{şi} \quad \frac{D}{dt}(\dot{h}) = 0.$$

Din unicitatea geodezicei, avem $h(t) = \gamma(t, q, av)$ şi deci $\gamma(t, q, av)$ este definită (cel puţin) pe $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$. $\square$

Observaţia 1.3.2. Desigur, rezultatul anterior este valabil şi pentru $a < 0$.

Din Propoziţiile 1.3.2 şi 1.3.3 putem obţine acelaşi interval de definiţie, suficient de mare, pentru geodezicele dintr-o vecinătate a lui p. Mai precis

Teorema 1.3.1. *Fie $p \in M$ fixat arbitrar. Atunci există U deschisă în M, $p \in U$, există $\varepsilon > 0$ şi există o aplicaţie netedă*

$$\gamma : (-2, 2) \times V \to M, \quad V = \{v \in T_qM : q \in U \text{ şi } |v| < \varepsilon\}$$

astfel încât curba $t \to \gamma(t, q, v), t \in (-2, 2)$, este unica geodezică a lui M care la $t = 0$ trece prin q cu vectorul viteză v, oricare ar fi $q \in U$ şi oricare ar fi $v \in T_qM$ cu $|v| < \varepsilon$.

Demonstraţie. Fie U, δ şi ε_1 daţi de Propoziţia 1.3.2. Prin urmare $\gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, este unica geodezică care la $t = 0$ trece prin q cu vectorul viteză v, $q \in U$ şi $|v| < \varepsilon_1$. Din Propoziţia 1.3.3, geodezica $\gamma(t, q, \frac{\delta v}{2})$ este definită pe $(-2, 2)$. Cum $|\frac{\delta v}{2}| < \frac{\delta \varepsilon_1}{2}$, alegem $\varepsilon \leq \frac{\delta \varepsilon_1}{2}$. $\square$

Teorema anterioară ne permite să introducem conceptul de aplicaţie exponenţială. Fie $p \in M$ şi U, ε daţi de Teorema 1.3.1. Aplicaţia

$$\exp : V \to M, \quad \exp(v) = \gamma(1, q, v)$$

se numeşte *aplicaţia exponenţială pe V*.

Propoziţia 1.3.4. *Avem următoarele*

i) $\gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|})$, *oricare ar fi* $v \in V\backslash\{0\}$, *adică* $\exp(v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|})$.

ii) *Pentru orice* $v \in V$ *există* $\delta > 0$ *astfel încât* $\exp(sv) = \gamma(s, q, v)$, $0 < s < 1 + \delta$.

Demonstraţie. i) Cum $|v| < \varepsilon$, geodezica $\gamma(t, q, v)$ este definită pe $(-2, 2)$. Din proprietatea de omogenitate, geodezica $\gamma(t, q, \frac{v}{|v|})$ este definită pe intervalul $(-2|v|, 2|v|)$ şi

$$\gamma\left(t, q, \frac{v}{|v|}\right) = \gamma\left(\frac{t}{|v|}, q, v\right), \quad \forall t \in (-2|v|, 2|v|).$$

În particular, pentru $t = |v| \in (-2|v|, 2|v|)$ obţinem relaţia dorită.

ii) Prima condiţie pe care trebuie să o satisfacă s este

$$s|v| < \varepsilon \Leftrightarrow s < \frac{\varepsilon}{|v|} = 1 + \delta_1, \quad \delta_1 > 0,$$

pentru a ne asigura de existenţa lui $\exp(sv)$. Notăm că δ_1 depinde de $|v|$. Fie $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$. Pentru $s < 1 + \delta$ avem şi $s < 2$, iar pe $(-\frac{2}{s}, \frac{2}{s})$, interval ce conţine 1, avem

$$\gamma(t, q, sv) = \gamma(st, q, v).$$

Pentru $t = 1$ obţinem relaţia dorită. $\square$

În general vom lucra cu restricţia exponenţialei la bila centrată în 0 şi cu raza ε, adică

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M, \quad v \mapsto \exp_q(v) = \exp(v).$$

Propoziţia 1.3.5. *Pentru orice* $q \in U$ *există* $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_1 < \varepsilon$, *astfel încât* $\exp_q : B_{\varepsilon_1}(0) \to M$ *este un difeomorfism de la* $B_{\varepsilon_1}(0)$ *pe imagine.*

Demonstraţie. Aplicaţia $\exp_q$ este definită pe $B^q_\varepsilon(0)$. Vom demonstra că $(d\exp_q)_0 : T_0B_\varepsilon(0) \to T_qM$ este un izomorfism, iar apoi vom obţine rezultatul folosind Teorema de Inversare Locală.

Cum $B_\varepsilon(0)$ este deschis în T_qM, identificăm $T_0B_\varepsilon(0)$ cu T_qM. Fie $v \in T_qM$. Curba $t \to tv$ este o curbă în T_qM care la $t = 0$ trece prin 0 cu vectorul viteză v. Presupunem că geodezica $\gamma(s, q, v)$ este definită pe $(-\delta, \delta)$. Atunci geodezica $\gamma(s, q, tv)$ va fi definită pe $(-\frac{\delta}{t}, \frac{\delta}{t})$ şi, pe acest interval, $\gamma(s, q, tv) = \gamma(ts, q, v)$. Pentru t suficient de mic $\frac{\delta}{t} > 1$, $|tv| < \varepsilon$ şi alegând $s = 1$ obţinem

$$\gamma(1, q, tv) = \gamma(t, q, v).$$

Prin urmare

$$\begin{aligned}(d\exp_q)_0(v) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\{\exp_q(tv)\} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\{\gamma(1,q,tv)\} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\{\gamma(t,q,v)\}\\ &= v,\end{aligned}$$

adică $(d\exp_q)_0$ este operatorul identitate a lui T_qM. □

Observaţia 1.3.3. Am definit $\exp_q$ pe $B_\varepsilon(0)$. Dar putem "mări" domeniul de definiţie. Dacă o geodezică $\gamma(t,q,v)$ este definită pe un interval ce conţine 1, vom defini $\exp_q(v) = \gamma(1,q,v)$, indiferent de lungimea lui v.

Exemplul 1.3.3. Fie $M = \mathbb{R}^m$. Geodezicele lui $\mathbb{R}^m$ sunt dreptele parametrizate proporţional cu lungimea de arc. Fie $p \in \mathbb{R}^m$. Avem identificarea $T_p\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m$, iar $\exp_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ este operatorul identitate.

Exemplul 1.3.4. Fie $M = \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Am văzut că geodezicele lui $\mathbb{S}^m$ sunt cercurile mari parametrizate prin lungimea de arc. Considerăm acum $p \in \mathbb{S}^m$. Deoarece geodezicele $\gamma(t,p,v)$ sunt definite pe $\mathbb{R}$, oricare ar fi $v \in T_p\mathbb{S}^m$, $\exp_p$ va fi definită pe tot $T_p\mathbb{S}^m$, adică $\exp_p : T_p\mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$. Se verifică imediat că

$$\exp_p(v) = \gamma\left(|v|, p, \frac{v}{|v|}\right) = \left((\cos t)p + (\sin t)\frac{v}{|v|}\right)\Big|_{t=|v|}$$

şi prin urmare $\exp_p$ transformă difeomorfic $B_\pi(0)$ în $\mathbb{S}^m\backslash\{-p\}$; mai mult, $\exp_p(\partial B_\pi(0)) = \{-p\}$, $\exp_p(B_{2\pi}(0)\backslash\overline{B_\pi(0)}) = \mathbb{S}^m\backslash\{\pm p\}, \exp_p(\partial B_{2\pi}(0)) = \{p\}$, etc.

Propoziţia 1.3.6. (**Existenţa coordonatelor normale**.) *Fie (M,g) o varietate riemanniană şi $p \in M$ fixat arbitrar. Atunci există $(U;\varphi) = (U;x^1,\ldots,x^m)$ hartă locală pe M astfel încât $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ şi $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.*

Demonstraţie. Fie $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to \exp_p(B_\varepsilon(0))$ difeomorfism. Considerăm $\{v_1,\ldots,v_m\}$ o bază ortonormată în T_pM şi operatorul liniar $T : T_pM \to \mathbb{R}^m$, $T(v_i) = e_i$, $i = 1,\ldots,m$, unde $\{e_i\}_{i=1,\ldots,m}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^m$. Desigur T este o izometrie. Definim harta locală $\varphi = T\circ\exp_p^{-1}$ şi vom arăta că φ are proprietăţile cerute. Într-adevăr,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = (d\varphi^{-1})_0(e_i) = (d(\exp_p\circ T^{-1}))_0(e_i) = T^{-1}(e_i) = v_i,$$

şi deci $g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.

Fie acum $\gamma(t, p, v)$ o geodezică, $|v| < \varepsilon$. Exprimarea ei în harta locală $(U; \varphi)$ este dată de

$$(\varphi \circ \gamma)(t) = T \circ \exp_p^{-1}(\gamma(t)) = T(tv) = tx, \quad |t| \leq 1,$$

unde $x = T(v)$. Deci, în lungul lui $\gamma(t)$ avem

$$\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) x^i x^j = 0.$$

În particular, $\Gamma_{ij}^k(p) x^i x^j = 0$. Cum v cu $|v| < \varepsilon$ a fost fixat arbitrar şi $\Gamma_{ij}^k(p) = \Gamma_{ji}^k(p)$, rezultă $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$. $\square$

Propoziţia 1.3.7. (**Existenţa bazei geodezice în jurul unui punct**.) *Fie (M, g) o varietate riemanniană şi $p \in M$ fixat arbitrar. Atunci există $X_1, \ldots, X_m$ câmpuri vectoriale definite pe o vecinătate U a lui p astfel încât $\langle X_i, X_j \rangle(q) = \delta_{ij}$, oricare ar fi $q \in U$, şi $(\nabla_{X_i} X_j)(p) = 0$.*

Mulţimea $\{X_1, \ldots, X_m\}$ din Propoziţia anterioară se numeşte *bază geodezică în jurul lui p*.

Demonstraţie. Fie $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to \exp_p(B_\varepsilon(0))$ difeomorfism. Considerăm $\{v_i\}_{i=1,\ldots,m}$ o bază ortonormată în T_pM. Fie $q \in U = \exp_p(B_\varepsilon(0))$ fixat arbitrar; atunci există şi este unică geodezica în U ce uneşte p cu q: $\gamma(t, p, \exp_p^{-1}(q)) = \exp_p(t \exp_p^{-1}(q))$, $t \in [0, 1]$. Transportăm în q, prin paralelism în lungul acestei geodezice, baza $\{v_i\}_{i=1,\ldots,m}$. În acest mod se obţin $X_1, \ldots, X_m \in C(TU)$, şi cum transportul prin paralelism este o izometrie, $\{X_i(q)\}_{i=1,\ldots,m}$ va fi o bază ortonormată oricare ar fi $q \in U$. Desigur $X_i(p) = v_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Fie $\gamma_i(t, p, \frac{\varepsilon}{2} v_i), 0 \leq t \leq 1$. Se verifică uşor că în lungul acestei geodezice avem $(\nabla_{X_i} X_j)(\gamma_i(t)) = 0$, $0 \leq t \leq 1$, $j = 1, \ldots, m$. $\square$

Lema 1.3.1. (**Gauss**.) *Fie (M, g) o varietate riemanniană şi $p \in M$ fixat arbitrar. Fie $v \in T_pM, |v| < \varepsilon$, şi considerăm $w \in T_pM \equiv T_v(T_pM)$. Atunci avem relaţia*

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Notăm că $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to M$ nu este neapărat difeomorfism. Atunci când este, vom menţiona acest lucru.

Demonstraţie. Din cauza liniarităţii diferenţialei şi a produsului scalar vom considera două cazuri: w paralel cu v şi w ortogonal cu v.

Cazul I. $w = av, a \in \mathbb{R}$. Pe o vecinătate a lui 1 avem

$$\exp_p(sv) = \gamma(s,p,v) \quad \text{şi} \quad \exp_p\{(1+(s-1)a)v\} = \gamma(1+(s-1)a,p,v).$$

Deci

$$(d\exp_p)_v(v) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=1}\{\exp_p(sv)\} = \dot\gamma(1,p,v),$$

iar

$$(d\exp_p)_v(w) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=1}\{\exp_p\{(1+(s-1)a)v\}\} = a\dot\gamma(1,p,v).$$

Prin urmare

$$\begin{aligned}\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w)\rangle &= \langle \dot\gamma(1,p,v), a\dot\gamma(1,p,v)\rangle \\ &= a|\dot\gamma(1,p,v)|^2 = a|\dot\gamma(0,p,v)|^2 = a|v|^2 \\ &= \langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

Cazul II. $w \perp v$. Fie $t \to v(t), t \in (-\widetilde{\delta}, \widetilde{\delta})$, o curbă în T_pM cu $v(0) = v$, $\dot v(0) = w$ şi $|v(t)| = |v|, t \in (-\widetilde{\delta}, \widetilde{\delta})$; $v(t)$ poate fi considerat un cerc de rază $|v|$ şi parametrizat proporţional cu lungimea de arc. Fie

$$F : (-1-\delta, 1+\delta) \times (-\widetilde{\delta}, \widetilde{\delta}) \to M, \quad (s,t) \mapsto F(s,t) = \exp_p(sv(t)).$$

Cum $s \to F(s,t) = \gamma(s,p,v(t))$ este o geodezică, $\frac{D}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right) = 0$. Avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s}(1,0) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=1}\{\exp_p(sv)\} = (d\exp_p)_v(v),\\ \frac{\partial F}{\partial t}(1,0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\{\exp_p(v(t))\} = (d\exp_p)_v(w),\end{aligned}$$

deci $\left\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle(1,0)$. Vrem să demonstrăm că $\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle(1,0) = 0$. Pentru orice (s,t) avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle &= \left\langle \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right), \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

Se demonstrează uşor că $\frac{D}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)$ şi prin urmare

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2\right).$$

Acum

$$\left|\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)\right|^2 = |\dot{\gamma}(s,p,v(t))|^2 = |\dot{\gamma}(0,p,v(t))|^2 = |v(t)|^2 = |v|,$$

deci $s \to \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle(s,t)$ este constantă. În particular

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle(1,0) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle(0,0).$$

Dar $\frac{\partial F}{\partial t}(0,0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\{\exp_p(0v(t))\} = 0$ şi prin urmare $\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle(1,0) = 0$. □

Vom da acum câteva definiţii. Dacă $\exp_p : V \to \exp_p(V)$ este un difeomorfism, unde V este un deschis în T_pM ce conţine 0, atunci $U = \exp_p(V)$ se numeşte *vecinătate normală* a lui p. Dacă $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, numim $\exp_p(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(p)$ *bilă normală* sau *bilă geodezică* cu centrul în p şi rază ε. Din Lema lui Gauss, bordul unei bile normale este o hipersuprafaţă în M ortogonală geodezicelor care pleacă din p (reamintim $\langle\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\rangle(1,0) = 0$) şi se notează cu $S_\varepsilon(p)$; $S_\varepsilon(p)$ se numeşte *sferă normală* sau *sferă geodezică în p*. Geodezicele din $B_\varepsilon(p)$ care pleacă din p se numesc *geodezice radiale*.

Vom demonstra acum că geodezicele minimizează, local, lungimea.

Propoziţia 1.3.8. *Fie (M,g) o varietate riemanniană şi $p \in M$ fixat arbitrar. Considerăm $B_\varepsilon(p)$ o bilă geodezică în p şi fie $\gamma : [0,1] \to B_\varepsilon(p)$ un* *segment geodezic cu* $\gamma(0) = p$. *Dacă* $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to M$ *este o curbă netedă pe porţiuni ce uneşte* $\gamma(0)$ *cu* $\gamma(1)$, *atunci* $\ell(\widetilde{\gamma}) \geq \ell(\gamma)$ *şi* $\ell(\gamma) = \ell(\widetilde{\gamma})$ *dacă şi numai dacă* $\gamma([0,1]) = \widetilde{\gamma}([0,1])$.

Demonstraţie. Presupunem că $\widetilde{\gamma}([0,1]) \subset B_\varepsilon(p)$ şi că $\widetilde{\gamma}(t) \neq p$, oricare ar fi $t \in (0,1]$ (dacă există $t_1 \in (0,1)$ astfel încât $\widetilde{\gamma}(t_1) = p$, vom ignora intervalul $[0,t_1)$). Cum $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to B_\varepsilon(p)$ este difeomorfism, curba $\widetilde{\gamma}(t)$ poate fi scrisă în mod unic

$$\widetilde{\gamma}(t) = \exp_p(r(t)v(t)) = F(r(t),t)$$

unde $|v(t)| = 1, t \in (0,1]$, iar $r : (0,1] \to (0,\varepsilon)$ este o funcţie netedă pe porţiuni cu $\lim\limits_{t\to 0} r(t) = 0$. Exceptând un număr finit de puncte avem:

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = \frac{\partial F}{\partial s}\dot{r} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \text{pe } (0,1]. \tag{1.3.3}$$

Cum $\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = (d\exp_p)_{sv(t)}(v(t))$, $\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = (d\exp_p)_{sv(t)}(s\dot{v}(t))$ şi $v(t) \perp \dot{v}(t)$, din Lema lui Gauss obţinem $\frac{\partial F}{\partial s} \perp \frac{\partial F}{\partial t}$. Tot din Lema lui Gauss obţinem şi $|\frac{\partial F}{\partial s}|^2 = 1$. Să facem observaţia că

$$\gamma(t) = \exp_p(t\exp_p^{-1}\gamma(1)) = \exp_p(tr(1)v(1))$$

şi $\ell(\gamma) = |r(1)v(1)| = r(1)$.

Din (1.3.3) şi din observaţiile anterioare obţinem

$$|\dot{\widetilde{\gamma}}|^2 = |\dot{r}|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \geq |\dot{r}|^2, \quad \text{pe } (0,1],$$

de unde

$$\int_\varepsilon^1 |\dot{\widetilde{\gamma}}|dt \geq \int_\varepsilon^1 |\dot{r}(t)|dt \geq \int_\varepsilon^1 \dot{r}(t)dt = r(1) - r(\varepsilon).$$

Prin urmare $\ell(\widetilde{\gamma}) \geq \lim\limits_{\varepsilon>0} \int_\varepsilon^1 |\dot{\widetilde{\gamma}}|dt = r(1) = \ell(\gamma)$.

Pentru a avea $\ell(\widetilde{\gamma}) = \ell(\gamma)$ trebuie să avem $\dot{r} > 0$ şi $\frac{\partial F}{\partial t}(r(t),t) = 0$. Dar cum $\exp_p$ este difeomorfism pe $B_\varepsilon(0)$, din $\frac{\partial F}{\partial t}(r(t),t) = 0$ obţinem $r(t)\dot{v}(t) = 0$, adică $v(t)$ este constant. Mai departe, $v(t)$ constant şi $\dot{r} > 0$ implică $\widetilde{\gamma}$ este o reparametrizare a lui γ, deci $\widetilde{\gamma}([0,1]) = \gamma([0,1])$.

Presupunem acum că $\widetilde{\gamma}([0,1])$ nu este conţinută în $B_\varepsilon(p)$. Fie $t_1 \in (0,1)$ primul punct în care $\widetilde{\gamma}$ intersectează $S_\varepsilon(p)$. Avem desigur $\ell(\widetilde{\gamma}) \geq \ell(\widetilde{\gamma}_{|[0,t_1]})$ şi aşa cum am văzut mai sus, $\ell(\widetilde{\gamma}_{|[0,t_1]}) \geq \ell(\gamma_1) = \varepsilon_1$, unde $\gamma_1(t) = \exp_p(t \exp_p^{-1} \widetilde{\gamma}(t_1))$. Prin urmare

$$\ell(\widetilde{\gamma}) \geq \ell(\widetilde{\gamma}_{|[0,t_1]}) \geq \varepsilon > \ell(\gamma).\square$$

Notăm că bila geodezică $B_\varepsilon(p)$ este şi bila centrată în p şi de rază ε dată de distanţă, adică

$$B_\varepsilon(p) = \{q \in M : d(p,q) < \varepsilon\}.$$

Observăm de asemenea că proprietatea de minimizare a geodezicei este locală. Dacă arcul de geodezică are lungimea suficient de mare, atunci el nu mai realizează minimul. De exemplu, geodezicele sferei care pleacă din p nu mai realizează minimul dacă ele trec prin $-p$. Dar, dacă o curbă netedă pe porţiuni realizează minimul, atunci ea este o geodezică. Pentru a demonstra acest lucru vom prezenta mai întâi, fără demonstraţie, următorul rezultat.

Teorema 1.3.2. *Pentru orice $p \in M$ există W deschisă în M, $p \in W$, şi există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $q \in W$, $\exp_q : B_\delta(0) \to \exp_q(B_\delta(0))$ este difeomorfism, iar $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$.*

Notăm că, din teorema de mai sus şi din proprietatea de minimizare locală a godezicei, oricare ar fi $q_1, q_2 \in W$ există o unică geodezică ce realizează minimul şi ea este de lungime strict mai mică decât δ. W se numeşte *vecinătate geodezică totală* a lui p.

Corolarul 1.3.1. *Dacă o curbă netedă pe porţiuni $\gamma : [a,b] \to M$ parametrizată proporţional cu lungimea de arc are lungimea mai mică sau egală cu lungimea oricărei alte curbe netedă pe porţiuni ce uneşte $\gamma(a)$ cu $\gamma(b)$, atunci γ este geodezică. În particular γ este netedă.*

Demonstraţie. Fie $t \in [a,b]$ fixat arbitrar şi W o vecinătate geodezică totală a lui $\gamma(t)$. Există un interval închis $I \subset [a,b], t \in I, \dot{I} \neq \emptyset$, astfel încât $\gamma(I) \subset W$. Restricţia $\gamma_{|I} : I \to M$ este o curbă netedă pe porţiuni care uneşte puncte din vecinătatea geodezică totală. Cum $\ell(\gamma)$ este cea mai mică dintre toate lungimile curbelor netede pe porţiuni ce unesc $\gamma(a)$ cu $\gamma(b)$, rezultă că $\ell(\gamma_{|I})$ este mai mică dintre toate curbele netede pe porţiuni ce unesc cele două puncte ale lui γ din W. Dar am văzut că asta implică $\ell(\gamma_{|I})$ este egală cu lungimea geodezicei radiale ce uneşte cele două puncte. Mai mult, cum $\gamma_{|I}$ este parametrizată proporţional cu lungimea de arc rezultă că $\gamma_{|I}$ este geodezică şi deci $\gamma_{|I}$ este netedă pe I. $\square$

1.4. Forma volum şi integrarea pe o varietate riemanniană

Fie $(V_m, \langle , \rangle)$ un spaţiu euclidean finit dimensional şi $\{v_1, \dots, v_m\}$ o bază în V_m. Definim paralelipipedul m-dimensional prin

$$\mathcal{P}(v_1, \dots, v_m) = \left\{ v = \sum_{i=1}^{m} a^i v_i : a^i \in [0,1] \right\}.$$

Vrem să definim volumul lui $\mathcal{P}(v_1, \dots, v_m)$. Pentru aceasta considerăm $\{e_1, \dots, e_m\}$ o bază ortonormată şi scriem $v_i = a_i^k e_k$. Definim

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{P}(v_1, \dots, v_m)) = |\det(a_i^k)|.$$

Se verifică uşor că definiţia este corectă, adică nu depinde de baza ortonormată $\{e_i\}_{i=1,\dots,m}$ folosită. Mai mult,

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle a_i^k e_k, a_j^h e_h \rangle = a_i^k a_j^h \delta_{kh} = \sum_k a_i^k a_j^k,$$

de unde rezultă $(\langle v_i, v_j \rangle) = {}^T\!AA$, unde $A = (a_i^k)$. Obţinem $G(v_1, \dots, v_m) = (\det A)^2$, unde $G(v_1, \dots, v_m) = \det(\langle v_i, v_j \rangle)$ este determinantul Gram asociat vectorilor $\{v_1, \dots, v_m\}$. Prin urmare, putem scrie

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{P}(v_1, \dots, v_m)) = \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}.$$

Considerăm acum (M, g) o varietate riemanniană. Fie $p \in M$ şi $(U; \varphi) = (U; x^1, \dots, x^m)$ o hartă locală pe M în p. Definim

$$(v_g)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) = \mathrm{Vol} \left(\mathcal{P} \left(\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}(p) \right) \right) = \sqrt{\det G(p)}.$$

Dacă $(\widetilde{U};\widetilde{\varphi}) = (\widetilde{U};\widetilde{x}^1,\ldots,\widetilde{x}^m)$ este o altă hartă locală pe M în p, atunci

$$g_{ij} = \frac{\partial\widetilde{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial\widetilde{x}^h}{\partial x^j}\widetilde{g}_{kh},$$

adică $G(p) = {}^T(D(\widetilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))\widetilde{G}(p)D(\widetilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))$, şi deci
(1.4.1)

$$(v_g)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right) = (v_g)_p\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^m}\right)|\det D(\widetilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))|.$$

Considerăm $D\subset U$, D compactă. Definim

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D) &= \int_{\varphi(D)} v_g\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right) dx^1\ldots dx^m\\ &= \int_{\varphi(D)}\sqrt{\det G}\, dx^1\ldots dx^m.\end{aligned}$$

Din (1.4.1) şi din formula de schimbare de variabilă în integrala multiplă rezultă că definiţia Vol(D) este corectă, adică nu depinde de harta locală $(U;\varphi)$ folosită.

Presupunem acum că varietatea M este compactă. Fie $\{U_a\}_{a=1,\ldots,l}$ o acoperire deschisă şi finită a lui M cu domenii de harţi locale, iar $\{f_a\}_{a=1,\ldots,l}$ o partiţie a unităţii subordonată acoperirii $\{U_a\}$. Definim *volumul varietăţii* (M,g) prin

$$\mathrm{Vol}(M) = \sum_{a=1}^{l}\int_{\varphi_a(U_a)} f_a\sqrt{\det G}\, dx^1\ldots dx^m.$$

Se demonstrează uşor că definiţia este corectă, adică nu depinde de acoperirea aleasă şi nici de partiţia unităţii subordonată ei.

În aceeaşi manieră putem defini integrarea funcţiilor continue pe M, M compactă. Fie f o funcţie continuă. Definim

$$\int_M f\,\overline{v}_g = \sum_{a=1}^{l}\int_{\varphi_a(U_a)} f_a f\sqrt{\det G}\, dx^1\ldots dx^m$$

şi se verifică imediat că definiţia este corectă.

Mai departe, presupunem că M este orientabilă. Fixăm o orientare şi definim

$$(v_g)_p = \sqrt{\det G(p)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m,$$

unde $(U; x^1, \ldots, x^m)$ este o hartă locală pozitiv orientată pe M în p. Din (1.4.1) rezultă că $(v_g)_p \in \Lambda^m T_p^* M$ are caracter geometric şi lăsând punctul p liber se obţine $v_g \in C(\Lambda^m T^* M) = \Lambda^m(M)$. Notăm că v_g este o formă volum, adică o formă de grad maxim care nu se anulează în nici un punct. Construcţia lui v_g depinde de orientarea aleasă pe M; dacă se schimbă orientarea, se schimbă şi semnul lui v_g.

Notăm că, dacă M este compactă şi orientabilă, iar f este o funcţie continuă pe M, atunci integrarea m-formei $f v_g$ nu depinde de orientarea aleasă pe M deoarece atât v_g cât şi integrarea m-formelor depind până la semn de orientare. Mai mult,

$$\int_M f\, \overline{v}_g = \int_M f v_g.$$

1.5. Divergenţa unui câmp vectorial

Fie (M, g) o varietate riemanniană orientabilă şi $X \in C(TM)$ un câmp vectorial pe M. Fixând o orientare construim $v_g \in \Lambda^m(M)$. Dacă aplicăm produsul interior şi apoi operatorul diferenţiala exterioară obţinem

$$i_X v_g \in \Lambda^{m-1}(M) \quad \text{şi} \quad d(i_X v_g) \in \Lambda^m(M).$$

Cum $v_g(p) \neq 0$, pentru orice $p \in M$, rezultă că există şi este unică funcţia netedă notată $\operatorname{div} X$ astfel încât

$$d(i_X v_g) = (\operatorname{div} X) v_g. \tag{1.5.1}$$

Se observă că definiţia divergenţei nu depinde de orientarea fixată.

Putem da şi o altă caracterizare a divergenţei

$$(\operatorname{div} X) v_g = d i_X v_g = (\mathcal{L}_X - i_X d) v_g = \mathcal{L}_X v_g \tag{1.5.2}$$

şi prin urmare $\operatorname{div} X = 0$ dacă şi numai dacă $\phi_t^* v_g = v_g$, unde $\{\phi_t\}_t$ este fluxul determinat de X.

Prezentăm acum o proprietate a divergenţei foarte des utilizată.

Teorema 1.5.1. *Fie (M, g) o varietate riemanniană orientabilă şi compactă, iar $X \in C(TM)$. Atunci*

$$\int_M (\operatorname{div} X) v_g = 0.$$

Demonstraţie. Cum peste tot în această lucrare M este presupusă fără bord, din Teorema lui Stokes avem

$$\int_M (\operatorname{div} X) v_g = \int_M d(i_X v_g) = \int_{\partial M} i_X v_g = 0.\square$$

Din (1.5.1), sau (1.5.2), se vede că div : $C(TM) \to C^\infty(M)$ este un operator $\mathbb{R}$-liniar. El nu este $C^\infty(M)$-liniar, dar verifică o regulă de tip Leibniz şi deci el este un operator local. Într-adevăr,

Propoziţia 1.5.1. *Pentru orice $X \in (TM)$ şi $f \in C^\infty(M)$ avem*

$$\operatorname{div}(fX) = Xf + f\operatorname{div} X.$$

Demonstraţie. Din (1.5.1) obţinem

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}(fX))v_g &= di_{fX}v_g = d(fi_X v_g) = df \wedge i_X v_g + f d i_X v_g \\ &= df \wedge i_X v_g + f(\operatorname{div} X) v_g.\end{aligned}$$

Dar, cum $df \wedge v_g = 0$, avem

$$\begin{aligned}0 &= i_X(df \wedge v_g) = (i_X df) v_g - df \wedge i_X v_g \\ &= (Xf) v_g - df \wedge i_X v_g\end{aligned}$$

şi înlocuind obţinem

$$(\operatorname{div}(fX))v_g = (Xf)v_g + f(\operatorname{div} X)v_g.\square$$

Exprimarea în coordonate locale. Fie $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$ o hartă locală pe M. Notăm $X = \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$; avem

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{div} X) v_g &= d i_X(\sqrt{\det G} d^m x) \\
&= d(\sqrt{\det G} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k(X) \wedge \ldots \wedge dx^m) \\
&= d(\sqrt{\det G} \sum_{k=1}^{m} \xi^k (-1)^{k-1} dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \ldots \wedge dx^m) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(\xi^k \sqrt{\det G})}{\partial x^k} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k \wedge \ldots \wedge dx^m \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial(\xi^k \sqrt{\det G})}{\partial x^k} v_g,
\end{aligned}
$$

adică

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial(\xi^k \sqrt{\det G})}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} + \frac{\xi^k}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} + \xi^k \frac{\partial(\ln \sqrt{\det G})}{\partial x^k} \right). \qquad (1.5.3)
\end{aligned}
$$

Observaţia 1.5.1. Dacă $M = \mathbb{R}^m$, atunci $\operatorname{div} X = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k}$, adică regăsim formula cunoscută.

Dorim acum să definim divergenţa unui câmp vectorial şi pentru varietăţi neorientabile, iar dacă M este compactă şi neorientabilă, vrem să demonstrăm că

$$\int_M (\operatorname{div} X)\, \overline{v}_g = 0.$$

Fie deci (M, g) o varietate riemanniană neorientabilă şi $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un câmp vectorial pe M. Definim $\operatorname{div} X$ prin (1.5.3) şi vrem să arătăm că definiţia are caracter geometric, adică nu depinde de harta locală $(U; \varphi)$ folosită. Acest lucru este asigurat de

Propoziţia 1.5.2. *Dacă* ∇ *este conexiunea Levi-Civita a lui* (M, g), *atunci*

$$\operatorname{div} X = \operatorname{trace}(Z \to \nabla_Z X).$$

Observaţia 1.5.2. Deoarece $Z \to \nabla_Z X$ este un operator $C^\infty(M)$-liniar, noţiunea $\operatorname{trace}(Z \to \nabla_Z X)$ are caracter geometric.

Demonstraţie. În expresia divergenţei

$$\operatorname{div} X = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} + \frac{\xi^k}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^k} \right),$$

vrem să evaluăm $\frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^k}$. Avem

$$\frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^k} = \frac{1}{2\sqrt{\det G}} \frac{\partial (\det G)}{\partial x^k} = \frac{1}{2\sqrt{\det G}} \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} G^{ij},$$

unde G^{ij} este complementul algebric al elementului g_{ij}. Dar $g^{ij} = \frac{G^{ji}}{\det G}$ şi deci $G^{ji} = (\det G) g^{ij} = G^{ij}$. Prin urmare

$$\frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^k} = \frac{1}{2\sqrt{\det G}} \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} g^{ij} (\det G) = \frac{\sqrt{\det G}}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} g^{ij}.$$

Mai departe, din relaţia $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}$ obţinem

$$\sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} g^{ij} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} g^{ij} + \Gamma^l_{kj} g_{il} g^{ij} = \sum_i \Gamma^i_{ki} + \sum_j \Gamma^j_{kj} = 2 \sum_i \Gamma^i_{ki}.$$

Prin urmare

$$\frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^k} = \frac{\sqrt{\det G}}{2} 2 \sum_i \Gamma^i_{ki} = \sqrt{\det G} \sum_i \Gamma^i_{ki}.$$

Înlocuind în formula divergenţei obţinem

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} + \xi^k \sum_i \Gamma^i_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} + \sum_{k,i}\xi^i\Gamma^k_{ik}\\ &= \sum_k\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} + \Gamma^k_{ki}\xi^i\right) = \sum_k \nabla_k \xi^k\\ &= \operatorname{trace}(Z \to \nabla_Z X).\square\end{aligned}$$

Pentru a demonstra că şi în cazul neorientabil $\int_M (\operatorname{div} X)\,\overline{v}_g = 0$, reamintim

Definiţia 1.5.1. Fie $\widetilde{M}$ şi M două varietăţi. $\widetilde{M}$ se numeşte *varietate de acoperire* a lui M dacă există o aplicaţie $\pi : \widetilde{M} \to M$, numită *proiecţie*, astfel încât pentru orice $p \in M$

i) $\pi^{-1}(p)$ este un spaţiu discret F,

ii) există o vecinătate deschisă U a lui p în M astfel încât $\pi^{-1}(U)$ este un deschis în $\widetilde{M}$ difeomorf cu $U \times F$.

Prin urmare, fiecare punct $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ are o vecinătate $V \subset \widetilde{M}$ astfel încât $\pi_{|V} : V \to \pi(V)$ este difeomorfism.

Dacă F este format din două puncte, $\pi : \widetilde{M} \to M$ se numeşte *acoperire cu două foi* a lui M. De exemplu, proiecţia canonică $\pi : \mathbb{S}^n \to P^n(\mathbb{R})$ este o acoperire cu două foi a spaţiului proiectiv real n-dimensional $P^n(\mathbb{R})$.

Prezentăm fără demonstraţie următoarea teoremă

Teorema 1.5.2. *Dacă M nu este orientabilă, atunci M are o acoperire cu două foi $\widetilde{M}$ orientabilă. Dacă M este simplu conexă atunci M este orientabilă.*

Considerăm acum M compactă şi neorientabilă. Am văzut că există $\pi : \widetilde{M} \to M$ o acoperire cu două foi a lui M astfel încât $\widetilde{M}$ este compactă şi orientabilă. Definim metrica $\widetilde{g} = \pi^* g$ pe M şi câmpul $\widetilde{X} \in C(T\widetilde{M})$ astfel încât $d\pi_{\widetilde{p}}(\widetilde{X}_{\widetilde{p}}) = X_{\pi(\widetilde{p})}$, oricare ar fi $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$. Cum local π este o izometrie, avem $\operatorname{div} \widetilde{X} = (\operatorname{div} X) \circ \pi$.

Demonstrăm acum că dacă f este continuă pe M, atunci

$$\int_{\widetilde{M}} (f \circ \pi)\, \overline{v}_{\widetilde{g}} = 2 \int_M f \overline{v}_g.$$

Într-adevăr, fie $\{U_p\}_{p \in M}$ o acoperire deschisă a lui M, unde U_p este o vecinătate deschisă a lui p astfel încât $\pi^{-1}(U_p)$ este difeomorfă cu $U_p \times F$, F fiind formată din două puncte. Cum M este compactă, extragem o subacoperire finită $\{U_{p_a}\}_{a=1,\dots,l}$. Fie $\{f_a\}_{a=1,\dots,l}$ o partiţie a unităţii subordonată acoperirii $\{U_{p_a}\}$. Atunci $\{\pi^{-1}(U_{p_a})\}$ este o acoperire a lui $\widetilde{M}$, iar $\{f_a \circ \pi\}$ este o partiţie a unităţii subordonată. Avem

$$\int_{\widetilde{M}} (f \circ \pi)\, \overline{v}_g = \sum_{a=1}^{l} \int_{\widetilde{M}} (f_a \circ \pi)(f \circ \pi)\, \overline{v}_{\widetilde{g}} = 2 \sum_{a=1}^{l} \int_M f_a f\, \overline{v}_g = 2 \int_M f\, \overline{v}_g.$$

Pentru $f = \operatorname{div} X$ obţinem

$$\int_{\widetilde{M}} (\operatorname{div} \widetilde{X})\, \overline{v}_{\widetilde{g}} = \int_{\widetilde{M}} (\operatorname{div} \widetilde{X}) v_{\widetilde{g}} = 0 = 2 \int_M (\operatorname{div} X)\, \overline{v}_g. \square$$

1.6. Izomorfismele muzicale

Fie (M, g) o varietate riemanniană şi $p \in M$ un punct fixat arbitrar. Produsul scalar $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ induce un izomorfism

$$\flat : T_pM \to T_p^*M, \quad X_p \mapsto X_p^\flat, \quad X_p^\flat(Y_p) = g(X_p, Y_p), \quad \forall Y_p \in T_pM.$$

$\flat$ este corect definit, adică $X_p^\flat$ este într-adevăr un covector. Mai mult, se verifică uşor că $\flat$ este un izomorfism de la spaţiul tangent T_pM la spaţiul cotangent T_p^*M. Notăm

$$\sharp = \flat^{-1} : T_p^*M \to T_pM, \quad \theta_p \mapsto \theta_p^\sharp,$$

şi avem relaţia

$$g_p(\theta_p^\sharp, Y_p) = \theta_p(Y_p), \quad \forall Y_p \in T_pM.$$

Putem aborda aceste corespondenţe în maniera globală. Aplicaţia

$$\flat : C(TM) \to \Lambda^1(M) = C(T^*M), \quad X \mapsto X^\flat, \quad X^\flat(Y) = g(X, Y)$$

este bine definită, adică $X^\flat \in \Lambda^1(M)$, este $C^\infty(M)$-liniară şi este bijecţie. Notăm

$$\sharp = \flat^{-1} : \Lambda^1(M) \to C(TM), \quad \theta \mapsto \theta^\sharp$$

şi avem

$$g(\theta^\sharp, Y) = \theta(Y), \quad \forall Y \in C(TM).$$

Exprimarea în coordonate locale. Fie $(U;\varphi) = (U; x^1, \dots, x^m)$ o hartă locală pe M. Considerăm $X \in C(TM)$, $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ şi $\theta \in \Lambda^1(M), \theta = \theta_i dx^i$. Vrem să calculăm $X^\flat$ şi $\theta^\sharp$. Cum $X^\flat\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g(X, \frac{\partial}{\partial x^i}) = \xi^j g_{ji}$, obţinem

$$(X^\flat)_i = g_{ij}\xi^j, \quad \text{adică} \quad X^\flat = (\xi^j g_{ji})dx^i.$$

Din $g(\theta^\sharp, \frac{\partial}{\partial x^i}) = \theta(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \theta_i$, obţinem $(\theta^\sharp)^j g_{ji} = \theta_i$, de unde

$$(\theta^\sharp)^h = \theta_i g^{ih}, \quad \text{adică} \quad \theta^\sharp = (\theta_i g^{ih})\frac{\partial}{\partial x^h}.$$

Propoziţia 1.6.1. *Fie (M,g) o varietate riemanniană. Conexiunea Levi-Civita ∇ comută cu izomorfismele muzicale, adică $\nabla_X \theta^\sharp = (\nabla_X \theta)^\sharp$.*

Demonstraţie. Din $g(\theta^\sharp, Y) = \theta(Y)$, derivând în raport cu X obţinem

$$\begin{aligned}
&Xg(\theta^\sharp, Y) = X(\theta(Y)), \quad \forall Y \in C(TM),\\
\Leftrightarrow\ &(\nabla_X g)(\theta^\sharp, Y) + g(\nabla_X \theta^\sharp, Y) + g(\theta^\sharp, \nabla_X Y) = (\nabla_X \theta)(Y) + \theta(\nabla_X Y)\\
\Leftrightarrow\ &g(\nabla_X \theta^\sharp, Y) = (\nabla_X \theta)(Y) = g((\nabla_X \theta)^\sharp, Y)\\
\Leftrightarrow\ &\nabla_X \theta^\sharp = (\nabla_X \theta)^\sharp. \square
\end{aligned}$$

Extinderi ale metricii g. Pe fibratul vectorial $T_1^0(M) = T^*M$ putem defini o metrică riemanniană astfel (vom păstra aceeaşi notaţie ”g” pentru noua metrică)

$$g : \Lambda^1(M) \times \Lambda^1(M) \to C^\infty(M), \quad (\theta, \omega) \mapsto g(\theta, \omega) = g(\theta^\sharp, \omega^\sharp).$$

Se verifică imediat că g astfel definită este într-adevăr o metrică riemanniană pe T^*M.

Exprimarea în coordonate locale. Cu notaţiile obişnuite avem

$$\begin{aligned} g(\theta,\omega) &= g(\theta^\sharp,\omega^\sharp) = g\left(\theta_i g^{ih}\frac{\partial}{\partial x^h}, \omega_j g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \theta_i g^{ih}\omega_j g^{jk} g_{hk} \\ &= \theta_i g^{ik}\omega_k. \end{aligned}$$

Notăm că metrica definită pe T^*M coincide cu g^{-1} definit anterior.

Fie acum $S = S_1 \otimes S_2$ şi $T = T_1 \otimes T_2$, unde $S_1, T_1 \in C(TM)$, iar $S_2, T_2 \in \Lambda^1(M)$. Definim

$$g(S,T) = g(S_1,T_1)g(S_2,T_2)$$

şi se verifică uşor că g este o metrică riemanniană pe fibratul $T_1^1(M) = TM \otimes T^*M$.

Exprimarea în coordonate locale. Dacă $S = S^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ şi $T = T^k_l \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^l$ atunci $g(S,T) = S^i_j T^k_l g_{ik} g^{jl}$.

Observaţia 1.6.1. Dacă privim $S, T \in C(T_1^1(M))$ ca aplicaţii $C^\infty(M)$-liniare de la $C(TM)$ în $C(TM)$, atunci, alegând $\{X_i\}_{i=1,\dots,m}$ o bază ortonormată, definim

$$g(S,T) = \sum_{i=1}^m g(S(X_i), T(X_i)).$$

Definiţia are caracter geometric, adică nu depinde de bază ortonormată aleasă, şi coincide cu cea anterioară.

Analog, g se poate extinde la orice fibrat $T^k_l(M)$. Aşa cum ştim, şi conexiunea Levi-Civita se extinde la orice fibrat $T^k_l(M)$, respectând regula de tip Leibniz. Metrica şi conexiunea de pe $T^k_l(M)$ astfel obţinute sunt compatibile, adică $\nabla g = 0$. Notăm că pentru conexiunea ∇ de pe $T^k_l(M)$ nu mai putem defini torsiunea şi, în general, dată o metrică riemanniană pe $T^k_l(M)$ pot exista mai multe conexiuni compatibile cu ea.

Pe o varietate riemanniană orientabilă (M, g), fixând o orientare, am definit forma volum $v_g \in \Lambda^m(M)$. Demonstrăm acum că ea este paralelă în raport cu conexiunea liniară de pe $T^0_m(M)$.

Propoziţia 1.6.2. *Dacă* (M, g) *este o varietate riemanniană orientabilă, atunci* $\nabla v_g = 0$.

Demonstraţie. Fie $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$ o hartă locală pe M pozitiv orientată. Vom demonstra că $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} v_g = 0$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} v_g &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \sqrt{\det G}\, d^m x = \frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^i} d^m x + \sqrt{\det G}\, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d^m x \\
&= \frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^i} d^m x + \sqrt{\det G} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \\
&= \frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^i} d^m x + \sqrt{\det G} \sum_{k=1}^{m} dx^1 \wedge \ldots \wedge (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^k) \wedge \ldots \wedge dx^m \\
&= \frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^i} d^m x + \sqrt{\det G} \sum_{k=1}^{m} dx^1 \wedge \ldots \wedge (-\Gamma^k_{ih} dx^h) \wedge \ldots \wedge dx^m \\
&= \frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^i} d^m x - \sqrt{\det G} \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ik} d^m x \\
&= \left(\frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^i} - \sqrt{\det G} \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ik} \right) d^m x.
\end{aligned}$$

Dar am văzut anterior că $\frac{\partial \sqrt{\det G}}{\partial x^i} = \sqrt{\det G} \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ik}$. Prin urmare $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} v_g = 0$. □

1.7. Câmpurile tensoriale Riemann-Christoffel şi Ricci

Fie (M, g) o varietate riemanniană şi ∇ conexiunea Levi-Civita asociată. Reamintim expresia *câmpului tensorial de curbură* $R \in C(T^1_3(M))$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

cu exprimarea în coordonate locale

$$R^h_{kij} = \frac{\partial \Gamma^h_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^h_{il} \Gamma^l_{jk} - \Gamma^h_{jl} \Gamma^l_{ik},$$

unde

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^h_{kij}\frac{\partial}{\partial x^h}.$$

Cu ajutorul metricii g, prin "operaţiunea de coborâre a indicelui", putem obţine un nou câmp tensorial $\mathcal{R} \in C(T^0_4(M))$, numit *câmpul tensorial Riemann-Christoffel*, astfel

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)W, Z), \quad \forall X, Y, Z, W \in C(TM).$$

După cum vom vedea, acest tensor are un rol fundamental în definirea curburii secţionale pe o varietate riemanniană.

Exprimarea în coordonate locale. Fie $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$ o hartă locală pe M. Avem

$$R_{ijkl} = \mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = g_{kh}R^h_{lij}.$$

Vom prezenta, fără demonstraţie, următoarele proprietăţi de natură algebrică ale lui $\mathcal{R}$.

Propoziţia 1.7.1. *Avem*

i) $\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = -\mathcal{R}(X, Y, W, Z)$, *adică antisimetria în ultimele două argumente,*

ii) $\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = -\mathcal{R}(Y, X, Z, W)$, *adică antisimetria în primele două argumente,*

iii) $\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = \mathcal{R}(Z, W, X, Y)$, *adică simetria în perechi,*

iv) $\mathcal{R}(X, Y, Z, W)+\mathcal{R}(X, Z, W, Y)+\mathcal{R}(X, W, Y, Z) = 0$, *adică prima identitate Bianchi.*

Din proprietatea iii) obţinem că $\mathcal{R}_{ijkl} = g_{ih}R^h_{jkl}$, adică am "coborât indicele". Evident, nu toate componentele $\mathcal{R}_{ijkl}$ ale lui $\mathcal{R}$ sunt esenţiale. Din cele 4 proprietăţi din Propoziţia 1.7.1, se poate demonstra că numărul componentelor esenţiale este $\frac{m^2(m^2-1)}{12}$. Dacă $m = 2$ este esenţială doar componenta R_{1212}, dacă $m = 3$ sunt esenţiale 6 componente: R_{1212}, R_{1313},

R_{2323}, R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}, dacă $m = 4$ sunt esenţiale 20 de componente, etc.

Tot din câmpul tensorial de curbură se obţine şi *câmpul tensorial Ricci.* El este un câmp tensorial de tip $(0,2)$, adică Ricci$\in C(T_2^0(M))$, şi este definit de

$$\mathrm{Ricci}(X,Y) = \mathrm{trace}\{Z \to R(Z,X)Y\}.$$

Notăm că definiţia tensorului Ricci nu s-a făcut prin intermediul metricii.

Exprimarea în coordonate locale. Fie $(U;\varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$ o hartă locală pe M. Avem

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \mathrm{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \mathrm{trace}\left\{Z \to R\left(Z, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right\} = \sum_k R^k_{jki} = g^{kh}R_{hjki} \\ &= g^{hk}R_{hjki}. \end{aligned}$$

Din proprietăţile tensorului $\mathcal{R}$ obţinem

$$R_{ij} = g^{hk}R_{hjki} = g^{hk}R_{kihj} = g^{kh}R_{kihj} = R_{ji},$$

adică Ricci este simetric. Prin intermediul metricii g putem privi tensorul Ricci ca un câmp tensorial de tip $(1,1)$, prin operaţiunea de "ridicare a indicelui"

$$g(\mathrm{Ricci}(X), Y) = \mathrm{Ricci}(X,Y), \quad \forall X, Y \in C(TM).$$

În coordonate locale, $R^i_j = g^{ik}R_{kj}$.

Dacă facem urma tensorului Ricci obţinem *curbura scalară* notată $\sigma(R)$

$$\sigma(R) = \mathrm{trace}\,\mathrm{Ricci} = g^{ij}R_{ij} = \sum_i R^i_i = g^{ij}g^{kl}R_{kilj}.$$

Notăm că a doua identitate Bianchi conduce la o relaţie care leagă derivata covariantă a câmpului tensorial Ricci de derivata curburii scalare. Într-adevăr, din

$$\nabla_l R^h_{kij} + \nabla_i R^h_{kjl} + \nabla_j R^h_{kli} = 0,$$

făcând $h = l$ şi sumând obţinem

$$\nabla_l R^l_{kij} - \nabla_i R_{kj} + \nabla_j R_{ki} = 0.$$

Multiplicând cu g^{kj} avem

$$\nabla_l (g^{kj} R^l_{kij}) = \nabla_i \sigma(R) - \nabla_j R^j_i.$$

Dar $g^{kj} R^l_{kij} = g^{kj} g^{lh} R_{hkij} = g^{lh} R_{hi} = R^l_i$ şi înlocuind găsim

$$\nabla_j R^j_i = \frac{1}{2} \nabla_i \sigma(R) \text{ sau } \operatorname{trace}\{Z \to \nabla \operatorname{Ricci}(Z, X)\} = \frac{1}{2} X \sigma(R).$$

Observaţia 1.7.1. În dimensiune 2 tensorul Ricci este proporţional cu metrica. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
R_{11} &= g^{ij} R_{i1j1} = g^{22} R_{2121} = \frac{g_{11}}{\det G} R_{1212} = \frac{R_{1212}}{\det G} g_{11}, \\
R_{12} &= g^{ij} R_{i1j2} = g^{21} R_{2112} = -g^{21} R_{1212} = -\left(-\frac{g_{21}}{\det G}\right) R_{1212} = \frac{R_{1212}}{\det G} g_{12}, \\
R_{22} &= g^{ij} R_{i2j2} = g^{11} R_{1212} = \frac{g_{22}}{\det G} R_{1212} = \frac{R_{1212}}{\det G} g_{22}.
\end{aligned}$$

Prin urmare Ricci $= fg$, unde

$$f = \frac{R_{1212}}{\det G} = \frac{\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}.$$

Vom vedea în secţiunea următoare că f este curbura secţională, sau gaussiană, a lui M^2. O varietate riemanniană (M^m, g) de dimensiune $m \geq 2$ se numeşte *varietate Einstein* dacă Ricci $= fg$. Prin urmare orice varietate 2-dimensională este Einstein. Dacă $m > 2$ şi (M, g) este Einstein, se demonstrează că f este o constantă.

1.8. Curbura secţională

Fie (M, g) o varietate riemanniană şi $\alpha = \operatorname{span}\{X_1, X_2\} \subset T_p M$ un subspaţiu vectorial 2-dimensional al lui T_pM. Definim *curbura secţională a lui* (M, g) *în direcţia planului* α ca fiind numărul real

$$K(\alpha) = \frac{\mathcal{R}(X_1, X_2, X_1, X_2)}{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - (g(X_1, X_2))^2}. \tag{1.8.1}$$

Observaţia 1.8.1. Se verifică uşor că definiţia are caracter geometric, adică dacă $\alpha = \mathrm{span}\{X_1, X_2\} = \mathrm{span}\{Y_1, Y_2\}$, atunci

$$\frac{\mathcal{R}(X_1, X_2, X_1, X_2)}{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - (g(X_1, X_2))^2} = \frac{\mathcal{R}(Y_1, Y_2, Y_1, Y_2)}{g(Y_1, Y_1)g(Y_2, Y_2) - (g(Y_1, Y_2))^2}.$$

Observaţia 1.8.2. Din inegalitatea

$$(g(X_1, X_2))^2 < g(X_1, X_1)g(X_2, X_2),$$

pentru X_1 neparalel cu X_2, rezultă că numitorul din (1.8.1) este strict pozitiv.

Ştim că mulţimea $G_k(\mathbb{R}^m)$ a subspaţiilor vectoriale k-dimensionale ale lui $\mathbb{R}^m$ se poate organiza ca o varietate diferenţiabilă de dimensiune $k(m-k)$ (varietatea Grassmann). Deci, dacă M este o varietate şi $p \in M$, atunci

$$\{\alpha : \alpha \text{ este subspaţiu vectorial 2-dimensional în } T_pM\} = G_2(T_pM).$$

Lăsând punctul p liber obţinem

$$G_2(M) = \bigcup_{p \in M} G_2(T_pM)$$

care este un fibrat diferenţiabil. Acum putem privi curbura secţională ca o funcţie $K : G_2(M) \to \mathbb{R}$.

Din formula (1.8.1) vedem că tensorul Riemann-Christoffel determină curbura secţională K. Avem şi reciproca, adică K determină $\mathcal{R}$. Aceasta rezultă din

Propoziţia 1.8.1. *Dacă* $R_1, R_2 : T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ *sunt două aplicaţii 4-liniare ce au proprietăţile tensorului Riemann-Christoffel şi dacă, în plus,*

$$R_1(X_1, X_2, X_1, X_2) = R_2(X_1, X_2, X_1, X_2), \quad \forall X_1, X_2 \in T_pM$$

atunci $R_1 = R_2$.

Demonstraţia este pur algebrică şi poate fi găsită în [12] sau [30].

Definim câmpul tensorial $\mathcal{R}_0 \in C(T_4^0 M)$ prin

$$\mathcal{R}_0(X, Y, Z, W) = g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z).$$

Se verifică uşor că $\mathcal{R}_0$ are proprietaţile algebrice ale câmpului tensorial $\mathcal{R}$. Mai mult,

$$K(\alpha) = \frac{\mathcal{R}(X_1, X_2, X_1, X_2)}{\mathcal{R}_0(X_1, X_2, X_1, X_2)}.$$

Rezultă acum

Propoziţia 1.8.2. *$K(\alpha) = c$, oricare ar fi $\alpha \in G_2(T_p M)$, dacă şi numai dacă $\mathcal{R}_p = c\mathcal{R}_{0,p}$.*

Observaţia 1.8.3. Dacă $m = 2$, atunci pentru $p \in M$ avem un singur subspaţiu 2-dimensional în $T_p M$, $T_p M$ însuşi, şi prin urmare putem privi K drept o funcţie definită pe M. Dacă $(U; \varphi) = (U; x^1, x^2)$ este o hartă locală atunci

$$K = \frac{\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)}{g\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) g\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right) - \left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\right)^2} = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}.$$

Se demonstrează că în cazul suprafeţelor în $\mathbb{R}^3$, curbura secţională coincide cu cea gaussiană. Pe de o parte curbura secţională este dată numai în termeni de g_{ij}, iar pe de altă parte curbura gaussiană este definită ca fiind produsul celor două valori proprii ale operatorului Weingarten asociat suprafeţei şi deci ar depinde de poziţia sa în $\mathbb{R}^3$. Egalitatea celor două noţiuni arată că, de fapt, curbura gaussiană este invariantă la izometrii ale suprafeţei (teorema EGREGIUM), şi deci curbura gaussiană nu se modifică la transformări inextensibile ale suprafeţei.

Teorema 1.8.1. (**Schur**.) *Dacă (M^m, g) este o varietate riemanniană cu $m \geq 3$, astfel încât în orice punct al ei funcţia K nu depinde de planul α, deci K poate fi gândită ca o funcţie pe M, atunci K este constantă pe M.*

Nu vom prezenta demonstraţia acestui rezultat, ea putând fi urmărită, de exemplu, în [12] sau [30].

Aşa cum am văzut anterior, (M, g) are curbura secţională constantă c dacă şi numai dacă $\mathcal{R} = c\mathcal{R}_0$, adică

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = c\{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\}.$$

1.9. Câmpurile vectoriale Killing

Fie (M, g) o varietate riemanniană şi X un câmp vectorial având fluxul $\{\phi_t\}_t$. Ştim că ϕ_t este un difeomorfism local (dacă M este compactă atunci ϕ_t este un difeomorfism global) şi o întrebare naturală este când ϕ_t este o izometrie (locală), adică $\phi_t^* g = g$ sau $\phi_t^* \langle , \rangle = \langle , \rangle$.

Definiţia 1.9.1. Un câmp vectorial X pe o varietate riemanniană (M, g) se numeşte *câmp vectorial Killing* dacă $\mathcal{L}_X g = 0$, adică $\phi_t^* g = g$ pentru orice t.

Propoziţia 1.9.1. *Un câmp vectorial X este Killing dacă şi numai dacă*

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0, \quad \forall Y, Z \in C(TM). \tag{1.9.1}$$

În particular, dacă X este Killing atunci $\langle \nabla_X X, X \rangle = 0$ şi deci $|X|^2$ este constantă în lungul lui $t \to \phi_p(t)$.

Demonstraţie. Din formula derivatei Lie pentru câmpurile tensoriale de tip $(0, 2)$ obţinem:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \\
&= X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) \\
&= X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\
&\quad + g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \\
&= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X). \square
\end{aligned}$$

Exprimarea în coordonate locale. Fie $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$ o hartă locală pe M şi $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un câmp vectorial. Atunci X este Killing dacă şi numai dacă

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0.$$

Propoziţia 1.9.2. *Fie (M, g) o varietate riemanniană şi X un câmp Killing. Atunci*

i) $\operatorname{div} X = 0$,

ii) $\nabla^2 X(Y, Z) + R(X, Y) Z = 0$,

iii) $\operatorname{trace} \nabla^2 X + \operatorname{Ricci}(X) = 0$.

Demonstraţie. i) Fie $p \in M$ şi $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ o bază ortonormată în T_pM. Considerând în (1.9.1) $Y = Z = X_i$ şi sumând obţinem $\operatorname{div} X = 0$.

ii) Vom demonstra această relaţie folosind coordonatele locale. Considerăm $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$ o hartă locală pe M. Avem

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0.$$

Derivând covariant şi făcând permutări ciclice obţinem

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_i \xi_j + \nabla_k \nabla_j \xi_i &= 0, \\ \nabla_i \nabla_j \xi_k + \nabla_i \nabla_k \xi_j &= 0, \\ \nabla_j \nabla_k \xi_i + \nabla_j \nabla_i \xi_k &= 0. \end{aligned}$$

Înmulţind ultima relaţie cu (-1) şi adunând obţinem

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_i \nabla_j \xi_k - \nabla_j \nabla_i \xi_k) + (\nabla_k \nabla_j \xi_i - \nabla_j \nabla_k \xi_i) \\ &\quad + 2\nabla_k \nabla_i \xi_j + (\nabla_i \nabla_k \xi_j - \nabla_k \nabla_i \xi_j). \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

Reamintim acum formula de comutare Ricci pentru 1-forme

$$\nabla_i \nabla_j \xi_k - \nabla_j \nabla_i \xi_k = -R^h_{kij} \xi_h.$$

Înlocuind în (1.9.2) găsim

$$-(R^h_{kij} + R^h_{ikj} + R^h_{jik})\xi_h + 2\nabla_k \nabla_i \xi_j = 0. \tag{1.9.3}$$

Utilizând prima identitate Bianchi, (1.9.3) devine

$$2R^h_{kji}\xi_h + 2\nabla_k \nabla_i \xi_j = 0 \tag{1.9.4}$$

şi prin operaţiunea de ridicare a indicelui obţinem

$$\nabla_k \nabla_i \xi^l + R^l_{ihk}\xi^h = 0.$$

iii) Rezultă din ii) făcând urma. $\square$

În cazul în care M este compactă, putem da o reciprocă a propoziţiei anterioare.

Teorema 1.9.1. *Fie (M, g) o varietate riemanniană compactă şi $X \in C(TM)$. Dacă $\operatorname{div} X = 0$ şi $\operatorname{trace} \nabla^2 X + \operatorname{Ricci}(X) = 0$, atunci X este Killing.*

Demonstraţie. Fie X un câmp vectorial arbitrar pe M. Atunci are loc următoarea formulă integrală

$$\int_M \{\langle \operatorname{trace} \nabla^2 X + \operatorname{Ricci}(X), X\rangle + \frac{1}{2}|\mathcal{L}_X g|^2 - (\operatorname{div} X)^2\}\, \overline{v}_g = 0.$$

Demonstraţia acestei formule o vom face mai târziu.

Este evident acum că, în ipotezele teoremei, X este Killing. □

1.10. Operatori pe varietăţi riemanniene

În cele ce urmează vom introduce câţiva operatori des folosiţi în geometria riemanniană. În general, vom omite demonstraţiile care sunt tehnice şi de natură algebrică. Aceste demonstraţii pot fi găsite în monografiile [26], [18] etc.

Fie (M, g) o varietate riemanniană orientabilă. Fixăm o orientare şi construim forma volum v_g.

Propoziţia 1.10.1. *Există şi este unic operatorul $* : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{m-r}(M)$ definit de*

$$\alpha \mapsto *\alpha, \quad (*\alpha)(X_1, \ldots, X_{m-r})v_g = \alpha \wedge X_1^\flat \wedge \ldots \wedge X_{m-r}^\flat,$$

oricare ar fi $X_1, \ldots, X_{m-r} \in C(TM)$.

Operatorul $*$ se numeşte *operatorul adjunct.*
Se verifică imediat că $*$ este o aplicaţie $C^\infty(M)$-liniară şi că semnul ei depinde de orientarea fixată. De asemeni se verifică relaţiile

$$*1 = v_g, \quad *v_g = 1, \quad **\alpha = (-1)^{r(m-r)}\alpha = (-1)^{r(m-1)}\alpha.$$

Propoziţia 1.10.2. *Homomorfismul $* : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{m-r}(M)$ este un izomorfism iar $*^{-1} = (-1)^{r(m-r)}*$.*

Aici, $\Lambda^r(M)$ este gândit ca spaţiu vectorial real infinit dimensional. Fie $\alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$. În coordonate locale scriem

$$\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_r} \alpha_{i_1\ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} = \frac{1}{r!}\alpha_{i_1\ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$$

şi

$$\beta = \sum_{j_1<\ldots<j_r} \beta_{j_1\ldots j_r} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r} = \frac{1}{r!}\beta_{j_1\ldots j_r} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r}.$$

Definim $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{r!}\alpha_{i_1\ldots i_r} g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_r j_r} \beta_{j_1\ldots j_r}$.

Observaţia 1.10.1. Dacă privim $\alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$ ca fiind câmpuri tensoriale de tip $(0, r)$, atunci

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha_{i_1\ldots i_r} g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_r j_r} \beta_{j_1\ldots j_r}.$$

Coeficientul $\frac{1}{r!}$ se foloseşte din motive "estetice", aşa cum reiese din rezultatul următor.

Se demonstrează că

Propoziţia 1.10.3. *Pentru $\alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$ avem:*

$$\alpha \wedge (*\beta) = \beta \wedge (*\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle \, v_g.$$

Teorema 1.10.1. *Dacă (M, g) este o varietate riemanniană compactă şi orientabilă, atunci $(\, , \,) : \Lambda^r(M) \times \Lambda^r(M) \to \mathbb{R}$ definită de*

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge (*\beta) = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle \, v_g$$

este un produs scalar pe $\Lambda^r(M)$ şi în plus

$$(*\alpha, *\beta) = (\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^r(M),$$

adică $* : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{m-r}(M)$ este o izometrie.

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}(*\alpha, *\beta) &= \int_M (*\alpha) \wedge (**\beta) = (-1)^{r(m-r)} \int_M (*\alpha) \wedge \beta \\ &= (-1)^{r(m-r)+(m-r)r} \int_M \beta \wedge (*\alpha) = (\beta, \alpha) \\ &= (\alpha, \beta). \square\end{aligned}$$

Notăm că produsul scalar $(,)$ nu depinde de orientare.

Definiţia 1.10.1. Fie (M, g) o varietate riemanniană orientabilă. Pentru orice r natural definim homomorfismul

$$\delta : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r-1}(M), \quad \delta = (-1)^r *^{-1} d * .$$

δ se numeşte *codiferenţiala exterioară.*

Se observă că operatorul δ nu depinde de orientarea fixată şi nu este $C^\infty(M)$-liniar. În coordonate locale, dacă

$$\alpha = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r},$$

atunci

$$(\delta\alpha)_{i_1 \ldots i_{r-1}} = -g^{ij} \nabla_i \alpha_{j i_1 \ldots i_{r-1}} = -\nabla^j \alpha_{j i_1 \ldots i_{r-1}}.$$

Propoziţia 1.10.4. *Codiferenţiala satisface* $\delta^2 = 0$.

Definiţia 1.10.2. Homomorfismul $\Delta : \Lambda^r(M) \to \Lambda^r(M)$, definit de

$$\Delta = d \circ \delta + \delta \circ d$$

se numeşte *laplaceanul* varietăţii (M, g).

Notăm că Δ nu este $C^\infty(M)$-liniar.
Printr-un calcul direct se pot verifica următoarele
1) $\Delta = (d + \partial)^2$,
2) $d \circ \Delta = \Delta \circ d$,
3) $\delta \circ \Delta = \Delta \circ \delta$.

Definiţia 1.10.3. O formă $\alpha \in \Lambda^r(M)$ se numeşte *armonică* dacă $\Delta\alpha = 0$.

Propoziţia 1.10.5. *Fie (M, g) o varietate riemanniană orientabilă şi compactă. Atunci*

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta), \quad \forall \alpha \in \Lambda^r(M) \quad \text{şi} \quad \forall \beta \in \Lambda^{r+1}(M),$$

adică d şi δ sunt operatori adjuncţi în raport cu produsul scalar $(\,,\,)$.

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge (*\beta)) &= (d\alpha) \wedge (*\beta) + (-1)^r \alpha \wedge (d * \beta) \\ &= (d\alpha) \wedge (*\beta) + (-1)^r \alpha \wedge ((-1)^{r+1} * \delta\beta) \\ &= (d\alpha) \wedge (*\beta) - \alpha \wedge (*\delta\beta). \end{aligned}$$

Din Teorema lui Stokes obţinem

$$(d\alpha, \beta) = \int_M (d\alpha) \wedge (*\beta) = \int_M \alpha \wedge (*\delta\beta) = (\alpha, \delta\beta).\square$$

În cele ce urmează vom presupune (M, g) orientabilă şi compactă.

Corolarul 1.10.1. *Fie α şi β două forme de grad r pe M. Avem*

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta),$$

adică operatorul $\Delta : \Lambda^r(M) \to \Lambda^r(M)$ este autoadjunct în raport cu produsul scalar $(\,,\,)$.

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha, \beta) &= (d\delta\alpha + \delta d\alpha, \beta) = (d\delta\alpha, \beta) + (\delta d\alpha, \beta) \\ &= (\delta\alpha, \delta\beta) + (d\alpha, d\beta) = (\alpha, d\delta\beta) + (\alpha, \delta d\beta) \\ &= (\alpha, \Delta\beta).\square \end{aligned}$$

Propoziţia 1.10.6. *O formă $\alpha \in \Lambda^r(M)$ este armonică dacă şi numai dacă $d\alpha = 0$ şi $\delta\alpha = 0$.*

Demonstraţie. Dacă $d\alpha = 0$ şi $\delta\alpha = 0$, atunci evident $\Delta\alpha = 0$. Reciproc, dacă $\Delta\alpha = 0$, atunci $(\Delta\alpha, \alpha) = 0$ şi deci $(\delta\alpha, \delta\alpha) = (d\alpha, d\alpha) = 0$, adică $d\alpha = \delta\alpha = 0$.□

Corolarul 1.10.2. *Orice formă armonică este închisă.*

Vom prezenta fără demonstraţie formula lui Weitzenböck (demonstraţia poate fi urmărită in [18]).

Teorema 1.10.2. *Dacă* $\alpha \in \Lambda^r(M), r \geq 1$, *atunci*

$$\Delta\alpha = -\operatorname{trace} \nabla^2\alpha + S(\alpha).$$

Aici r-forma $S(\alpha)$ este definită de

$$S_p(\alpha)(Y_1, \ldots, Y_r) = \sum_{\substack{1\leq a\leq r \\ 1\leq i\leq m}} (-1)^a (R(Y_a, X_i)\alpha)(X_i, Y_1, \ldots, \widehat{Y}_a, \ldots, Y_r),$$

unde $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ este o bază ortonormată în T_pM, $Y_1, \ldots, Y_r \in T_pM$, iar

$$(R(X,Y)\sigma)(X_1, \ldots, X_r) = -\sum_{a=1}^{r} \sigma(X_1, \ldots, R(X,Y)X_a, \ldots, X_r),$$

pentru $\sigma \in \Lambda^r(M)$ şi $X, Y \in C(TM)$. În particular, dacă $r = 1$ atunci

$$\Delta\alpha = -\operatorname{trace} \nabla^2\alpha + \alpha(\mathrm{Ricci}) = (-g^{ij}\nabla_i\nabla_j\alpha_k + R^i_k\alpha_i)dx^k,$$

unde $(\alpha(\mathrm{Ricci}))(X) = \alpha(\mathrm{Ricci}(X))$, oricare ar fi $X \in C(TM)$, iar

$$\frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) = \langle\Delta\alpha, \alpha\rangle - |\nabla\alpha|^2 - \sum_{i=1}^{m} \alpha(\mathrm{Ricci}(X_i))\alpha(X_i).$$

În cazul $r = 0$, avem

$$\begin{aligned} \Delta f &= \delta df = -\operatorname{trace} \nabla df = -\operatorname{trace} \nabla^2 f \\ &= -g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right), \end{aligned}$$

iar

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = (\Delta f)f - |\mathrm{grad}\, f|^2.$$

Vom nota cu $B^r(M)$ imaginea operatorului $d : \Lambda^{r-1}(M) \to \Lambda^r(M)$, adică $B^r(M) = d(\Lambda^{r-1}(M))$, sau, altfel spus, $B^r(M)$ este subspaţiul formelor exacte de grad r. Cu $B_r(M)$ vom nota imaginea operatorului $\delta : \Lambda^{r+1}(M) \to \Lambda^r(M)$, adică $B_r(M)$ este subspaţiul formelor coexacte de grad r, iar cu $\mathcal{H}^r(M)$ vom nota nucleul operatorului $\Delta : \Lambda^r(M) \to \Lambda^r(M)$, adică $\mathcal{H}^r(M)$ este subspaţiul formelor armonice de grad r.

Reamintim că $H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$, unde $Z^r(M)$ este subspaţiul formelor închise de grad r, adică $Z^r(M)$ este nucleul operatorului $d : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$.

Propoziţia 1.10.7. *O formă α de grad r este ortogonală pe $B^r(M)$ dacă şi numai dacă $\delta\alpha = 0$.*

Demonstraţie. Presupunem că $\delta\alpha = 0$ şi fie $\beta \in \Lambda^{r-1}(M)$. Avem

$$(\alpha, d\beta) = (\delta\alpha, \beta) = 0$$

şi prin urmare $\alpha \perp B^r(M)$. Reciproc, presupunem că $\alpha \perp B^r(M)$. Cum $d\delta\alpha \in B^r(M)$ avem

$$0 = (\alpha, d\delta\alpha) = (\delta\alpha, \delta\alpha),$$

adică $\delta\alpha = 0$. □

Propoziţia 1.10.8. *O formă α de grad r este ortogonală pe $B_r(M)$ dacă şi numai dacă $d\alpha = 0$.*

Demonstraţie. Presupunem că $d\alpha = 0$ şi fie $\beta \in \Lambda^{r+1}(M)$. Avem

$$(\alpha, \delta\beta) = (d\alpha, \beta) = 0$$

şi deci $\alpha \perp B_r(M)$. Reciproc, presupunem că $\alpha \perp B_r(M)$. Cum $\delta d\alpha \in B_r(M)$ avem:

$$0 = (\alpha, \delta d\alpha) = (d\alpha, d\alpha),$$

adică $d\alpha = 0$. □

Propoziţia 1.10.9. *Subspaţiile* $B^r(M), B_r(M)$ *şi* $\mathcal{H}^r(M)$ *din* $\Lambda^r(M)$ *sunt ortogonale două câte două.*

Demonstraţie. Din Propoziţia 1.10.7 rezultă că $B_r(M) \perp B^r(M)$ şi $\mathcal{H}^r(M) \perp B^r(M)$, iar din Propoziţia 1.10.8 rezultă că $B^r(M) \perp B_r(M)$ şi $\mathcal{H}^r(M) \perp B_r(M)$. $\square$

Propoziţia 1.10.10. *O formă* α *de grad* r *este nulă dacă şi numai dacă* $\alpha \perp B^r(M), \alpha \perp B_r(M)$ *şi* $\alpha \perp \mathcal{H}^r(M)$.

Demonstraţie. Dacă $\alpha \perp B^r(M)$ şi $\alpha \perp B_r(M)$, atunci $d\alpha = \delta\alpha = 0$ adică $\alpha \in \mathcal{H}^r(M)$. Cum $\alpha \perp \mathcal{H}^r(M)$ va rezulta că şi $(\alpha, \alpha) = 0$, adică $\alpha = 0$. $\square$

De fapt avem

Teorema 1.10.3. (**Hodge-de Rham**.) *Spaţiul* $\Lambda^r(M)$ *este suma directă a subspaţiilor* $B^r(M), B_r(M)$ *şi* $\mathcal{H}^r(M)$, *adică*

$$\Lambda^r(M) = B^r(M) \oplus B_r(M) \oplus \mathcal{H}^r(M).$$

Nu vom prezenta aici demonstraţia.

Corolarul 1.10.3. *Fiecare clasă de coomologie din* $H^r(M)$ *conţine o formă armonică şi numai una.*

Demonstraţie. Fie $h : \Lambda^r(M) \to \mathcal{H}^r(M)$ operatorul proiector. Considerăm $[\alpha] \in H^r(M)$, unde $d\alpha = 0$. Cum $d\alpha = 0$, rezultă $\alpha \perp B_r(M)$, adică $\alpha \in B^r(M) \oplus \mathcal{H}^r(M)$, şi scriem $\alpha = h(\alpha) + d\beta$, unde $\beta \in \Lambda^{r-1}(M)$. Dacă $\widetilde{\alpha} = \alpha + d\omega$, $\omega \in \Lambda^{r-1}(M)$, atunci

$$\widetilde{\alpha} = h(\widetilde{\alpha}) + d\widetilde{\beta} = h(\alpha) + d(\beta + \omega).$$

Cum $\mathcal{H}^r(M) \perp B^r(M)$, obţinem $h(\widetilde{\alpha}) = h(\alpha)$. $\square$

Corolarul 1.10.4. *Homomorfismul* $H^r(M) \to \mathcal{H}^r(M)$ *este un izomorfism.*

Notăm că $H^r(M)$ nu depinde de metrică ci doar de topologia lui M, în timp ce $\mathcal{H}^r(M)$ a fost obţinut cu ajutorul metricii. Prin urmare există o strânsă legătură între structura topologică şi cea metrică.

Observaţia 1.10.2. În tot ce am făcut în această secţiune am presupus că M este orientabilă. Dacă M nu este orientabilă putem defini codiferenţiala şi laplaceanul prin

$$(\delta\alpha)_{i_1\ldots i_{r-1}} = -\nabla^j \alpha_{j i_1 \ldots i_{r-1}}, \quad \alpha \in \Lambda^r(M) \quad \text{şi} \quad \Delta = d\delta + \delta d.$$

Trecând la acoperirea cu două foi, putem demonstra că dacă M este compactă şi neorientabilă, atunci $\Delta\alpha = 0$ dacă şi numai dacă $d\alpha = \delta\alpha = 0$; se menţine şi izomorfismul $H^r(M) \to \mathcal{H}^r(M)$.

Reamintim că dacă M este compactă, orientabilă sau nu, atunci dimensiunea spaţiului $H^r(M)$ este finită şi notată cu $b_r(M)$ (numărul lui Betti). Prezentăm acum un rezultat care leagă existenţa unei metrici riemanniene de curbură Ricci strict pozitivă de primul număr al lui Betti, deci de topologia lui M.

Teorema 1.10.4. *Fie (M, g) o varietate riemanniană compactă. Avem*

i) *dacă curbura Ricci este strict pozitivă, adică* $\mathrm{Ricci}(X_p, X_p) > 0$*, oricare ar fi $X_p \in T_pM \setminus \{0\}$ şi oricare ar fi $p \in M$, atunci $b_1(M) = 0$,*

ii) *dacă curbura Ricci este pozitivă, atunci $b_1(M) \leq m$,*

iii) *dacă curbura Ricci este pozitivă şi $b_1(M) = m$, atunci (M, g) este izometrică cu un tor plat m-dimensional.*

Demonstraţie. Ţinând cont de izomorfismul $H^1(M) \to \mathcal{H}^1(M)$, considerăm $\alpha \in \mathcal{H}^1(M)$. Dar $\alpha \in \mathcal{H}^1(M)$ implică $d\alpha = 0$ şi $\delta\alpha = 0$, adică

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} \quad \text{şi} \quad \nabla^i \alpha_i = 0.$$

Se observă că $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}$ implică $\nabla_j \alpha_i = \nabla_i \alpha_j \Leftrightarrow \nabla_j \alpha^k = \nabla^k \alpha_j$. Reamintim acum formula de comutare Ricci

$$\nabla_i \nabla_j \alpha^k - \nabla_j \nabla_i \alpha^k = R^k_{hij} \alpha^h.$$

Facem $k = i$ şi sumând obţinem

$$\nabla_i \nabla_j \alpha^i - \nabla_j \nabla_i \alpha^i = R_{hj} \alpha^h.$$

Cum $\nabla^i \alpha_i = 0$, adică $\nabla_i \alpha^i = 0$, ultima relaţie se scrie

$$\nabla_i \nabla_j \alpha^i = R_{hj} \alpha^h.$$

Înmulţind cu α^j obţinem

$$\alpha^j R_{hj} \alpha^h = \alpha^j \nabla_i \nabla_j \alpha^i = \nabla_i (\alpha^j \nabla_j \alpha^i) - (\nabla_i \alpha^j)(\nabla_j \alpha^i). \tag{1.10.1}$$

Notăm $\xi^i = \alpha^j \nabla_j \alpha^i$. Evident (ξ^i) sunt componentele unui câmp vectorial $\xi \in C(TM)$, iar $\nabla_i (\alpha^j \nabla_j \alpha^i) = \operatorname{div} \xi$.

Pentru $\alpha \in \Lambda^1(M)$ avem

$$\begin{aligned} |\nabla \alpha^{\#}|^2 &= (\nabla_i \alpha^j) g^{ia} g_{jb} (\nabla_a \alpha^b) = (\nabla_i \alpha_b)(\nabla^i \alpha^b) = (\nabla_i \alpha_b) g^{ih} g^{bk} (\nabla_h \alpha_k) \\ &= |\nabla \alpha|^2. \end{aligned}$$

Cum, în cazul nostru, $\nabla_j \alpha^i = \nabla^i \alpha_j$,

$$\begin{aligned} (\nabla_i \alpha^j)(\nabla_j \alpha^i) &= (\nabla_i \alpha^j)(\nabla^i \alpha_j) = (\nabla_i \alpha_b) g^{bj} (\nabla^i \alpha_j) \\ &= (\nabla_i \alpha_b)(\nabla^i \alpha^b) \\ &= |\nabla \alpha|^2. \end{aligned}$$

Prin urmare relaţia (1.10.1) se scrie sub forma

$$\operatorname{Ricci}(\alpha^{\#}, \alpha^{\#}) = \operatorname{div} \xi - |\nabla \alpha|^2.$$

Integrând obţinem

$$\int_M \operatorname{Ricci}(\alpha^{\#}, \alpha^{\#}) \, \overline{v}_g = - \int_M |\nabla \alpha|^2 \, \overline{v}_g. \tag{1.10.2}$$

Acum

i) Dacă curbura Ricci este strict pozitivă, din relaţia (1.10.2) rezultă $\alpha = 0$.

ii) Dacă curbura Ricci este pozitivă, atunci rezultă $\nabla \alpha = 0$ (şi deasemenea $\operatorname{Ricci}(\alpha, \alpha) = 0$). Dar o formă cu derivata covariantă nulă este unic determinată de valoarea ei într-un punct. Deci $b_1(M) = \dim\{\alpha \in \Lambda^1(M) : \nabla \alpha = 0\} \leq m$.

iii) Nu vom prezenta aici demonstraţia. □

1.11. Spectrul unei varietăţi riemanniene

Fie (M, g) o varietate riemanniană. Peste tot în această secţiune vom presupune că M este compactă. Reamintim că $\Delta f = \delta df = -\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f$.

Definiţia 1.11.1. Numim *spectrul* varietăţii (M, g) totalitatea numerelor reale $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care există $f \in C^\infty(M), f \neq 0$, astfel încât $\Delta f = \lambda f$.

Funcţia f se numeşte *funcţie proprie* corespunzătoare *valorii proprii* λ.

Vom nota
$$V_\lambda = \{f \in C^\infty(M) : \Delta f = \lambda f, f \neq 0\} \cup \{0\}.$$
V_λ este spaţiu vectorial real. Prezentăm, fără demonstraţie, următorul rezultat

Teorema 1.11.1. *Avem*

i) *spectrul varietăţii (M, g) constă dintr-o infinitate numărabilă de valori proprii pozitive, distribuite în mod discret pe axa reală, astfel încât dacă ele sunt ordonate în sens strict crescător*
$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$
atunci $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$ *şi seria* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}$ *converge,*

ii) $\dim V_{\lambda_k} < \infty$*, oricare ar fi* λ_k*, iar pentru* $k \neq j$ *avem* $V_{\lambda_j} \perp V_{\lambda_k}$ *în raport cu produsul scalar* $(,)$ *pe* $C^\infty(M)$*,*

iii) $\oplus_{k\geq 0} V_{\lambda_k}$ *este densă în* $C^\infty(M)$ *în raport cu topologia indusă de* $(,)$.

Aici
$$(,) : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \quad (f, h) = \int_M f h\, \overline{v}_g,$$
iar $(C^\infty(M), (,))$ este un spaţiu prehilbertian.

Vom prezenta în continuare un rezultat care exprimă influenţa tensorului Ricci asupra primei valori proprii nenule, λ_1, a laplaceanului.

Teorema 1.11.2. (**Lichnerowicz.**) *Fie (M, g) o varietate riemanniană compactă. Dacă există o constantă strict pozitivă c astfel încât*
$$\mathrm{Ricci}(X, X) \geq c g(X, X), \quad \forall X \in C(TM),$$

atunci

$$\lambda_1 \geq \frac{m}{m-1} c.$$

Demonstraţie. Fie $f \in C^\infty(M)$. Din formula lui Weitzenböck pentru forme de grad 1 am văzut că avem

$$\frac{1}{2}\Delta |df|^2 = \langle \Delta df, df \rangle - |\nabla df|^2 - \sum_i df(\mathrm{Ricci}(X_i)) df(X_i), \tag{1.11.1}$$

unde $\{X_i\}$ este o bază ortonormată în T_pM. Notăm că

$$\sum_i df(\mathrm{Ricci}(X_i)) df(X_i) = \mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f),$$

$|df|^2 = |\mathrm{grad}\, f|^2$ şi $\Delta df = d\Delta f$. Prin urmare (1.11.1) se rescrie

$$\frac{1}{2}\Delta |df|^2 = \langle d\Delta f, df \rangle - |\nabla df|^2 - \mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f). \tag{1.11.2}$$

Integrând şi ţinând cont de ipoteză obţinem

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_M (\Delta f)^2 \, \overline{v}_g + \int_M |\nabla df|^2 \, \overline{v}_g + \int_M \mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f) \, \overline{v}_g \\ &\geq \int_M |\nabla df|^2 \, \overline{v}_g + c \int_M |\mathrm{grad}\, f|^2 \, \overline{v}_g - \int_M (\Delta f)^2 \, \overline{v}_g. \end{aligned}$$

Notăm că dacă $\Delta f = \lambda_1 f$ atunci

$$\int_M (\Delta f)^2 \, \overline{v}_g = \lambda_1 \int_M f \Delta f \, \overline{v}_g = \lambda_1 \int_M |\mathrm{grad}\, f|^2 \, \overline{v}_g.$$

Înlocuind în ultima inegalitate rezultă

$$0 \geq \int_M |\nabla df|^2 \, \overline{v}_g + \left(\frac{c}{\lambda_1} - 1 \right) \int_M (\Delta f)^2 \, \overline{v}_g. \tag{1.11.3}$$

Dar din inegalitatea lui Cauchy avem

$$\begin{aligned} |\nabla df|^2 &= \sum_{i,j} (\nabla df(X_i, X_j))^2 \\ &\geq \sum_i (\nabla df(X_i, X_i))^2 \geq \frac{1}{m} \left(\sum_i \nabla df(X_i, X_i) \right)^2 \\ &= \frac{1}{m} (\Delta f)^2, \end{aligned}$$

şi înlocuind în (1.11.3) obţinem

$$0 \geq \left(\frac{1}{m} + \frac{c}{\lambda_1} - 1 \right) \int_M (\Delta f)^2 \, \overline{v}_g. \tag{1.11.4}$$

Cum $\int_M (\Delta f)^2 \, \overline{v}_g > 0$, din (1.11.4) rezultă $(\frac{1}{m} + \frac{c}{\lambda_1} - 1) \leq 0$, adică $\lambda_1 \geq \frac{mc}{m-1}$. $\square$

Vom defini în continuare doi laplaceeni pe $C(TM)$, spaţiu vectorial infinit dimensional. Notăm mai întâi că pe $C(TM)$ putem defini produsul scalar

$$(X, Y) = \int_M \langle X, Y \rangle \, \overline{v}_g.$$

Dacă $X \in C(TM) = C(T_0^1(M))$, atunci $\nabla X \in C(T_1^1(M))$ şi $\nabla^2 X = \nabla\nabla X \in C(T_2^1(M))$ unde

$$\nabla^2 X(Y, Z) = (\nabla_Y \nabla X)(Z) = \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{\nabla_Y Z} X.$$

Reamintim aici formula de comutare Ricci

$$(\nabla^2 X)(Y, Z) - (\nabla^2 X)(Z, Y) = R(Y, Z)X$$

şi deci, dacă varietatea (M, g) nu este plată, atunci $\nabla^2 X$ nu este un tensor simetric.

Definim $\overline{\Delta} X = -\operatorname{trace} \nabla^2 X$ şi avem

Propoziţia 1.11.1. *Operatorul $X \to \overline{\Delta} X$ este un operator $\mathbb{R}$-liniar, simetric şi pozitiv definit în raport cu $(,)$.*

Demonstraţie. $\mathbb{R}$-liniaritatea rezultă uşor.

Fie $p \in M$ fixat arbitrar şi $\{X_i\}$ o bază geodezică în jurul lui p. Avem

$$-(\overline{\Delta} X)(p) = \sum_{i=1}^{m} \nabla^2 X(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^{m} \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} X,$$

iar

$$\begin{aligned} -\langle \overline{\Delta} X, Y \rangle(p) &= \sum_i \langle \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} X, Y \rangle(p) \\ &= \sum_i \{ X_i \langle \nabla_{X_i} X, Y \rangle - \langle \nabla_{X_i} X, \nabla_{X_i} Y \rangle \} \\ &= -\langle \nabla X, \nabla Y \rangle + \sum_i X_i \langle \nabla_{X_i} X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Fie $\{Y_i\}$ o bază ortonormată în T_qM şi definim

$$Z(q) = \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{Y_i} X, Y \rangle Y_i.$$

Definiţia are caracter geometric, adică nu depinde de baza ortonormată folosită. Lăsând punctul q liber se obţine $Z \in C(TM)$. Observăm că

$$(\operatorname{div} Z)(p) = \sum_i X_i \langle \nabla_{X_i} X, Y \rangle$$

şi atunci

$$-\langle \overline{\Delta} X, Y \rangle(p) = (\operatorname{div} Z)(p) - \langle \nabla X, \nabla Y \rangle(p).$$

Cum punctul $p \in M$ a fost fixat arbitrar, rezultă

$$\langle \overline{\Delta} X, Y \rangle = \langle \nabla X, \nabla Y \rangle - \operatorname{div} Z$$

şi integrând,

$$(\overline{\Delta} X, Y) = (\nabla X, \nabla Y).$$

Este clar că $(\overline{\Delta} X, Y) = (\overline{\Delta} Y, X)$, iar $(\overline{\Delta} X, X) = (\nabla X, \nabla X) \geq 0$ cu egalitate dacă şi numai dacă $\nabla X = 0$. $\square$

Am văzut că, prin intermediul izomorfismelor muzicale, un câmp vectorial X poate fi privit ca o 1-formă $X^\flat$, iar

$$\Delta X^\flat = -\operatorname{trace} \nabla^2 X^\flat + X^\flat(\mathrm{Ricci}),$$

sau

$$(\Delta X^\flat)^\sharp = -\operatorname{trace} \nabla^2 X + \mathrm{Ricci}(X) = \overline{\Delta} X + \mathrm{Ricci}(X).$$

Definim $\Delta_H(X) = (\Delta X^\flat)^\sharp$ şi avem

Propoziţia 1.11.2. *Operatorul $X \to \Delta_H(X)$ este $\mathbb{R}$-liniar, simetric şi pozitiv definit.*

Demonstraţie. Rezultă imediat din

$$\begin{aligned}
(\Delta_H(X), Y) &= \int_M \langle \Delta_H(X), Y \rangle \, \overline{v}_g = \int_M \langle (\Delta X^\flat)^\sharp, (Y^\flat)^\sharp \rangle \, \overline{v}_g \\
&= \int_M \langle \Delta X^\flat, Y^\flat \rangle \, \overline{v}_g \\
&= \int_M \langle dX^\flat, dY^\flat \rangle \, \overline{v}_g + \int_M \langle \delta X^\flat, \delta Y^\flat \rangle \, \overline{v}_g. \square
\end{aligned}$$

Înainte de a studia proprietăţile laplaceanului Δ_H vom prezenta o formulă integrală pentru câmpurile vectoriale.

Teorema 1.11.3. *Fie* $X \in C(TM)$. *Avem formula*

$$\int_M \{\langle \operatorname{trace} \nabla^2 X, X\rangle + \operatorname{Ricci}(X,X) + \frac{1}{2}|\mathcal{L}_X g|^2 - (\operatorname{div} X)^2\}\overline{v}_g = 0.$$

Demonstraţie. Am văzut că

$$(\Delta_H(X), X) = \int_M \langle dX^\flat, dX^\flat\rangle\,\overline{v}_g + \int_M \langle \delta X^\flat, \delta X^\flat\rangle\,\overline{v}_g. \tag{1.11.5}$$

Dar $\delta X^\flat = -\operatorname{div} X$, $\Delta_H(X) = -\operatorname{trace}\nabla^2 X + \operatorname{Ricci}(X)$, iar

$$\begin{aligned}
dX^\flat &= d(X_i dx^i) = (dX_i)\wedge dx^i = \frac{\partial X_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\
&= \sum_{i<j} \frac{\partial X_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i + \sum_{i>j} \frac{\partial X_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\
&= \sum_{i<j} \frac{\partial X_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i + \sum_{i<j} \frac{\partial X_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\
&= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x^i} - \frac{\partial X_i}{\partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j \\
&= \sum_{i<j} (\nabla_i X_j - \nabla_j X_i) dx^i \wedge dx^j \\
&= \frac{1}{2}(\nabla_i X_j - \nabla_j X_i) dx^i \wedge dx^j,
\end{aligned}$$

unde $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, iar $X_i = g_{ij}X^j$. Înlocuind în (1.11.5) obţinem

$$\begin{aligned}
&\int_M \{\langle -\operatorname{trace}\ \nabla^2 X, X\rangle + \operatorname{Ricci}(X,X)\}\,\overline{v}_g = \\
&= \int_M \langle dX^\flat, dX^\flat\rangle\,\overline{v}_g + \int_M (\operatorname{div} X)^2\,\overline{v}_g
\end{aligned} \tag{1.11.6}$$

sau

$$\int_M \{|\nabla X|^2 + \operatorname{Ricci}(X,X)\}\,\overline{v}_g = \int_M \langle dX^\flat, dX^\flat\rangle\,\overline{v}_g + \int_M (\operatorname{div} X)^2\,\overline{v}_g. \tag{1.11.7}$$

Vom calcula acum $|\mathcal{L}_X g|^2$. Reamintim că

$$(\mathcal{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_X g|^2 &= g^{ia}g^{jb}(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i)(\nabla_a X_b + \nabla_b X_a) \\
&= g^{ia}g^{jb}(\nabla_i X_j)(\nabla_a X_b) + g^{ia}g^{jb}(\nabla_j X_i)(\nabla_b X_a) \\
&\quad + g^{ia}g^{jb}(\nabla_i X_j)(\nabla_b X_\alpha) + g^{ia}g^{jb}(\nabla_j X_i)(\nabla_a X_b) \\
&= g^{ia}g^{jb}(\nabla_i X_j)(\nabla_a X_b) + g^{jb}g^{ia}(\nabla_j X_i)(\nabla_b X_a) \\
&\quad + (\nabla_i X^b)(\nabla_b X^i) + (\nabla_j X^a)(\nabla_a X^j) \\
&= 2|\nabla X|^2 + 2(\nabla_i X^b)(\nabla_b X^i).
\end{aligned}$$

Ţinând cont de convenţia asupra coeficientului produsului scalar pentru forme, avem

$$\begin{aligned}
2|dX^\flat|^2 &= g^{ia}g^{jb}(\nabla_i X_j - \nabla_j X_i)(\nabla_a X_b - \nabla_b X_a) \\
&= 2|\nabla X|^2 - 2(\nabla_i X^b)(\nabla_b X^i)
\end{aligned}$$

şi deci

$$|dX^\flat|^2 = 2|\nabla X|^2 - \frac{1}{2}|\mathcal{L}_X g|^2.$$

Înlocuind în (1.11.6) obţinem relaţia dorită. $\square$

Din teorema de descompunere Hodge-de Rham avem

$$\Lambda^1(M) = \{\theta \in \Lambda^1(M) : \delta\theta = 0\} \oplus \{df : f \in C^\infty(M)\},$$

sau, echivalent,

$$C(TM) = \{X \in X(TM) : \operatorname{div} X = 0\} \oplus \{\operatorname{grad} f : f \in C^\infty(M)\}.$$

Aceste subspaţii sunt ortogonale în raport cu produsele scalare uzuale.

Propoziţia 1.11.3. *Avem*

i) $\operatorname{div}(\Delta_H(X)) = \Delta(\operatorname{div} X)$,

ii) $\Delta_H(\operatorname{grad} f) = \operatorname{grad}(\Delta f)$, *şi deci* Δ_H *conservă cele două subspaţii în care se descompune* $C(TM)$.

Demonstraţie. Într-adevăr, deoarece Δ comută cu δ şi d, avem

$$\operatorname{div}(\Delta_H(X)) = -\delta(\Delta X^\flat) = -\Delta(\delta X^\flat) = \Delta(\operatorname{div} X),$$

iar

$$\Delta_H(\operatorname{grad} f) = (\Delta df)^\sharp = (d\Delta f)^\sharp = \operatorname{grad}(\Delta f).\square$$

Vom nota Δ_H^{grad} restricţia lui Δ_H la $\{\operatorname{grad} f : f \in C^\infty(M)\}$ şi Δ_H^{div} restricţia lui Δ_H la $\{X \in C(TM) : \operatorname{div} X = 0\}$.

Propoziţia 1.11.4. *Avem*

i) λ *este valoare proprie nenulă pentru* Δ *ce acţionează asupra lui* $C^\infty(M)$ *dacă şi numai dacă* λ *este valoare proprie pentru* Δ_H^{grad},

ii) $\dim\{\operatorname{grad} f : \Delta_H^{\text{grad}} \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} f\} = \dim\{f : \Delta f = \lambda f\}$, *unde* $\lambda \neq 0$.

Demonstraţie. i) Fie $f \in C^\infty(M)$ astfel încât $\Delta f = \lambda f, \lambda \neq 0$ şi $f \neq 0$. Desigur $\operatorname{grad} f \neq 0$ şi

$$\Delta_H(\operatorname{grad} f) = \operatorname{grad}(\Delta f) = \lambda(\operatorname{grad} f).$$

Reciproc, fie f neconstantă astfel încât $\Delta_H(\operatorname{grad} f) = \lambda(\operatorname{grad} f)$. Rezultă $\operatorname{grad}(\Delta f) = \operatorname{grad}(\lambda f)$, adică $\Delta f = \lambda f + c$, unde c este o constantă reală. Fie acum $\widetilde{f} = f + \frac{c}{\lambda}$. Avem grad $\widetilde{f} = \operatorname{grad} f$ şi $\Delta\widetilde{f} = \lambda\widetilde{f}$. Desigur, $\widetilde{f} \neq 0$.

ii) Fie

$$T : \{f : \Delta f = \lambda f\} \to \{\operatorname{grad} f : \Delta_H^{\text{grad}} \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} f\}, \quad T(f) = \operatorname{grad} f.$$

Am văzut mai sus că T este corect definit. T este operator liniar şi demonstrăm acum injectivitatea sa.

Fie $T(f_1) = T(f_2)$, adică $\operatorname{grad} f_1 = \operatorname{grad} f_2$. Rezultă $f_1 = f_2 + c$. Dar cum $\Delta f_1 = \lambda f_1$ şi $\Delta f_2 = \lambda f_2, \lambda \neq 0$, rezultă $c = 0$, adică $f_1 = f_2$.

Surjectivitatea lui T a fost demonstrată la punctul i). Prin urmare cele două subspaţii sunt izomorfe.

Notăm că $T^{-1}(\operatorname{grad} f) = \widetilde{f} = f + \frac{c}{\lambda}$. Definiţia este corectă: dacă $\operatorname{grad} f_1 = \operatorname{grad} f_2$, atunci $\widetilde{f_1} = f_1 + \frac{c_1}{\lambda}$ şi $\widetilde{f_2} = f_2 + \frac{c_2}{\lambda}$ diferă printr-o constantă c. Dar cum $\Delta \widetilde{f_1} = \lambda \widetilde{f_1}$ şi $\Delta \widetilde{f_2} = \lambda \widetilde{f_2}$, constanta c trebuie să fie 0. $\square$

Referitor la Δ_H^{grad} avem

Teorema 1.11.4. *Fie (M, g) o varietate Einstein cu* $\mathrm{Ricci} = cg$, *c constantă reală, şi fie λ prima valoare proprie pentru Δ_H^{div}. Atunci $\lambda \geq 2c$ şi*

$$\begin{aligned}&\dim\{X \in C(TM) : \operatorname{div} X = 0 \text{ şi } \Delta_H^{\mathrm{div}}(X) = 2cX\}\\&= \dim\{X \in C(TM) : X \text{ este Killing}\}.\end{aligned}$$

Demonstraţie. Mai întâi să notăm că dacă $c < 0$ atunci singurul câmp vectorial Killing al lui M este câmpul nul. Într-adevăr, fie $X \in C(TM)$, X câmp vectorial Killing. Atunci

$$\operatorname{trace} \nabla^2 X + \mathrm{Ricci}(X) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{trace} \nabla^2 X + cX = 0$$

şi integrând obţinem

$$\int_M \langle \operatorname{trace} \nabla^2 X, X\rangle \, \overline{v}_g = -c \int_M |X|^2 \, \overline{v}_g = -\int_M |\nabla X|^2 \overline{v}_g,$$

ceea ce implică $X = 0$.

Vom presupune $c \geq 0$. Fie $X \neq 0, \operatorname{div} X = 0$, astfel încât $\Delta_H^{\mathrm{div}} X = \lambda X$. Avem

$$\operatorname{trace} \nabla^2 X = \mathrm{Ricci}(X) - \Delta_H(H) = (c - \lambda)X$$

şi înlocuind în formula

$$\int_M \{\langle \operatorname{trace} \nabla^2 X + \mathrm{Ricci}(X), X\rangle + \frac{1}{2}|\mathcal{L}_X g|^2 - (\operatorname{div} X)^2\} \, \overline{v}_g = 0$$

obţinem

$$(2c - \lambda) \int_M |X|^2 \, \overline{v}_g = -\frac{1}{2} \int_M |\mathcal{L}_X g|^2 \, \overline{v}_g$$

şi deci $\lambda \geq 2c$.

Dacă $\operatorname{div} X = 0$ şi $\Delta_H^{\operatorname{div}}(X) = 2cX$, atunci X este Killing. Reciproc, dacă X este Killing atunci $\operatorname{div} X = 0$ şi

$$\Delta_H(X) = \operatorname{Ricci}(X) - \operatorname{trace} \nabla^2(X) = 2 \operatorname{Ricci}(X) = 2cX.$$

Prin urmare, dacă varietatea (M, g) admite un câmp Killing nenul, atunci prima valoare proprie pentru $\Delta_H^{\operatorname{div}}$ este $2c$.□

1.11.1 Spectrul sferei $\mathbb{S}^m$

Vom începe prin a defini hessiana unei funcţii definite pe o varietate riemanniană şi prin prezentarea unei formule pentru laplaceanul funcţiilor definite pe sfera euclidiană unitară $\mathbb{S}^m$.

Definiţia 1.11.2. Fie (M, g) o varietate riemanniană şi $f \in C^\infty(M)$. Definim

$$(\text{Hess } f)(X) = \nabla_X \operatorname{grad} f, \quad \forall X \in C(TM).$$

Se observă imediat că Hess f este $C^\infty(M)$-liniară şi deci Hess $f \in C(T_1^1(M))$. Mai mult,

$$\begin{aligned} \langle \text{Hess } f(X), Y \rangle &= \langle \text{Hess}\, f(Y), X \rangle \\ &= XYf - (\nabla_X Y)f, \end{aligned}$$

şi deci putem privi hessiana ca un câmp tensorial de tip $(0, 2)$ simetric. Notăm că

$$\Delta f = -\operatorname{trace}(\text{Hess } f).$$

Exprimarea în coordonate locale. Fie $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$ hartă locală pe M. Se verifică uşor că

$$\text{Hess } f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Propoziţia 1.11.5. *Fie $X_p \in T_pM$ şi $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ geodezica definită de $\gamma(0) = p$ şi $\dot\gamma(0) = X_p$. Atunci*

$$(\text{Hess } f)_p(X_p, X_p) = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t).$$

Demonstraţie. Definim X un câmp vectorial în lungul lui γ prin $X(\gamma(t)) = \dot\gamma(t)$. Este clar că $X(p) = X_p$ şi avem

$$\begin{aligned}(\text{Hess } f)_p(X_p, X_p) &= X_p(Xf) - (\nabla_{X_p}X)f = \dot\gamma(0)(\dot\gamma(t)f) - (\nabla_{\dot\gamma(0)}\dot\gamma(t))f \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0}(f\circ\gamma)(t).\square\end{aligned}$$

Vom folosi acest rezultat pentru a demonstra

Propoziţia 1.11.6. *Fie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{m+1})$ şi considerăm $\widetilde{f}$ restricţia lui f la $\mathbb{S}^m$, adică $\widetilde{f} = f_{|\mathbb{S}^m}$. Atunci*

$$(\Delta\widetilde{f})_x = (\Delta f)_x + m\frac{d}{dt}\bigg|_{t=1} f(tx) + \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=1} f(tx), \quad \forall x \in \mathbb{S}^m. \tag{1.11.8}$$

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{S}^m$ fixat arbitrar. Vom privi x atât ca punct al lui $\mathbb{S}^m$ cât şi ca vector $x \in T_x\mathbb{R}^{m+1} \equiv \mathbb{R}^{m+1}$ ortogonal pe $T_x\mathbb{S}^m$. Considerăm $\{x_1, \dots, x_m\}$ o bază ortonormată a lui $T_x\mathbb{S}^m$; atunci $\{x_1, \dots, x_m, x\}$ este o bază ortonormată a lui $T_x\mathbb{R}^{m+1}$, dar $x_1, \dots, x_m$, fiind vectori de lungime 1, pot fi priviţi şi ca elemente ale lui $\mathbb{S}^m$. Fie γ_i geodezica lui $\mathbb{S}^m$ determinată de x şi x_i, adică γ_i este cercul mare

$$\gamma_i(t) = (\cos t)x + (\sin t)x_i, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Am văzut că $(\text{Hess }\widetilde{f})_x(x_i, x_i) = \frac{d^2}{dt^2}\big|_{t=0}(\widetilde{f}\circ\gamma_i)(t)$. Dar

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bigg|_t(\widetilde{f}\circ\gamma_i)(t) &= \frac{d}{dt}\bigg|_t(f\circ\gamma_i)(t) = \sum_{\alpha=1}^{m+1}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(\gamma_i(t))(-(\sin t)x^\alpha + (\cos t)x_i^\alpha) \\ &= -(\sin t)x^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(\gamma_i(t)) + (\cos t)x_i^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(\gamma_i(t)),\end{aligned}$$

şi prin calcul direct obţinem

$$(\text{Hess }\widetilde{f})_x(x_i, x_i) = -xf + (\text{Hess } f)_x(x_i, x_i),$$

unde $(\text{Hess } f)_x(x_i, x_i) = x_i^\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}(x)x_i^\beta$. Acum

$$\begin{aligned}(\Delta\widetilde{f})_x &= mxf - \sum_{i=1}^m(\text{Hess } f)_x(x_i, x_i) = mxf + (\Delta f)_x + (\text{Hess } f)_x(x, x) \\ &= (\Delta f)_x + m\frac{d}{dt}\bigg|_{t=1} f(tx) + \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=1} f(tx),\end{aligned}$$

deoarece $t \to tx$ este geodezica în $\mathbb{R}^{m+1}$ care la $t = 1$ trece prin x şi are vectorul viteză x. $\square$

În continuare vom prezenta două aplicaţii ale formulei de mai sus.

Aplicaţia 1. Fie r funcţia distanţă a lui $\mathbb{R}^{m+1}$, adică $r(x) = |x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^{m+1}$. Dacă $\alpha \in \mathbb{N}^*$, atunci $r^{2\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^{m+1})$ şi

$$\Delta r^{2\alpha} = -2\alpha(m + 2\alpha - 1)r^{2(\alpha-1)}.$$

Într-adevăr, cum $r^{2\alpha}_{|\mathbb{S}^m} = 1$, din (1.11.8) rezultă

$$0 = (\Delta r^{2\alpha})_x + m\frac{d}{dt}\bigg|_{t=1} r^{2\alpha}(tx) + \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=1} r^{2\alpha}(tx), \quad \forall x \in \mathbb{S}^m.$$

Dar $r^{2\alpha}(tx) = t^{2\alpha}$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{S}^m$, deci

$$(\Delta r^{2\alpha})_x = -2\alpha(m + 2\alpha - 1), \quad \forall x \in \mathbb{S}^m.$$

Observăm acum că $r^{2\alpha}$ este un polinom omogen de grad 2α şi deci $\Delta r^{2\alpha}$ este un polinom omogen de grad $2(\alpha - 1)$. Pentru $x \in \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$ avem

$$\begin{aligned}(\Delta r^{2\alpha})_x &= (\Delta r^{2\alpha})_{(|x|\frac{x}{|x|})} = |x|^{2(\alpha-1)}(\Delta r^{2\alpha})_{\frac{x}{|x|}} = \\ &= r^{2(\alpha-1)}(x)[-2\alpha(m + 2\alpha - 1)].\end{aligned}$$

Cum egalitate are loc şi pentru $x = 0$, obţinem concluzia dorită. $\square$

Aplicaţia 2. Fie P un polinom omogen armonic pe $\mathbb{R}^{m+1}$, de grad $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\Delta\widetilde{P} = k(m + k - 1)\widetilde{P},$$

unde $\widetilde{P} = P_{|\mathbb{S}^m}$.

Într-adevăr, din (1.11.8) obţinem

$$(\Delta\widetilde{P})_x = m\frac{d}{dt}\bigg|_{t=1} P(tx) + \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=1} P(tx), \quad \forall x \in \mathbb{S}^m.$$

Cum $P(tx) = t^k P(x)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{S}^m$, obţinem concluzia. $\square$

Din Aplicaţia 2 rezultă $k(m+k-1)$ valoare proprie, iar $\widetilde{P}$ funcţia proprie corespunzătoare ei. De fapt vom demonstra că

$$\{\lambda_k = k(m+k-1) : k \in \mathbb{N}\}$$

sunt toate valorile proprii ale lui $\mathbb{S}^m$, iar

$$V_{\lambda_k} = \{\widetilde{P} = P_{|\mathbb{S}^m} : P \text{ polinom omogen armonic pe } \mathbb{R}^{m+1} \text{ de grad } k\}.$$

Pentru aceasta notăm

$\mathcal{P}_k =$ spaţiul vectorial real finit dimensional al polinoamelor omogene de grad $k \in \mathbb{N}$ pe $\mathbb{R}^{m+1}$,

$\mathcal{H}_k =$ spaţiul vectorial real al polinoamelor armonice omogene de grad $k \in \mathbb{N}$ pe $\mathbb{R}^{m+1}$,

$\widetilde{\mathcal{P}}_k = \{\widetilde{P} = P_{|\mathbb{S}^m} : P \in \mathcal{P}_k\}$,

$\widetilde{\mathcal{H}}_k = \{\widetilde{H} = H_{|\mathbb{S}^m} : H \in \mathcal{H}_k\}$.

$\widetilde{\mathcal{P}}_k$ şi $\widetilde{\mathcal{H}}_k$ sunt spaţii vectoriale izomorfe cu $\mathcal{P}_k$ şi $\mathcal{H}_k$ respectiv. Notăm că $\mathcal{P} = \oplus_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_k$ reprezintă mulţimea tuturor polinoamelor în $m+1$ variabile, iar $\mathcal{H} = \oplus_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_k$ reprezintă mulţimea tuturor polinoamelor armonice în $m+1$ variabile.

Propoziţia 1.11.7. *Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem*

i) $\mathcal{P}_{2k} = \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-2} \oplus \ldots \oplus r^{2k}\mathcal{H}_0$,

ii) $\mathcal{P}_{2k+1} = \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-1} \oplus \ldots \oplus r^{2k}\mathcal{H}_1$,

unde subspaţiile din cele două descompuneri sunt ortogonale două câte două în raport cu produsul scalar

$$\langle , \rangle_a : \mathcal{P}_a \times \mathcal{P}_a \to \mathbb{R}, \quad \langle P, Q\rangle_a = \int_{\mathbb{S}^m} \widetilde{P}\widetilde{Q}\,\overline{v}_g,$$

pentru $a = 2k$, respectiv $a = 2k+1$.

Demonstraţie. Se verifică imediat că $\langle , \rangle_a$ este un produs scalar. Apoi observăm că $\mathcal{P}_a$ şi $\mathcal{H}_a$ sunt izomorfe cu $r^2\mathcal{P}_a$ şi $r^2\mathcal{H}_a$, respectiv. $\mathcal{H}_{2k}, r^2\mathcal{H}_{2k-2}, \ldots, r^{2k}\mathcal{H}_0$ sunt subspaţii în $\mathcal{P}_{2k}$, iar $\mathcal{H}_{2k+1}, r^2\mathcal{H}_{2k-1}, \ldots, r^{2k}\mathcal{H}_1$ sunt subspaţii în $\mathcal{P}_{2k+1}$. Cum $\widetilde{r^2 H_a} = \widetilde{H}_a$ iar $\widetilde{\mathcal{H}}_a \subset V_{\lambda_a}$, rezultă că subspaţiile din descompunerile i) sau ii) sunt ortogonale două câte două în raport cu $\langle , \rangle_{2k}$, respectiv $\langle , \rangle_{2k+1}$.

Demonstraţia se face prin inducţie după k. Pentru $k = 0$, i) devine $\mathcal{P}_0 = \mathcal{H}_0$ iar ii) devine $\mathcal{P}_1 = \mathcal{H}_1$. Ambele afirmaţii sunt evident adevărate.

Presupunem propoziţia adevărată pentru $l \leq k$ şi vrem să o demonstrăm pentru $l = k + 1$. Deci, pentru $l = k$ şi $l = k - 1$ avem

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2k} &= \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-2} \oplus \ldots \oplus r^{2k}\mathcal{H}_0 \\ &= \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2(\mathcal{H}_{2k-2} \oplus \ldots \oplus r^{2k-2}\mathcal{H}_0) \\ &= \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2\mathcal{P}_{2k-2}, \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2k+1} &= \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-1} \oplus \ldots \oplus r^{2k}\mathcal{H}_1 \\ &= \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2(\mathcal{H}_{2k-1} \oplus \ldots \oplus r^{2k-2}\mathcal{H}_1) \\ &= \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2\mathcal{P}_{2k-1}. \end{aligned}$$

Sintetizând, pentru a demonstra afirmaţia pentru $l = k + 1$ este suficient să demonstrăm.

"dacă $\mathcal{P}_a = \mathcal{H}_a \oplus r^2\mathcal{P}_{a-2}$, unde $\mathcal{P}_{a-2}$ admite o descompunere de tip i) sau ii), atunci $\mathcal{P}_{a+2} = \mathcal{H}_{a+2} \oplus r^2\mathcal{P}_a$".

Deoarece $\mathcal{P}_a = \mathcal{H}_a \oplus r^2\mathcal{P}_{a-2}$, iar $\mathcal{P}_{a-2}$ admite o descompunere de tip i) sau ii), atunci $\mathcal{H}_{a+2} \perp r^2\mathcal{P}_a$ în raport cu $\langle , \rangle_{a+2}$. Dar $\mathcal{P}_{a+2} = r^2\mathcal{P}_a \oplus (r^2\mathcal{P}_a)^\perp$ şi vrem să demonstrăm că $\mathcal{H}_{a+2} = (r^2\mathcal{P}_a)^\perp$. Cum $\mathcal{H}_{a+2} \subset (r^2\mathcal{P}_a)^\perp$, este suficient să demonstrăm că $(r^2\mathcal{P}_a)^\perp \subset \mathcal{H}_{a+2}$. Pentru aceasta, fie $Q \in (r^2\mathcal{P}_a)^\perp \subset \mathcal{P}_{a+2}$. $\Delta Q \in \mathcal{P}_a$ şi pentru a demonstra că $\Delta Q = 0$ vom arăta că $\langle \Delta Q, P \rangle_a = 0$, oricare ar fi $P \in \mathcal{P}_a$, adică $\langle \Delta Q, P \rangle_a = 0$, oricare ar fi $P \in r^{2l}\mathcal{H}_{a-2l}, 0 \leq 2l \leq a$. Dar $P \in r^{2l}\mathcal{H}_{a-2l}$ implică $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{a-2l} \subset V_{\lambda_{a-2l}}$ şi deci $\Delta\widetilde{P} = (a-2l)(m+a-2l-1)\widetilde{P}$, iar $Q \in (r^2\mathcal{P}_a)^\perp$ implică $\int_{\mathbb{S}^m} \widetilde{Q}\widetilde{P}\,\overline{v}_g = 0$. Pornind cu egalitatea

$$\Delta(\widetilde{Q}\widetilde{P}) = (\Delta\widetilde{Q})\widetilde{P} + \widetilde{Q}(\Delta\widetilde{P}) - 2\langle \operatorname{grad}\widetilde{Q}, \operatorname{grad}\widetilde{P} \rangle$$

şi integrând obţinem

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{S}^m} (\Delta\widetilde{Q})\widetilde{P}\,\overline{v}_g + \int_{\mathbb{S}^m} \widetilde{Q}(\Delta\widetilde{P})\,\overline{v}_g - 2\int_{\mathbb{S}^m} \langle \operatorname{grad}\widetilde{Q}, \operatorname{grad}\widetilde{P}\rangle\,\overline{v}_g \\
&= \int_{\mathbb{S}^m} (\Delta\widetilde{Q})\widetilde{P}\,\overline{v}_g + (a-2l)(m+a-2l-1)\int_{\mathbb{S}^m} \widetilde{Q}\widetilde{P}\,\overline{v}_g - \\
&\quad -2\int_{\mathbb{S}^m} \langle \operatorname{grad}\widetilde{Q}, \operatorname{grad}\widetilde{P}\rangle\,\overline{v}_g \\
&= \int_{\mathbb{S}^m} (\Delta\widetilde{Q})\widetilde{P}\,\overline{v}_g - 2\int_{\mathbb{S}^m} \langle \operatorname{grad}\widetilde{Q}, \operatorname{grad}\widetilde{P}\rangle\,\overline{v}_g \\
&= -\int_{\mathbb{S}^m} (\Delta\widetilde{Q})\widetilde{P}\,\overline{v}_g.
\end{aligned}$$

Dar $\Delta\widetilde{Q} = \widetilde{\Delta Q} + (a-2l)(m+a-2l+1)\widetilde{Q}$ şi înlocuind obţinem:

$$0 = \int_{\mathbb{S}^m} (\widetilde{\Delta Q})\widetilde{P}\,\overline{v}_g \Leftrightarrow \langle \Delta Q, P\rangle_a = 0.$$

Cu aceasta demonstraţia propoziţiei s-a încheiat. □

Putem acum da

Teorema 1.11.5. *Mulţimea valorilor proprii ale lui* $\mathbb{S}^m$ *este*

$$\{\lambda_k = k(m+k-1) : k \in \mathbb{N}\},$$

iar $V_{\lambda_k} = \widetilde{\mathcal{H}}_k$, *oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}$. *Mai mult,*

i) $\dim V_{\lambda_0} = 1$

ii) $\dim V_{\lambda_1} = m+1$

iii) $\dim V_{\lambda_k} = C^k_{m+k} - C^{k-2}_{m+k-2} = \frac{(m+k-2)(m+k-3)\dots(m+1)m}{k!}(m+2k-1)$, *oricare ar fi* $k \geq 2$.

Demonstraţie. Se poate demonstra că $\oplus_{k\geq 0}\widetilde{\mathcal{P}}_k$ este densă în $C^\infty(\mathbb{S}^m)$. Din propoziţia anterioară, $\oplus_{k\geq 0}\widetilde{\mathcal{P}}_k = \oplus_{k\geq 0}\widetilde{\mathcal{H}}_k$ şi deci $\oplus_{k\geq 0}\widetilde{\mathcal{H}}_k$ este densă în $C^\infty(\mathbb{S}^m)$. Acum, prima parte a teoremei rezultă din densitatea lui $\oplus_{k\geq 0}\widetilde{\mathcal{H}}_k$ în $C^\infty(\mathbb{S}^m)$.

Referitor la dimensiunea lui $\widetilde{\mathcal{H}}_k$, punctele i) şi ii) sunt evidente. Pentru $k \geq 2$, din propoziţia anterioară,

$$\dim \widetilde{\mathcal{H}}_k = \dim \mathcal{H}_k = \dim \mathcal{P}_k - \dim \mathcal{P}_{k-2} = C_{m+k}^k - C_{m+k-2}^{k-2}.\square$$

1.12. Prima şi a doua formulă variaţională a energiei unei curbe

Vom începe prin a defini variaţia unei curbe.

Definiţia 1.12.1. Fie $\gamma : [0, a] \to M$ o curbă netedă pe porţiuni. O *variaţie* a lui γ este o aplicaţie continuă

$$\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \to M$$

astfel încât

i) $\phi(0, t) = \gamma(t)$, oricare ar fi $t \in [0, a]$,

ii) există o partiţie a lui $[0, a], 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = a$, astfel încât restricţia lui ϕ la $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$ este netedă oricare ar fi $i = 0, \ldots, n-1$.

O variaţie se numeşte *proprie* dacă $\phi(s, 0) = \gamma(0)$ şi $\phi(s, a) = \gamma(a)$, oricare ar fi $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Pentru orice $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, curba $\phi_s : [0, a] \to M, \phi_s(t) = \phi(s, t)$ se numeşte *curbă a variaţiei*, iar dacă fixăm t, curba $\phi_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\phi_t(s) = \phi(s, t)$ se numeşte *curbă transversă a variaţiei.* Câmpul vectorial definit în lungul lui γ, $V(t) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(0, t)$, se numeşte *câmpul variaţional al lui* ϕ.

Propoziţia 1.12.1. *Dat un câmp vectorial $t \to V(t)$ neted pe porţiuni în lungul unei curbe netedă pe porţiuni $\gamma : [0, a] \to M$, există o variaţie $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \to M$ a lui γ astfel încât V este câmpul variaţional corespunzător. Mai mult, dacă $V(0) = V(a) = 0$, atunci putem alege ϕ să fie variaţie proprie.*

Demonstraţie. Deoarece $\gamma([0, a]) \subset M$ este compactă, este posibil să găsim $\delta > 0$ astfel încât $\exp_{\gamma(t)} v$ este definit oricare ar fi $v \in T_{\gamma(t)}M, |v| < \delta$, şi oricare ar fi $t \in [0,a]$. Într-adevăr, pentru fiecare $\gamma(t)$, ştim că există $\delta_t > 0$ şi există W_t o vecinătate a lui $\gamma(t)$ astfel încât $\exp_q(v)$ este definită oricare ar fi $q \in W_t$ şi oricare ar fi $v \in T_qM, |v| < \delta_t$.

Este clar că $\gamma([0,a]) \subset \bigcup_{t\in[0,a]} W_t$ şi cum $\gamma([0,a])$ este compactă rezultă că există $t_1, \ldots, t_k \in [0,a]$ astfel încât $\gamma([0,a]) \subset \bigcup_{i=1}^k W_{t_i}$. Considerăm $\delta = \min\{\delta_{t_1}, \ldots, \delta_{t_k}\}$.

Fie $N = \max\{|V(t)| : t \in [0,a]\}$ şi fixăm un $\varepsilon > 0$ astfel încât $\varepsilon \leq \frac{\delta}{N}$. Definim $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,a] \to M$ prin

$$\phi(s,t) = \exp_{\gamma(t)} sV(t).$$

Aplicaţia ϕ este bine definită şi $\phi(0,t) = \gamma(t)$, iar

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(0,t) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \{\exp_{\gamma(t)} sV(t)\} = (d\exp_{\gamma(t)})_0(V(t)) = V(t).$$

Dacă $V(0) = V(a) = 0$, atunci se vede imediat că ϕ este proprie. $\square$

Vom introduce în continuare două funcţionale: *funcţionala lungimii* şi *funcţionala energiei*. Pentru o variaţie ϕ a unei curbe γ netedă pe porţiuni definim funcţionala lungimii prin

$$L(s) = L(\phi_s) = \int_0^a \left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t)\right| dt, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

iar funcţionala energiei prin

$$E(s) = E(\phi_s) = \int_0^a \left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t)\right|^2 dt, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Legătura dintre cele două funcţionale este dată de

Propoziţia 1.12.2. *Avem inegalitatea*

$$L^2(\gamma) \leq aE(\gamma),$$

iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă γ este parametrizată proporţional cu lungimea de arc.

Demonstraţie. Reamintim inegalitatea lui Cauchy: dacă f_1 şi f_2 sunt funcţii continue pe $[0, a]$, atunci

$$\left(\int_0^a f_1 f_2\, dt\right)^2 \leq \left(\int_0^a f_1^2\, dt\right)\left(\int_0^a f_2^2\, dt\right).$$

În cazul nostru, pentru $f_1(t) = \left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(0,t)\right| = |\dot{\gamma}(t)|$ şi $f_2 = 1$, obţinem inegalitatea dorită. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $f_1 = cf_2$, c fiind o constantă, adică $|\dot{\gamma}(t)|$ este constantă. $\square$

Rezultatul pe care îl vom prezenta în continuare arată că geodezicele care minimizează distanţa, deci puncte de minim pentru funcţionala lungimii, sunt puncte de minim şi pentru funcţionala energiei.

Propoziţia 1.12.3. *Fie $p, q \in M$ şi $\gamma : [0,a] \to M$ o geodezică ce minimizează distanţa dintre p şi q. Atunci, pentru orice curbă $\widetilde{\gamma} : [0,a] \to M$, $\widetilde{\gamma}(0) = p$ şi $\widetilde{\gamma}(a) = q$, avem*

$$E(\gamma) \leq E(\widetilde{\gamma})$$

şi egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\widetilde{\gamma}$ este o geodezică ce minimizează distanţa dintre p şi q.

Demonstraţie. Cum γ este o geodezică (deci parametrizată proporţional cu lungimea de arc) ce realizează minimul distanţei, din propoziţia anterioară obţinem

$$aE(\gamma) = L^2(\gamma) \leq L^2(\widetilde{\gamma}) \leq aE(\widetilde{\gamma})$$

şi deci $E(\gamma) \leq E(\widetilde{\gamma})$. Dacă $E(\gamma) = E(\widetilde{\gamma})$ atunci $L^2(\widetilde{\gamma}) = aE(\widetilde{\gamma})$ şi prin urmare $\widetilde{\gamma}$ este parametrizată proporţional cu lungimea de arc. Mai mult, din $L(\gamma) = L(\widetilde{\gamma})$ rezultă că $\widetilde{\gamma}$ realizează minimul distanţei dintre p şi q. În concluzie, $\widetilde{\gamma}$ este o geodezică care realizează minimul. $\square$

Vom studia în continuare funcţionala energiei $E(s)$.

Teorema 1.12.1. (**Prima formulă variaţională a energiei unei curbe**.) *Fie $\gamma : [0,a] \to M$ o curbă netedă pe porţiuni şi ϕ o variaţie a ei. Avem*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E'(0) &= -\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D}{dt}(\dot{\gamma})\right\rangle dt \\ &\quad -\sum_{i=1}^{n-1}\langle V(t_i), \dot{\gamma}(t_i+) - \dot{\gamma}(t_i-)\rangle - \langle V(0), \dot{\gamma}(0)\rangle + \langle V(a), \dot{\gamma}(a)\rangle, \end{aligned} \tag{1.12.1}$$

unde $V(t)$ este câmpul variaţonal al lui ϕ.

Demonstraţie. Avem

$$E(s) = \int_0^a \langle \dot{\phi}_s, \dot{\phi}_s \rangle dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \dot{\phi}_s, \dot{\phi}_s \rangle dt = \int_0^a \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle (s,t) dt.$$

Derivând în raport cu s obţinem

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle dt &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} 2 \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle dt \\
&\quad -2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle dt \\
&= 2 \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \Bigg|_{t_i}^{t_{i+1}} - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} E'(s) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t_{i+1}), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t_{i+1}) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, t_i), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t_i) \right\rangle \right) \\
&\quad - \int_0^a \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle dt
\end{aligned}$$

şi făcând $s = 0$ obţinem:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} E'(0) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\langle V(t_{i+1}-), \dot{\gamma}(t_{i+1}-) \rangle - \langle V(t_i+), \dot{\gamma}(t_i+) \rangle) \\
&\quad - \int_0^a \left\langle V(t), \frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Cum $V(t_i+) = V(t_i-)$, $i = 1, \ldots, n-1$, rezumând obţinem (1.12.1).

Observaţia 1.12.1. Dacă $V(0) = V(a) = 0$ şi γ este netedă, atunci (1.12.1) devine

$$\frac{1}{2}E'(0) = -\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) \right\rangle dt. \tag{1.12.2}$$

O aplicaţie foarte importantă a primei formule variaţionale este următoarea caracterizare a geodezicelor.

Teorema 1.12.2. *O curbă netedă pe porţiuni $\gamma : [0, a] \to M$ este geodezică dacă şi numai dacă pentru orice variaţie proprie a sa $E'(0) = 0$.*

Demonstraţie. Dacă γ este geodezică, atunci γ este netedă, deci $\dot{\gamma}(t_i+) = \dot{\gamma}(t_i-)$, iar $\frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) = 0$. Variaţia ϕ fiind proprie, $V(0) = V(a) = 0$, şi prin urmare toţi termenii din membrul drept al egalităţii (1.12.1) sunt nuli.

Reciproc, fie $V(t) = g(t)\frac{D}{dt}(\dot{\gamma})$, unde $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă pe porţiuni cu $g(t) > 0$ oricare ar fi $t \neq t_i$ şi $g(t_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$. Considerăm variaţia ϕ a lui γ având V drept câmp variaţional. Cum $E'(0) = 0$, din (1.12.1) obţinem

$$0 = -\int_0^a g(t) \left| \frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) \right|^2 dt,$$

adică $\frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) = 0$ pe $(t_i, t_{i+1}), i = 1, \ldots, n-1$ şi prin urmare γ este geodezică pe $(t_i, t_{i+1}), i = 0, \ldots, n-1$. Dacă demonstrăm că γ este de clasă C^1 în t_i, $i = 1, \ldots, n-1$, atunci va rezulta că γ este de clasă C^2 pe $[0, a]$ şi $\frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) = 0$ pe $[0, a]$. Pentru aceasta considerăm $\widetilde{V}(t)$ astfel încât $\widetilde{V}(0) = \widetilde{V}(a) = 0$, iar $\widetilde{V}(t_i) = \dot{\gamma}(t_i+) - \dot{\gamma}(t_i-)$. Cum γ este geodezică pe (t_i, t_{i+1}), din (1.12.1) obţinem

$$0 = -\sum_{i=1}^{n-1} |\dot{\gamma}(t_i+) - \dot{\gamma}(t_i-)|^2,$$

adică $\dot{\gamma}(t_i+) = \dot{\gamma}(t_i-)$ şi deci γ este de clasă C^1 în $t_i, i = 1, \ldots, n-1$. $\square$

Teorema 1.12.3. (**A doua formulă variaţională a energiei unei curbe**.) *Fie $\gamma : [0, a] \to M$ o geodezică şi fie $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \to M$ o variaţie proprie* *a sa. Considerăm $E(s) = E(\phi_s)$ funcţionala energiei. Atunci*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}E''(0) &= -\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D^2V}{dt^2} - R(\dot\gamma, V)\dot\gamma \right\rangle dt \\
&\quad -\sum_{i=1}^{n-1} \left\langle V(t_i), \frac{DV}{dt}(t_i+) - \frac{DV}{dt}(t_i-) \right\rangle ,
\end{aligned} \tag{1.12.3}
$$

unde V este câmpul variaţional al lui ϕ, R este câmpul tensorial de curbură, iar

$$
\frac{DV}{dt}(t_i+) = \lim_{\substack{t\to t_i\\ t>t_i}} \frac{DV}{dt}(t), \qquad \frac{DV}{dt}(t_i-) = \lim_{\substack{t\to t_i\\ t<t_i}} \frac{DV}{dt}(t).
$$

Demonstraţie. Am văzut în demonstraţia primei formule variaţionale că

$$
\frac{1}{2}E'(s) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial\phi}{\partial t}(s,t)\right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \right) - \int_0^a \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle dt.
$$

Derivând în raport cu s obţinem

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}E''(0) &= \sum_{i=1}^{n-1}\Bigg(\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}(0,t), \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,t)\right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\
&\qquad + \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}(0,t), \frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,t)\right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \Bigg) \\
&\quad - \int_0^a \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle (0,t)dt - \int_0^a \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial s}, \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\rangle (0,t)dt.
\end{aligned}
$$

Cum $\phi(s,a) = \gamma(a)$, rezultă $\frac{\partial\phi}{\partial s}(s,a) = 0$ şi deci $\frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}(0,a) = 0$. Analog, $\frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}(0,0) = 0$. Prin urmare, ţinând cont şi că $\dot\gamma(t_i+) = \dot\gamma(t_i-)$, $\frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}(0,t_i+)$

$= \frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}(0, t_i-)$, prima sumă devine:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}(0,t),\dot\gamma(t)\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}(0,t_{i+1}),\dot\gamma(t_{i+1})\right\rangle - \sum_{i=0}^{n-1}\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}(0,t_i),\dot\gamma(t_i)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}(0,t_i),\dot\gamma(t_i)\right\rangle - \sum_{i=1}^{n-1}\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial s}(0,t_i),\dot\gamma(t_i)\right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Cum $\frac{D}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,t) = \frac{D}{dt}(\dot\gamma)(t) = 0$ şi $V(t_i+) = V(t_i-)$ obţinem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}E''(0) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left\langle V(t),\frac{DV}{dt}(t)\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^a \left\langle V(t),\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,t)\right\rangle dt \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\left\langle V(t_i),\frac{DV}{dt}(t_i-) - \frac{DV}{dt}(t_i+)\right\rangle \\
&\quad - \int_0^a \left\langle V(t),\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,t)\right\rangle dt.
\end{aligned}\tag{1.12.4}$$

Dar

$$\begin{aligned}
\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= R\left(\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial t} \\
&= R\left(\frac{\partial\phi}{\partial s},\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{D}{dt}\frac{D}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial s}
\end{aligned}$$

şi deci

$$\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,t) = R(V(t),\dot\gamma(t))\dot\gamma(t) + \frac{D^2V}{dt^2}(t).$$

Înlocuind în (1.12.4), obţinem (1.12.3). □

Observaţia 1.12.2. Dacă ϕ este o variaţie netedă şi proprie a geodezicei

γ, atunci (1.12.3) devine

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}E''(0) &= -\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D^2V}{dt^2} - R(\dot\gamma, V)\dot\gamma \right\rangle dt \\
&= -\int_0^a \left(\frac{d}{dt}\left\langle V(t), \frac{DV}{dt}(t) \right\rangle - \left| \frac{DV}{dt} \right|^2 (t) \right) dt \qquad (1.12.5)\\
&\quad + \int_0^a R(\dot\gamma, V, V, \dot\gamma) dt \\
&= \int_0^a \left\{ \left| \frac{DV}{dt} \right|^2 - R(\dot\gamma, V, \dot\gamma, V) \right\} dt.
\end{aligned}$$

Prin urmare, dacă (M, g) are curbura secţională negativă atunci $E''(0) \geq 0$.

Aplicaţie. Vom determina geodezicele lui $\mathbb{S}^m$ ca puncte critice ale funcţionalei energiei.
Fie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ o curbă netedă de perioadă 2π, $\gamma(t) = \gamma(t + 2\pi)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. Considerăm energia

$$E(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot\gamma(t)|^2 \, dt = \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} (\dot\gamma_i(t))^2 \right\} dt,$$

unde $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_{m+1}(t))$. Fie ϕ o variaţie a lui γ în $\mathbb{S}^m$ astfel încât $\phi_s(t) = \phi_s(t + 2\pi)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Din această condiţie rezultă $\frac{\partial\phi}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial\phi}{\partial s}(0, t + 2\pi)$, $t \in \mathbb{R}$. Privind ϕ ca o aplicaţie cu valori în $\mathbb{R}^{m+1}$, avem

$$E(s) = \int_0^{2\pi} \langle \dot\phi_s, \dot\phi_s \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\rangle (s, t) \, dt,$$

iar

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}E'(0) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\rangle (s, t) \, dt \right\} \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \dot\gamma \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial s}, \dot\gamma \right\rangle dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \dot{\gamma} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}, \ddot{\gamma} \right\rangle \right\} dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s}(0,t), \ddot{\gamma}(t) \right\rangle dt.$$

Cum $|\phi(s,t)|^2 = 1$, oricare ar fi s şi oricare ar fi t, $\frac{\partial \phi}{\partial s}(0,t) \perp \phi(0,t)$, adică $\frac{\partial \phi}{\partial s}(0,t)$ este tangent la $\mathbb{S}^m$ în lungul lui $\phi(0,t) = \gamma(t)$. Prin urmare $E'(0) = 0$ pentru orice variaţie a lui γ dacă şi numai dacă $\ddot{\gamma}(t) \| \gamma(t)$, adică

$$\ddot{\gamma} = \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \gamma. \tag{1.12.6}$$

Căutăm acum soluţiile ecuaţiei (1.12.6) ţinând cont de restricţia $|\gamma| = 1$.

Din $|\gamma| = 1$, derivând succesiv, obţinem

$$\langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = 0 \quad \text{şi} \quad \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle = -|\dot{\gamma}|^2.$$

Înlocuind în (1.12.6) rezultă

$$\ddot{\gamma} + |\dot{\gamma}|^2 \gamma = 0. \tag{1.12.7}$$

Dar (1.12.7) implică $|\dot{\gamma}| = constant$. Într-adevăr,

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2 \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = -2 |\dot{\gamma}|^2 \langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle,$$

iar cum $\langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle = 0$ rezultă $|\dot{\gamma}| = constant$. Acum (1.12.7) se integrează prin metoda standard şi obţinem că γ reprezintă un cerc mare al lui $\mathbb{S}^m$ parametrizat proporţional cu lungimea de arc.

Observaţia 1.12.3. Din condiţia de periodicitate a lui γ rezultă că γ induce o aplicaţie netedă $\widetilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^m$. Mai mult,

$$E(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} |d\widetilde{\gamma}|^2 \, \overline{v}_g,$$

unde $|d\widetilde{\gamma}|^2 = |d\widetilde{\gamma}(X)|^2, X(x^1, x^2) = (-x^2, x^1)$, iar $|X| = 1$.

2

FIBRATE VECTORIALE REALE

2.1. Definiţie şi exemple

O altă noţiune importantă în geometria diferenţială modernă este cea de fibrat vectorial. Teoria aplicaţiilor armonice, ca şi alte teorii, este dezvoltată în cadrul acestui formalism. În acest capitol vom prezenta, pe scurt, câteva aspecte legate de fibratele vectoriale ce vor servi la studiul aplicaţiilor armonice.

Definiţia 2.1.1. Fie E şi M varietăţi diferenţiabile, iar $\pi : E \to M$ o aplicaţie netedă şi surjectivă. Tripletul $\xi = (E, \pi, M)$ se numeşte *fibrat vectorial* dacă sunt satisfăcute condiţiile

i) oricare ar fi $p \in M, \pi^{-1}(p)$ admite o structură de spaţiu vectorial de dimensiune n (n este acelaşi pentru fiecare $\pi^{-1}(p)$). $\pi^{-1}(p)$ cu structura de spaţiu vectorial se notează $F_p(\xi)$, sau $F_p(E)$, sau F_p dacă nu este pericol de confuzie,

ii) oricare ar fi $p \in M$, există U deschisă în M, $p \in U$, şi există $h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ difeomorfism astfel încât

   a) oricare ar fi $q \in U$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$, $h(q, x) \in \pi^{-1}(q)$, adică $\pi(h(q, x)) = q$,

   b) oricare ar fi $q \in U, h_q : \mathbb{R}^n \to F_q, h_q(x) = h(q, x)$, este un izomorfism liniar între $\mathbb{R}^n$ cu structura uzuală de spaţiu vectorial şi F_q.

Varietatea E se numeşte *varietate totală*, M se numeşte *varietate bază*, $\pi : E \to M$ se numeşte *aplicaţia proiecţie*, $\pi^{-1}(p)$ este *fibra din* p, iar $(U; h)$ se numeşte *hartă vectorială* a lui E. Dacă $U = M$, atunci E se numeşte *fibrat vectorial trivial.*

Notăm că aplicaţia proiecţie este o submersie, iar $\dim E = \dim M + \dim F_p = m+n$ (dacă $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, .x^m)$ este o hartă locală pe M iar $h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ este o hartă vectorială pe M, atunci $(\varphi \times \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}) \circ h^{-1} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ este o hartă locală pe E).

Definiţia 2.1.2. O aplicaţie netedă $s : M \to E$ se numeşte *secţiune* a lui ξ, sau E, dacă $\pi \circ s = \mathbf{1}_M$.

Mulţimea secţiunilor se notează $C(\xi)$, sau $C(E)$. $C(E)$ se organizează ca spaţiu vectorial real infinit dimensional.

Exemplul 2.1.1. (**Fibratul vectorial trivial**.) Produsul $M \times \mathbb{R}^n$ reprezintă un fibrat vectorial trivial. Într-adevăr, aplicaţia proiecţie este proiecţia pe primul factor $\pi : M \times \mathbb{R}^n \to M$, $\pi(p, x) = p$, iar structura de spaţiu vectorial a fibrei $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R}^n$ este dată de

$$t_1(p, x_1) + t_2(p, x_2) = (p, t_1x_1 + t_2x_2).$$

Harta vectorială este $h = \mathbf{1}_{M\times\mathbb{R}^n}$.

Exemplul 2.1.2. (**Fibratul tangent**.) Ştim că $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ se poate organiza ca o varietate diferenţiabilă de dimensiune $2m$, unde cu T_pM am notat spaţiul tangent la M în $p \in M$. Tripletul (TM, π, M), unde $\pi : TM \to M$ este proiecţia canonică, reprezintă un fibrat vectorial: pe $\pi^{-1}(p) = T_pM$ considerăm structura de spaţiu vectorial uzuală, iar dacă $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m)$ este o hartă locală pe M atunci

$$h : U \times \mathbb{R}^m \to \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p\in U} T_pM, \quad h(q, y) = y^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q$$

reprezintă o hartă vectorială.

Analog, $(T_l^r(M), \pi, M)$ reprezintă un fibrat vectorial.

Exemplul 2.1.3. (**Fibratul vectorial indus**.) Fie $\xi = (E, \pi, N)$ un fibrat vectorial şi $\phi : M \to N$ o aplicaţie netedă. Vom defini un nou fibrat $\xi_1 = \phi^{-1}\xi$ astfel. Varietatea totală

$$E_1 = \{(p, e) \in M \times E : \phi(p) = \pi(e)\} = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \pi^{-1}(\phi(p)),$$

iar aplicaţia proiecţie $\pi_1 : E_1 \to M, \pi_1(p, e) = p$. Prin urmare $\pi_1^{-1}(p) = \{p\} \times \pi^{-1}(\phi(p))$. Pe fibra $\pi_1^{-1}(p)$ definim în mod natural structura de spaţiu vectorial prin

$$t_1(p, e_1) + t_2(p, e_2) = (p, t_1 e_1 + t_2 e_2).$$

Evident, $F_p(\phi^{-1}E)$ devine izomorf cu $F_{\phi(p)}(E)$. Fie acum $p \in M$ fixat arbitrar şi $(U; h)$ o hartă vectorială a lui ξ astfel încât $\phi(p) \in U$. Notăm $U_1 = \phi^{-1}(U)$ şi definim

$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \to \pi_1^{-1}(U_1), \quad h_1(q, x) = (q, h(\phi(q), x)).$$

Se verifică imediat că h_1 este o hartă vectorială pentru E_1.

Exemplul 2.1.4. Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o imersie riemanniană. Pentru orice $p \in M$ considerăm mulţimea elementelor (p, v) unde $v \in T_{\phi(p)}N$ şi $v \perp d\phi_p(X_p)$, oricare ar fi $X_p \in T_pM$. Această mulţime formează *fibratul vectorial normal* NM. Vom pune în evidenţă doar harta vectorială.

Fie $p \in M$ şi U deschisă în $M, p \in U$. Considerăm $\{X_\alpha(q)\}_{\alpha=m+1,\dots,n}$ bază ortonormată în $(d\phi_q(T_qM))^\perp$, oricare ar fi $q \in U$, şi definim harta vectorială

$$h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} \{p\} \times (d\phi_p(T_pM))^\perp, \quad h(q, x) = (q, x^\alpha X_\alpha(q)).$$

Aşa cum ne aşteptam, în acest context, *fibratul tangent* TM se defineşte ca mulţimea tuturor elementelor (p, v), unde $p \in M$ şi $v = d\phi_p(X_p) \in T_{\phi(p)}N$. Pentru a pune în evidenţă harta vectorială, fie $p \in M$ şi $\{X_i\}_{i=1,\dots,m}$ un câmp de repere ortonormate definit pe U, U deschisă în M, $p \in U$. Definim

$$h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} \{p\} \times d\phi_p(T_pM), \quad h(q, x) = (q, x^i d\phi_q(X_i)).$$

Desigur, avem relaţia

$$\phi^{-1}TN = TM \oplus NM.$$

Se ştie că, pornind de la spaţii vectoriale date, prin diverse operaţii algebrice putem construi altele noi. De exemplu, dacă V şi W sunt două spaţii vectoriale date, atunci putem defini: $\mathrm{Hom}(V, W) = L(V, W) \equiv V^* \otimes W$ format din mulţimea transformărilor liniare între V şi W; produsul tensorial $V \otimes W; V^* \odot V^* \otimes W$ format din mulţimea aplicaţiilor biliniare simetrice de la $V \times V$ cu valori în W; spaţiul dual al lui $V, V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$; k-produsul exterior al lui $V, \Lambda^k V$; etc.

Corespunzător, pentru fibratele vectoriale $\xi_1, \ldots, \xi_k$ peste aceeaşi varietate bază M, în orice punct $p \in M$, din fibrele $F_p(\xi_1), \ldots, F_p(\xi_k)$ putem construi noi spaţii vectoriale, prin construcţiile mai sus menţionate. Notăm generic F_p unul dintre aceste noi spaţii vectoriale şi definim

$$E = \bigcup_{p \in M} F_p, \quad \pi : E \to M, \quad \pi^{-1}(p) = F_p.$$

Se demonstrează că (E, π, M) reprezintă un nou fibrat vectorial.

Multe dintre obiectele din geometria diferenţială pot fi privite ca secţiuni în diverse fibrate vectoriale. După cum deja am menţionat, orice câmp vectorial pe M este o secţiune în fibratul tangent TM, o 1-formă este o secţiune în fibratul cotangent T^*M, un câmp tensorial de tip (r, l) este o secţiune în fibratul $T_l^r(M)$. Dacă $\phi : M \to N$ este o imersie riemanniană, atunci a doua formă fundamentală asociată ei este o secţiune în fibratul vectorial $\odot^2 T^*M \otimes \phi^{-1}TN$.

2.2. Conexiuni liniare pe fibrate vectoriale

Ştim că o conexiune liniară este un operator $\nabla : C(TM) \times C(TM) \to C(TM)$ ce verifică anumite proprietăţi. Vom extinde această noţiune la fibratul vectorial cerând să fie îndeplinite acelaşi tip de proprietăţi.

Definiţia 2.2.1. O *conexiune liniară* pe un fibrat vectorial $\pi : E \to M$ este un operator

$$\nabla : C(TM) \times C(E) \to C(E), \ \ (X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma$$

ce satisface

$$1)\ \nabla_{X_1+X_2}\sigma = \nabla_{X_1}\sigma + \nabla_{X_2}\sigma; \quad 2)\ \nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma;$$

$$3)\ \nabla_X(\sigma_1+\sigma_2) = \nabla_X\sigma_1 + \nabla_X\sigma_2; \quad 4)\ \nabla_X(f\sigma) = (Xf)\sigma + f\nabla_X\sigma,$$

unde $X, X_1, X_2 \in C(TM), \sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in C(E)$, iar $f \in C^\infty(M)$.

Notăm că într-un punct $p \in M$, $(\nabla_X\sigma)(p)$ depinde numai de vectorul $X(p)$ şi $\sigma_{|\gamma}$, unde $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(0) = 0$ şi $\dot\gamma(0) = X(p)$.

Fie $\pi_1 : E_1 \to M$ şi $\pi_2 : E_2 \to M$ fibrate vectoriale peste aceeaşi varietate bază M. Dacă ∇^{E_1} şi ∇^{E_2} sunt conexiuni pe E_1 şi E_2 atunci putem defini conexiuni liniare pe fibratele construite cu ajutorul lor

i) conexiunea pentru suma directă $E_1 \oplus E_2$

$$\nabla_X(\sigma_1 \oplus \sigma_2) = \nabla^{E_1}_X\sigma_1 \oplus \nabla^{E_2}_X\sigma_2,$$

ii) conexiunea pentru produsul tensorial $E_1 \otimes E_2$

$$\nabla_X(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (\nabla^{E_1}_X\sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes (\nabla^{E_2}_X\sigma_2),$$

iii) conexiunea pentru fibratul vectorial dual E^*

$$(\nabla_X\theta)(\sigma) = X(\theta(\sigma)) - \theta(\nabla^E_X\sigma),$$

unde $\theta \in C(E^*)$,

(iv) conexiunea pentru fibratul $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$

$$(\nabla_X\omega)(\sigma) = \nabla^{E_2}_X(\omega(\sigma)) - \omega(\nabla^{E_1}_X\sigma),$$

unde $\omega \in C(\mathrm{Hom}(E_1, E_2)) = C(E_1^* \otimes E_2)$.

Definiţiile de mai sus, ca şi cea pentru conexiunea pe fibratul indus pe care o vom prezenta mai jos, sunt impuse de satisfacerea regulii Leibniz de derivare a produsului tensorial. De asemenea, conexiunile construite mai sus comută cu contracţia tensorilor.

Definim acum conexiunea pe fibratul vectorial indus, conexiune ce joacă un rol tehnic important în teoria aplicaţiilor armonice. Fie deci $\phi : M \to N$ o aplicaţie şi $\pi : E \to N$ un fibrat vectorial. Considerăm ∇^E o conexiune liniară pe E. Notăm că dacă $\lambda \in C(E)$ atunci $\phi^*\lambda \in C(\phi^{-1}E)$, unde $(\phi^*\lambda)(p) = (p, \lambda(\phi(p)))$, oricare ar fi $p \in M$.

Teorema 2.2.1. *Există o unică conexiune liniară* ∇ *pe* $\phi^{-1}E$ *astfel încât oricare ar fi* $p \in M$, *oricare ar fi* $X \in T_pM$ *şi oricare ar fi* $\lambda \in C(E)$ *să avem*

$$\nabla_X(\phi^*\lambda) = (p, \nabla^E_{d\phi_p(X)}\lambda). \tag{2.2.1}$$

Demonstraţie. Fie $p \in M$ fixat arbitrar. Considerăm $(U; h)$ o hartă vectorială a lui E cu $\phi(p) \in U$ şi fie $\{\lambda_a\}_{a=1,\dots,n}$ un câmp de baze pe U în E (de exemplu, definim $\lambda_a(q) = h(q, e_a)$, $a = 1, \dots, n$, unde $\{e_a\}_{a=1,\dots,n}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^n$; este clar că $\{\lambda_a(q)\}_{a=1,\dots,n}$ este o bază în $F_q(E)$, oricare ar fi $q \in U$).

Fie U_1 o vecinătate deschisă a lui p astfel încât $\phi(U_1) \subset U$. Dacă $\rho \in C(\phi^{-1}E)$, atunci $\rho_{|U_1} = f^a(\phi^*\lambda_a)$, $f^a \in C^\infty(U_1)$. Impunând ca ∇ să fie o conexiune ce satisface (2.2.1), pentru $X \in T_pM$ obţinem

$$\begin{aligned} \nabla_X\rho &= \nabla_X(f^a(\phi^*\lambda_a)) = (Xf^a)(\phi^*\lambda_a) + f^a(p)\nabla_X(\phi^*\lambda_a) \\ &= (Xf^a)(\phi^a\lambda_a)_p + f^a(p)(p, \nabla^E_{d\phi_p(X)}\lambda_a) \\ &= (p, (Xf^a)\lambda_a(\phi(p)) + f^a(p)\nabla^E_{d\phi_p(X)}\lambda_a). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Prin urmare o conexiune liniară ce satisface (2.2.1) este dată de (2.2.2) şi deci este unică.

Pentru existenţă, notăm că ∇ definită prin (2.2.2) este bine definită, adică nu depinde de alegerea câmpului de baze $\{\lambda_a\}_{a=1,\dots,n}$ şi se verifică că ea este într-adevăr o conexiune liniară. $\square$

2.3. Metrici riemanniene pe fibrate vectoriale

Definiţia 2.3.1. O *metrică riemanniană* pe un fibrat vectorial $\pi : E \to M$ este o secţiune g în 2-produsul simetric al lui E^*, adică $g \in C(\odot^2 E^*)$, care induce în fiecare fibră $F_p(E)$ un produs scalar.

Pentru $\sigma, \rho \in C(E)$ vom folosi notaţiile $g(\sigma, \rho)$ sau $\langle \sigma, \rho \rangle$. Dacă g_1 şi g_2, sau $\langle , \rangle_{E_1}$ şi $\langle , \rangle_{E_2}$, sunt două metrici riemanniene pe E_1 şi E_2, atunci putem defini metrici riemanniene pe fibratele construite anterior astfel

i) metrica pe fibratul sumă directă $E_1 \oplus E_2$

$$\langle \sigma \oplus \lambda, \rho \oplus \mu \rangle = \langle \sigma, \rho \rangle_{E_1} + \langle \lambda, \mu \rangle_{E_2},$$

unde $\sigma, \rho \in C(E_1)$ şi $\lambda, \mu \in C(E_2)$,

ii) metrica pentru produsul tensorial $E_1 \otimes E_2$

$$\langle \sigma \otimes \lambda, \rho \otimes \mu \rangle = \langle \sigma, \rho \rangle_{E_1} \langle \lambda, \mu \rangle_{E_2},$$

iar acest produs induce unul pe r-produsul exterior al lui $E, \Lambda^r E$, şi pe r-produsul simetric al lui $E, \odot^r E$,

iii) metrica pe fibratul vectorial dual E^*:
mai întâi vom defini izomorfismele muzicale

$$\flat : F_p(E) \to (F_p(E))^* = F_p(E^*), \quad \sigma_p \mapsto \sigma_p^\flat, \quad \sigma_p^\flat(\rho_p) = \langle \sigma_p, \rho_p \rangle_p$$

şi

$$\sharp = \sigma^{-1} : F_p(E^*) \to F_p(E).$$

Pentru $\alpha, \beta \in C(E^*)$ obţinem $\alpha^\sharp, \beta^\sharp \in C(E)$ şi definim

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{E^*} = \langle \alpha^\sharp, \beta^\sharp \rangle_E.$$

(iv) metrica pe fibratul $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$:
fie $\omega_1, \omega_2 \in C(\mathrm{Hom}(E_1, E_2))$ şi $p \in M$ fixat arbitrar. Considerăm $\{e_a^1\}_{a=1,\ldots,n_1}$ o bază ortonormată în $F_p(E_1)$, adică $\langle e_a^1, e_b^1 \rangle_{E_1}(p) = \delta_{ab}$ şi definim

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle(p) = \sum_{a=1}^{n_1} \langle \omega_1(p)(e_a^1), \omega_2(p)(e_a^1) \rangle_{E_2}(p).$$

Se verifică uşor că definiţia este corectă, adică nu depinde de alegerea bazei ortonormate $\{e_a^1\}_{a=1,\ldots,n_1}$.

(v) metrica pe fibratul vectorial indus:
fie $\phi : M \to N$ o aplicaţie şi $\xi = (E, \pi, N)$ un fibrat vectorial. Considerăm $E_1 = \phi^{-1}E$ fibratul vectorial indus, iar pentru $\sigma, \rho \in C(\phi^{-1}E)$ definim

$$\langle \sigma, \rho \rangle(p) = \langle \widetilde{\sigma}, \widetilde{\rho} \rangle_E(\phi(p)),$$

unde $\sigma(p) = (p, \widetilde{\sigma}(p))$, $\rho(p) = (p, \widetilde{\rho}(p))$ şi $\widetilde{\sigma}(p), \widetilde{\rho}(p) \in F_{\phi(p)}(E)$.

Definiţia 2.3.2. O *structură riemanniană* pe fibratul vectorial $\pi : E \to M$ este o pereche (∇, g), unde ∇ este o conexiune liniară pe E iar g este o metrică riemanniană pe E, astfel încât $\nabla g = 0$, adică

$$Xg(\sigma, \rho) = g(\nabla_X \sigma, \rho) + g(\sigma, \nabla_X \rho), \quad \forall X \in C(TM) \quad \text{şi} \quad \forall \sigma, \rho \in C(E).$$

Notăm că dacă (∇^{E_1}, g_{E_1}) şi (∇^{E_2}, g_{E_2}) sunt structuri riemanniene pe E_1 şi E_2, respectiv, atunci toate metricile şi conexiunile construite anterior formează structuri riemanniene pe fibratele vectoriale respective.

Reamintim faptul că dacă $E = TM$ şi g este o metrică riemanniană, atunci există şi este unică ∇ astfel încât $\nabla g = 0$ şi $T = 0$ (∇ este conexiunea Levi-Civita). Pe un fibrat vectorial oarecare nu putem defini torsiunea T, iar unei metrici riemanniene îi pot corespunde mai multe conexiuni ∇ astfel încât $\nabla g = 0$.

Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicaţie netedă între două varietăţi riemanniene. Pe fibratul tangent TN considerăm structura riemanniană (∇^N, h), unde ∇^N este conexiunea Levi-Civita a lui h, iar pe $\phi^{-1}TN$ considerăm structura riemanniană indusă.

Fie $X \in C(TM)$; ştim că $d\phi(X)$ nu este, în general, un câmp vectorial pe N, dar $d\phi(X)$ poate fi gândit ca o secţiune în $\phi^{-1}TN$

$$(d\phi(X))(p) = (p, d\phi_p(X_p)), \quad \forall p \in M.$$

Dacă $p \in M$ şi $(U; x^i)_{i=1,\dots,m}$ este o hartă locală pe M în p, iar $(V; y^\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$ este o hartă locală pe N în $\phi(p)$, atunci

$$d\phi(X) = X^i \phi_i^\alpha \phi^* \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \quad \text{sau} \quad d\phi = \phi_i^\alpha dx^i \otimes \phi^* \frac{\partial}{\partial y^a},$$

unde $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ iar ϕ este reprezentată în cele două hărţi prin $y^\alpha = \phi^\alpha(x^1, \dots, x^m)$.

Conexiunea indusă de ∇^N pe $\phi^{-1}TN, \nabla^{\phi^{-1}TN}$, o vom renota cu ∇^ϕ. Avem

Propoziţia 2.3.1. *Pentru orice* $X, Y \in C(TM)$

$$\nabla^\phi_X d\phi(Y) - \nabla^\phi_Y d\phi(X) = d\phi([X, Y]).$$

Demonstraţie. Vom demonstra relaţia de mai sus folosind coordonatele locale.

$$\begin{aligned}\nabla_X^{\phi} d\phi(Y) &= \nabla_X^{\phi}\left(Y^i\phi_i^{\alpha}\phi^*\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right)\\ &= X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\phi_i^{\alpha}\phi^*\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} + Y^iX^j\frac{\partial^2\phi^{\alpha}}{\partial x^i\partial x^j}\phi^*\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\\ &\quad + Y^i\phi_i^{\alpha}X^j\phi_j^{\beta}\phi^*\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}.\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}\nabla_X^{\phi} d\phi(Y) \ -\nabla_Y^{\phi} d\phi(X) &= \left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\phi_i^{\alpha}\phi^*\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\\ &+\left(Y^iX^j\frac{\partial^2\phi^{\alpha}}{\partial x^i\partial x^j} - X^iY^j\frac{\partial^2\phi^{\alpha}}{\partial x^i\partial x^j}\right)\phi^*\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\\ &+\left(Y^iX^j\phi_i^{\alpha}\phi_j^{\beta}\ {}^N\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}(\phi)\frac{\partial}{\partial y^{\sigma}} - X^iY^j\phi_i^{\alpha}\phi_j^{\beta}\ {}^N\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}(\phi)\frac{\partial}{\partial y^{\sigma}}\right).\end{aligned}$$

Schimbând indicii de sumare şi ţinând cont că ${}^N\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} = {}^N\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}$, iar $[X,Y]^i = X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$, obţinem relaţia dorită. □

Am văzut că $d\phi(X) \in C(\phi^{-1}TN)$. Cum $d\phi : C(TM) \to C(\phi^{-1}TN)$ este $C^{\infty}(M)$-liniară rezultă că $d\phi \in C(T^*M \otimes \phi^{-1}TN)$. Mai departe, putem defini derivata covariantă $\nabla d\phi \in C(\otimes^2 T^*M \otimes \phi^{-1}TN)$ prin

$$(\nabla d\phi)(X,Y) = (\nabla_X d\phi)(Y) = \nabla_X^{\phi} d\phi(Y) - d\phi(\nabla_X^M Y),$$

unde ∇^M este conexiunea Levi-Civita a lui (M,g). Avem

Propoziţia 2.3.2. *Pentru orice* $X, Y \in C(TM)$

$$\nabla d\phi(X,Y) = \nabla d\phi(Y,X).$$

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\nabla d\phi(X,Y) - \nabla d\phi(Y,X) &= \nabla_X^{\phi} d\phi(Y) - d\phi(\nabla_X^M Y)\\ &\quad -\nabla_Y^{\phi} d\phi(X) + d\phi(\nabla_Y^M X)\\ &= d\phi([X,Y]) - d\phi(\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X)\\ &= 0.\square\end{aligned}$$

Datorită simetriei putem afirma că $\nabla d\phi \in C(\odot^2 T^*M \otimes \phi^{-1}TN)$.

Vom încheia acest paragraf prin introducerea noţiunii de curbură.

Definiţia 2.3.3. Fie (E, π, M) un fibrat vectorial şi ∇^E o conexiune liniară. Curbura conexiunii ∇^E este dată de operatorul

$$\begin{aligned} R &: C(TM) \times C(TM) \times C(E) \to C(E), \\ R(X,Y)\sigma &= \nabla^E_X \nabla^E_Y \sigma - \nabla^E_Y \nabla^E_X \sigma - \nabla^E_{[X,Y]}\sigma. \end{aligned}$$

Se verifică uşor că R este $C^\infty(M)$-liniară în fiecare argument şi că $R(X,Y)\sigma = -R(Y,X)\sigma$. Prin urmare, curbura R poate fi privită ca o secţiune în $\Lambda^2 T^*M \otimes E^* \otimes E$. Local, dacă considerăm $\{\lambda_a\}$ un câmp de baze în E şi $\{\theta_a\}$ câmpul de baze duale, adică $\theta^a(\lambda_b) = \delta^a_b$, atunci

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\lambda_a = R^b_{aij}\lambda_b$$

şi

$$R = R^b_{aij} dx^i \otimes dx^j \otimes \theta^a \otimes \lambda_b = \frac{1}{2} R^b_{aij} dx^i \wedge dx^j \otimes \theta^a \otimes \lambda_b.$$

Fie E_1 şi E_2 două fibrate vectoriale înzestrate cu conexiunile liniare ∇^{E_1} şi ∇^{E_2}. Pentru diversele conexiuni construite anterior se poate verifica uşor că curbura este dată de

i) curbura pentru fibratul sumă directă $E_1 \oplus E_2$

$$R(X,Y)(\sigma_1 \oplus \sigma_2) = R^{E_1}(X,Y)\sigma_1 \oplus R^{E_2}(X,Y)\sigma_2,$$

ii) curbura pentru fibratul $E_1 \otimes E_2$

$$R(X,Y)(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (R^{E_1}(X,Y)\sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes (R^{E_2}(X,Y)\sigma_2),$$

iii) curbura pentru fibratul dual E^*

$$(R^*(X,Y)\theta)(\sigma) = -\theta(R^E(X,Y)\sigma),$$

(iv) curbura pentru fibratul indus $\phi^{-1}E$

$$(R(X,Y)\sigma)(p) = (p, R^E_{\phi(p)}(d\phi_p(X), d\phi_p(Y))\sigma(p)).$$

2.4. Operatori pe fibrate vectoriale

La fel ca în cazul fibratului tangent şi pe un fibrat vectorial arbitrar se pot introduce operatorii trace, diferenţiala exterioară, codiferenţiala exterioară şi operatorul Laplace.

Fie $\xi = (E, \pi, M)$ un fibrat vectorial şi ∇^E o conexiune liniară. Considerăm g o metrică riemanniană pe M şi ∇^M conexiunea ei Levi-Civita. Dacă $\sigma \in C(E)$, definim $\nabla\sigma \in C(T^*M \otimes E)$ prin

$$(\nabla\sigma)(X) = \nabla^E_X \sigma \in C(E).$$

Mai departe, definim $\nabla^2\sigma = \nabla(\nabla\sigma) \in C(\otimes^2 T^*M \otimes E)$ prin

$$\begin{aligned}(\nabla^2\sigma)(X, Y) = (\nabla_X(\nabla\sigma))(Y) &= \nabla^E_X((\nabla\sigma)(Y)) - (\nabla\sigma)(\nabla^M_X Y)\\ &= \nabla^E_X \nabla^E_Y \sigma - \nabla^E_{\nabla^M_X Y}\sigma.\end{aligned}$$

Pentru a simplifica notaţia vom renunţa la indici si scriem

$$(\nabla^2\sigma)(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_{\nabla_X Y}\sigma,$$

subînţelegând ce conexiuni sunt implicate.

Notăm că $\nabla\sigma$ şi $\nabla^2\sigma$ sunt operatori $C^\infty(M)$-liniari şi deci într-adevăr ei reprezintă secţiuni în fibratele menţionate.

La fel ca în cazul fibratului tangent, definim operatorul

$$\operatorname{trace} \nabla^2 : C(E) \to C(E), \quad (\operatorname{trace} \nabla^2\sigma)(p) = \sum_{i=1}^{m} (\nabla^2\sigma)_p(X_i, X_i),$$

unde $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ este o bază ortonormată în T_pM. Operatorul $\operatorname{trace} \nabla^2 : C(E) \to C(E)$ este $\mathbb{R}$-liniar dar nu $C^\infty(M)$-liniar şi deci trace ∇^2 nu este o secţiune în $E^* \otimes E$.

Propoziţia 2.4.1. *Dacă (M, g) este o varietate riemanniană compactă, iar $(\nabla, \langle , \rangle)$ este o structură riemannniană pe (E, π, M), atunci* trace ∇^2 *este un operator simetric şi negativ definit în raport cu produsul scalar $(,)$ dat de*

$$(,) : C(E) \times C(E) \to \mathbb{R}, \quad (\sigma, \rho) = \int_M \langle \sigma, \rho \rangle \overline{v}_g.$$

Demonstraţia se face la fel ca în cazul fibratului tangent.

Pentru a simplifica notaţia, dat un fibrat vectorial (E, π, M), notăm $\mathcal{A}^r(E) = C(\Lambda^r T^*M \otimes E)$ spaţiul tututor r-formelor pe M cu valori în fibratul (E, π, M).

Definiţia 2.4.1. Fie ∇^E o conexiune liniară pe fibratul (E, π, M). Operatorul *diferenţiala exterioară*, sau *diferenţiala*, este definit de $d : \mathcal{A}^r(E) \to \mathcal{A}^{r+1}(E)$,

$$(d\sigma)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{a=1}^{r+1} (-1)^{a+1} \nabla^E_{X_i}(\sigma(X_1, \ldots, \widehat{X}_a, \ldots, X_{r+1}))$$
$$+ \sum_{a<b} (-1)^{a+b} \sigma([X_a, X_b], X_1, \ldots, \widehat{X}_a, \ldots, \widehat{X}_b, \ldots, X_{r+1}),$$

unde termenii de sub $^\wedge$ sunt omişi.

Dacă fibratul tangent TM este înzestrat cu o conexiune fără torsiune, de exemplu conexiunea Levi-Civita a unei metrici riemanniene, atunci

$$(d\sigma)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{a=1}^{r+1} (-1)^{a+1} (\nabla_{X_a}\sigma)(X_1, \ldots, \widehat{X}_a, \ldots, X_{r+1}),$$

adică d este antisimetrizarea lui ∇ ce acţionează pe fibratul $\Lambda^r T^*M \otimes E$. Reamintim că, dacă $\rho \in A^r(E)$, atunci

$$(\nabla_X \rho)(X_1, \ldots, X_r) = \nabla^E_X(\rho(X_1, \ldots, X_r)) - \sum_{a=1}^{r} \rho(X_1, \ldots, \nabla^M_X X_a, \ldots, X_r),$$

conform regulii Leibniz.

Pornind de la definiţia diferenţialei putem demonstra

$$d^2\sigma = R \wedge \sigma,$$

pentru $\sigma \in \mathcal{A}^2(E)$. În particular, dacă $\sigma \in \mathcal{A}^0(E)$, atunci

$$R(X, Y)\sigma = d^2\sigma(X, Y).$$

Notăm că relaţia $d^2 = 0$ care este fundamentală în cazul coomologiei de Rham este valabilă numai în cazul fibratelor plate, cum este cazul fibratului trivial $M \times \mathbb{R}$.

Definiţia 2.4.2. Fie ∇^E o conexiune liniară pe fibratul (E, π, M) şi g o metrică riemanniană pe M. Operatorul *codiferenţiala exterioară,* sau *codiferenţiala,* este definit de $\delta : \mathcal{A}^r(E) \to \mathcal{A}^{r-1}(E)$,

$$(\delta\sigma)_p(Y_1, \ldots, Y_{r-1}) = -\sum_{i=1}^{m} (\nabla_{X_i}\sigma)(X_i, Y_1, \ldots, X_{r-1}),$$

unde $p \in M$ iar $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ este o bază ortonormată în T_pM.

În particular, dacă $r = 1$ atunci $\delta\sigma = -\operatorname{trace} \nabla\sigma$. Operatorii diferenţiala exterioară şi codiferenţiala exterioară sunt legaţi prin

Propoziţia 2.4.2. *Dacă M este compactă, iar $\sigma \in \mathcal{A}^r(E)$ şi $\rho \in \mathcal{A}^{r-1}(E)$, atunci*

$$\int_M \langle d\rho, \sigma \rangle \, \overline{v}_g = \int_M \langle \rho, \delta\sigma \rangle \, \overline{v}_g.$$

Definiţia 2.4.3. Operatorul Laplace este definit de

$$\Delta : \mathcal{A}^r(E) \to \mathcal{A}^r(E), \quad \Delta = d\delta + \delta d.$$

La fel ca în cazul fibratului trivial $E = M \times \mathbb{R}$, când M este compactă, operatorul Δ este simetric şi pozitiv definit. Mai mult, $\Delta\sigma = 0$ (caz în care σ se numeşte *armonică*) dacă şi numai dacă $d\sigma = \delta\sigma = 0$.

Fie acum ∇^E o conexiune liniară pe fibratul (E, π, M) şi g o metrică riemanniană pe M. Cu ajutorul conexiunilor ∇^E şi ∇^M am definit conexiunea ∇ pe fibratul $\Lambda^r T^*M \otimes E$. Curbura ei este dată de

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\sigma)(X_1, \ldots, X_r) &= R^E(X,Y)(\sigma(X_1, \ldots, X_r)) \\ &\quad -\sum_{a=1}^{r} \sigma(X_1, \ldots, R^M(X,Y)X_a, \ldots, X_r),\end{aligned}$$

unde $X, Y, X_a \in C(TM)$ iar $\sigma \in \mathcal{A}^r(E)$.

Definim acum operatorul $S \in C(\mathrm{Hom}(\Lambda^r T^*M \otimes E, \Lambda^r T^*M \otimes E))$ prin $S = 0$, dacă $r = 0$, şi

$$(S_p\sigma)(Y_1, \ldots, Y_r) = \sum_{i,a} (-1)^{a+1} (R(X_i, Y_a)\sigma)(X_i, Y_1, \ldots, \widehat{Y}_a, \ldots, Y_r),$$

dacă $r \geq 1$, unde $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ este o bază ortonormată în T_pM.

Teorema 2.4.1. (**Formula lui Weitzenböck**.) *Pentru* $\sigma \in \mathcal{A}^r(E)$ *avem*

i) $\Delta\sigma = -\operatorname{trace}\nabla^2\sigma + S(\sigma)$,

ii) $\frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 = \langle\Delta\sigma, \sigma\rangle - |\nabla\sigma|^2 - \langle S(\sigma), \sigma\rangle$.

Dacă $\sigma \in \mathcal{A}^0(E)$, atunci

$$\Delta\sigma = -\operatorname{trace}\nabla d\sigma = -\operatorname{trace}\nabla^2\sigma, \quad \frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 = \langle\Delta\sigma, \sigma\rangle - |\nabla\sigma|^2,$$

iar dacă $\sigma \in \mathcal{A}^1(E)$ avem

$$\begin{aligned}(\Delta\sigma)_p(X) &= -(\operatorname{trace}\nabla^2\sigma)_p(X) + \sum_i R^E(X_i, X)\sigma(X_i) \\ &\quad - \sum_i \sigma(R^M(X_i, X)X_i)\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\Delta|\sigma|^2)_p &= \langle\Delta\sigma, \sigma\rangle_p - |\nabla\sigma|_p^2 - \sum_{i,j}\langle R^E(X_i, X_j)\sigma(X_i), \sigma(X_j)\rangle \\ &\quad - \sum_i \langle\sigma(\operatorname{Ricci}(X_i)), \sigma(X_i)\rangle,\end{aligned}$$

unde $\{X_i\}_{i=1,\dots,m}$ este o bază ortonormată în T_pM.

3

VARIETĂŢI COMPLEXE

3.1. Preliminarii algebrice

A) Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune n. Notăm $V^c = V \otimes \mathbb{C}$ complexificatul lui V, unde produsul tensorial este considerat peste $\mathbb{R}$. Un element $v \in V^c$ se scrie în mod unic sub forma

$$v = v_1 + iv_2 = v_1 \otimes 1 + v_2 \otimes i.$$

V^c este un spaţiu vectorial real de dimensiune $2n$. Într-adevăr, dacă $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază în V atunci $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ este o bază în V^c.

V^c se poate organiza şi ca spaţiu vectorial complex definind

$$iv = i(v_1 + iv_2) = -v_2 + iv_1 = -v_2 \otimes 1 + v_1 \otimes i$$

(am înmulţit, formal, cu i). Dacă $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază în V peste $\mathbb{R}$, atunci $\{e_1 = e_1 \otimes 1, \ldots, e_n = e_n \otimes 1\}$ este o bază în V^c peste $\mathbb{C}$.

Se verifică uşor că

Propoziţia 3.1.1. *Aplicaţiile*

$$V \to V^c, \quad v \mapsto v = v \otimes 1; \quad V \to V^c, \quad v \mapsto iv = v \otimes i$$

sunt monomorfisme reale şi avem descompunerea, peste $\mathbb{R}$*,*

$$V^c = V \oplus iV.$$

Pentru $v = v_1 + iv_2 \in V^c$ definim *conjugatul* său prin $\overline{v} = v_1 - iv_2 \in V^c$.
B) Considerăm acum V un spaţiu vectorial real de dimensiune n şi $J \in \mathrm{Hom}\,(V, V) = \mathrm{End}(V)$, astfel încât $J^2 = -\mathbf{1}$ (J se numeşte *structură complexă* pe V). Observăm că, în acest caz, $n = 2m$ deoarece V admite o bază de tipul $\{e_1, \ldots, e_m, J(e_1), \ldots, J(e_m)\}$. Mai mult, V poate fi organizat şi ca spaţiu vectorial complex, de dimensiune m, definind

$$iv = J(v).$$

Extindem operatorul J la V^c prin

$$J(v_1 + iv_2) = J(v_1) + iJ(v_2)$$

şi notăm extinsul tot cu J. Se vede că $J : V^c \to V^c$ este un operator complex (şi real). Mai mult, relaţia $J^2 = -\mathbf{1}$ rămâne valabilă şi pentru extins.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $J(v) = \lambda v, v \neq 0$. Atunci, aplicând J obţinem

$$\begin{aligned} J^2(v) &= J(\lambda v) = \lambda J(v) = \lambda^2 v \\ &= -v, \end{aligned}$$

deci $\lambda^2 = -1$, adică $\lambda = \pm i$. Fie $v = v_1 + iv_2$ astfel încât $J(v_1 + iv_2) = i(v_1 + iv_2)$. Rezultă imediat că $v_2 = -J(v_1)$, deci $v = v_1 - iJ(v_1)$. Analog, $v = v_1 + iv_2$ satisface $J(v) = -iv$ dacă şi numai dacă $v = v_1 + iJ(v_1)$.

Notăm

$$\begin{aligned} V^{1,0} &= \{v \in V^c : J(v) = iv\} = \{v - iJ(v) : v \in V\}, \\ V^{0,1} &= \{v \in V^c : J(v) = -iv\} = \{v + iJ(v) : v \in V\} \end{aligned}$$

şi avem descompunerea în sumă directă peste $\mathbb{C}$

$$V^c = V^{1,0} \oplus V^{0,1}.$$

Desigur $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$.

Ne reamintim acum că V poate fi organizat şi ca spaţiu vectorial complex. Se verifică uşor că aplicaţia

$$V \to V^{1,0}, \quad v \mapsto v - iJ(v)$$

este un izomorfism complex, iar aplicaţia

$$V \to V^{0,1}, \quad v \mapsto v + iJ(v)$$

este un izomorfism complex-conjugat.
C) Fie V un spaţiu vectorial complex de dimensiune m. Atunci V poate fi gândit şi ca spaţiu vectorial real de dimensiune $n = 2m$. Într-adevăr, dacă $\{e_1, \dots, e_m\}$ este o bază în V peste $\mathbb{C}$, atunci $\{e_1, \dots, e_m, ie_1, \dots, ie_m\}$ este o bază în V peste $\mathbb{R}$.

Considerăm operatorul $J : V \to V$ definit prin

$$J(v) = iv.$$

Este clar că J este un operator complex, deci şi real, iar ca operator real are matricea, relativ la baza $\{e_1, \dots, e_m, ie_1, \dots, i_m\}$,

$$\left(\begin{array}{c:c} 0_m & -I_m \\ \hdashline I_m & 0_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}).$$

J satisface relaţia $J^2 = -\mathbf{1}$.
D) Considerăm $\mathbb{C}^m$ cu structura uzuală de spaţiu vectorial complex

$$(z^1, \dots, z^m) + (w^1, \dots, w^m) = (z^1 + w^1, \dots, z^m + w^m),$$

şi

$$i(z^1, \dots, z^m) = (iz^1, \dots, iz^m).$$

Considerăm aplicaţia liniară reală $\phi : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{2m}$ definită de

$$z = (z^1, \dots, z^m) = (x^1 + iy^1, \dots, x^m + iy^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m).$$

Să observăm acum că

$$\phi(iz) = \phi((-y^1 + ix^1, \dots, -y^m + ix^m)) = (-y^1, \dots, -y^m, x^1, \dots, x^m)$$

şi atunci definim structura complexă J pe $\mathbb{R}^{2m}$ prin

$$\left(\begin{array}{c:c} 0_m & -I_m \\ \hdashline I_m & 0_m \end{array}\right),$$

în raport cu baza canonică $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ din $\mathbb{R}^{2m}$. Prin urmare $\phi(iz) = J(\phi(z))$ şi în acest mod am identificat spaţiul complex $\mathbb{C}^m$ cu $(\mathbb{R}^{2m}, J)$.
E) Fie V_1 şi V_2 două spaţii vectoriale complexe de dimensiune m_1 şi m_2, respectiv, şi considerăm $F : V_1 \to V_2$ o aplicaţie liniară complexă. Fie $\{e_1, \ldots, e_{m_1}\}$ şi $\{f_1, \ldots, f_{m_2}\}$ baze în V_1 şi V_2, respectiv. Notăm $A = B + iC \in \mathcal{M}_{m_2 \times m_1}(\mathbb{C})$ matricea lui F în raport cu cele două baze, adică $F(e_k) = a_k^l f_l$, unde $a_k^l = b_k^l + ic_k^l$, iar b_k^l şi c_k^l sunt reale.

Privim acum V_1 şi V_2 ca spaţii vectoriale reale, iar F ca aplicaţie liniară reală. Considerăm $\{e_1, \ldots, e_{m_1}, ie_1, \ldots, ie_{m_1}\}$ şi $\{f_1, \ldots, f_{m_2}, if_1, \ldots, if_{m_2}\}$ baze în V_1 şi V_2, respectiv, ca spaţii vectoriale reale. Vrem să găsim expresia matricii lui F relativ la cele două baze. Avem

$$F(e_k) = a_k^l f_l = (b_k^l + ic_k^l) f_l = b_k^l f_l + c_k^l i f_l$$

şi

$$F(ie_k) = iF(e_k) = -c_k^l f_l + ib_k^l f_l = -c_k^l f_l + b_k^l i f_l.$$

Prin urmare

$$F = \left(\begin{array}{c|c} B & -C \\ \hline C & B \end{array} \right).$$

F) Fie acum V_1 şi V_2 două spaţii vectoriale reale de dimensiune $n_1 = 2m_1$ şi $n_2 = 2m_2$, respectiv. Considerăm J_1 şi J_2 două structuri complexe pe V_1 şi V_2. Fie $F : V_1 \to V_2$ o aplicaţie liniară reală şi presupunem că $F \circ J_1 = J_2 \circ F$. Vrem să găsim forma matricii lui F în raport cu bazele $\{e_1, \ldots, e_{m_1}, J_1(e_1), \ldots, J_1(e_{m_1})\}$ şi $\{f_1, \ldots, f_{m_2}, J_2(f_1), \ldots, J_2(f_{m_2})\}$. Avem

$$F(e_k) = b_k^l f_l + c_k^l J_2(f_l)$$

şi

$$F(J_1(e_k)) = J_2(F(e_k)) = b_k^l J_2(f_l) - c_k^l f_l.$$

Deci matricea lui F este

$$\left(\begin{array}{c|c} B & -C \\ \hline C & B \end{array} \right).$$

Dacă considerăm V_1 şi V_2 ca spaţii vectoriale complexe, atunci şi F poate fi gândită ca aplicaţie liniară complexă, iar matricea ei relativ la bazele $\{e_1, \ldots, e_{m_1}\}$ şi $\{f_1, \ldots, f_{m_2}\}$ este $A = B + iC$.

Presupunem că $m_1 = m_2$. Avem

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{array}{c:c} B & -C \\ \hdashline C & B \end{array}\right) &= \det\left(\begin{array}{c:c} B+iC & -C+iB \\ \hdashline C & B \end{array}\right) \\ &= \det\left(\begin{array}{c:c} B+iC & -C+iB-iB+C \\ \hdashline C & B-iC \end{array}\right) \\ &= \det A \det \overline{A} = \det A \overline{(\det A)} \\ &= |\det A|^2.\end{aligned}$$

G) Fie V un spaţiu vectorial real şi notăm cu V^*, sau $V^*_{\mathbb{R}}$, dualul său, adică

$$V^*_{\mathbb{R}} = \{\theta : V \to \mathbb{R}, \theta \text{ este } \mathbb{R}\text{-liniară}\}.$$

Se ştie că $(V^*_{\mathbb{R}})^c = (V^c)^*_{\mathbb{C}}$. Un element din $(V^c)^*_c$ este de forma $\theta + i\omega$, unde $\theta, \omega \in V^*_{\mathbb{R}}$, iar

$$(\theta + i\omega)(u + iv) = \theta(u) - \omega(v) + i\{\theta(v) + \omega(u)\}.$$

Dacă spaţiul vectorial V admite o structură complexă J, atunci putem defini $J^* : V^* \to V^*$ prin

$$\theta \mapsto J^*\theta, \quad (J^*\theta)(u) = \theta(J(u)), \quad \forall u \in V.$$

Avem $J^{*2} = -\mathbf{1}$. În continuare, vom nota J^* tot cu J.

Propoziţia 3.1.2. *Avem descompunerea în sumă directă peste* $\mathbb{C}$

$$(V^c)^*_{\mathbb{C}} = V_{1,0} \oplus V_{0,1},$$

unde $V_{1,0} = \{\theta - iJ(\theta) : \theta \in V^*\}$ *iar* $V_{0,1} = \{\theta + iJ(\theta) : \theta \in V^*\}$. *Mai mult,*

$$V_{1,0} = \{\omega \in (V^c)^*_{\mathbb{C}} : \omega(v) = 0, \forall v \in V^{0,1}\}$$

şi

$$V_{0,1} = \{\omega \in (V^c)^*_{\mathbb{C}} : \omega(v) = 0, \forall v \in V^{1,0}\}.$$

H) Fie V un spaţiu vectorial real înzestrat cu o structură complexă J. Numim *produs scalar hermitian* pe (V, J) un produs scalar g pe V ce satisface

$$g(J(u), J(v)) = g(u, v), \quad \forall u, v \in V.$$

Notăm că, dat (V, J), întotdeauna putem construi un produs scalar hermitian g astfel: considerăm h un produs scalar arbitrar şi definim $g(u, v) = h(u, v) + h(J(u), J(v))$. Produsul scalar g astfel definit este hermitian.

Putem demonstra uşor

Propoziţia 3.1.3. *Fie g un produs scalar hermitian pe (V, J). Atunci V admite o bază ortonormată de tipul $\{e_1, \ldots, e_m, J(e_1), \ldots, J(e_m)\}$.*

Considerăm g un produs scalar hermitian pe (V, J) şi extindem J şi g la V^c prin $\mathbb{C}$-liniaritate şi $\mathbb{C}$-biliniaritate, respectiv. Prin calcul direct se verifică

Propoziţia 3.1.4. *Avem*

i) $g(J(u), J(v)) = g(u, v)$, *oricare ar fi* $u, v \in V^c$,

ii) $g(u, v) = g(v, u)$, *oricare ar fi* $u, v \in V^c$,

iii) $g(\overline{u}, \overline{v}) = \overline{g(u, v)}$, *oricare ar fi* $u, v \in V^c$,

iv) $g(u, \overline{u}) > 0$, *oricare ar fi* $u \in V^c \backslash \{0\}$,

v) $g(u, v) = 0$, *oricare ar fi* $u, v \in V^{1,0}$, *sau oricare ar fi* $u, v \in V^{0,1}$.

Definim o formă biliniară Φ pe (V, J, g) prin

$$\Phi(u, v) = g(u, J(v)), \quad \forall u, v \in V.$$

Se verifică uşor că $\Phi(u, v) = -\Phi(v, u)$ şi $\Phi(J(u), J(v)) = \Phi(u, v)$. Extindem apoi Φ la V^c prin $\mathbb{C}$-biliniaritate.

Propoziţia 3.1.5. *Φ este o formă de tip $(1, 1)$, şi scriem $\Phi \in \Lambda^{1,1}(V)$, adică $\Phi(u, v) = 0$, oricare ar fi $u, v \in V^{1,0}$ sau oricare ar fi $u, v \in V^{0,1}$.*

Fie $\{v_1, \ldots, v_m\}$ o bază în $V^{1,0}$ peste $\mathbb{C}$ obţinută astfel: dacă $\{e_1, \ldots, e_m, J(e_1), \ldots, J(e_m)\}$ este o bază a lui V peste $\mathbb{R}$, considerăm $v_1 = e_1 - iJ(e_1), \ldots, v_m = e_m - iJ(e_m)$. Desigur, $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_m\}$ este o bază în $V^{0,1}$. Considerăm şi $\{\theta^1, \ldots, \theta^m\}$ duala bazei $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Avem că $\{\theta^1, \ldots, \theta^m\}$ este bază în $V_{1,0}$, iar $\{\overline{\theta}^1, \ldots, \overline{\theta}^m\}$ este bază în $V_{0,1}$.

Propoziţia 3.1.6. *Notăm* $g_{k\bar{l}} = g(v_k, \overline{v}_l)$ *şi* $\Phi_{k\bar{l}} = \Phi(v_k, \overline{v}_l)$. *Avem*

i) $g_{k\bar{l}} = \overline{g_{l\bar{k}}}$ *şi* $g = 2g_{k\bar{l}}\theta^k \odot \overline{\theta}^l$,

ii) $\Phi_{k\bar{l}} = -ig_{k\bar{l}}$ *şi* $\Phi = -ig_{k\bar{l}}\theta^k \wedge \overline{\theta}^l$.

Demonstraţie. Pentru i) avem

$$g_{k\bar{l}} = g(v_k, \overline{v}_l) = g(\overline{v}_l, v_k) = \overline{g(v_l, \overline{v}_k)} = \overline{g_{l\bar{k}}}.$$

Cum $\{\theta^k \odot \theta^j\}_{k\leq j} \cup \{\theta^k \odot \overline{\theta}^j\}_{k,j} \cup \{\overline{\theta}^k \odot \overline{\theta}^j\}_{k\leq j}$ este o bază în $\odot^2 V^c$ şi $g(v_k, v_j) = 0 = g(\overline{v}_k, \overline{v}_j)$, rezultă

$$g = 2g_{k\bar{j}}\theta^k \odot \overline{\theta}^j.$$

ii) Deoarece $\{\theta^k \wedge \theta^j\}_{k<j} \cup \{\theta^k \wedge \overline{\theta}^j\}_{k,j} \cup \{\overline{\theta}^k \wedge \overline{\theta}^j\}_{k<j}$ este o bază în $\Lambda^2 V^c$ şi $\Phi(v_k, v_j) = 0 = \Phi(\overline{v}_k, \overline{v}_j)$, rezultă $\Phi = \Phi_{k\bar{l}}\theta^k \wedge \overline{\theta}^l$, unde

$$\begin{aligned} \Phi_{k\bar{l}} &= \Phi(v_k, \overline{v}_l) = g(v_k, J(\overline{v}_l)) = -ig(v_k, \overline{v}_l) \\ &= -ig_{k\bar{l}}. \end{aligned}$$

Deci $\Phi = -ig_{k\bar{l}}\theta^k \wedge \overline{\theta}^l$. $\square$

Am văzut că extensia lui g la V^c nu defineşte un produs scalar. Putem totuşi defini cu ajutorul lui g un produs scalar, notat $\langle\langle , \rangle\rangle$, pe $V^{1,0}$ astfel

$$\langle\langle , \rangle\rangle : V^{1,0} \times V^{1,0} \to \mathbb{C}, \quad \langle\langle u, v\rangle\rangle = g(u, \overline{v}).$$

Se verifică imediat că

i)) $\langle\langle , \rangle\rangle$ este $\mathbb{C}$-liniară în primul argument,

ii)) $\langle\langle , \rangle\rangle$ este $\overline{\mathbb{C}}$-liniară în al doilea argument,

iii) $\langle\langle u, v\rangle\rangle = \overline{\langle\langle v, u\rangle\rangle}$,

iv) $\langle\langle u, u\rangle\rangle > 0$, oricare ar fi $u \in V^{1,0}\backslash\{0\}$.

3.2. Varietăţi complexe

Reamintim că o varietate topologică M de dimensiune n este un spaţiu topologic separat Hausdorff, admite o bază numărabilă a topologiei şi este local euclidian de dimensiune n.

Presupunem că $n = 2m$ şi identificăm $\mathbb{R}^n$ cu $\mathbb{C}^m$. O *hartă locală complexă* pe M este o pereche $(U;\varphi)$, unde U este deschisă în M, $\varphi(U)$ este deschis în $\mathbb{C}^m$, iar $\varphi : U \to \varphi(U)$ este homeomorfism.

Definiţia 3.2.1. *Două hărţi locale complexe $(U;\varphi)$ şi $(V;\psi)$ sunt compatibile dacă $\psi \circ \varphi^{-1}$ şi $\varphi \circ \psi^{-1}$ sunt olomorfe.*

Notăm $(U;\varphi) = (U; z^1, \dots, z^m) = (U; x^1 + iy^1, \dots, x^m + iy^m)$ şi $(V;\psi) = (V; w^1, \dots, w^m) = (V; u^1 + iv^1, \dots, u^m + iv^m)$. Funcţia $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ este olomorfă dacă şi numai dacă

$$u^k = u^k(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m)$$

şi

$$v^k = v^k(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m)$$

sunt netede oricare ar fi $k = 1, \dots, m$, şi în plus sunt verificate condiţiile Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^k}{\partial x^l} = \dfrac{\partial v^k}{\partial y^l} \\ \dfrac{\partial v^k}{\partial x^l} = -\dfrac{\partial u^k}{\partial y^l} \end{cases}, \quad \forall k, l = 1, \dots, m.$$

Dacă $\psi \circ \varphi^{-1}$ este olomorfă, atunci

$$\det \left(\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial u^k}{\partial x^l} & \dfrac{\partial u^k}{\partial y^l} \\ \hdashline \dfrac{\partial v^k}{\partial x^l} & \dfrac{\partial v^k}{\partial y^l} \end{array} \right) = \left| \det \left(\dfrac{\partial w^k}{\partial z^l} \right) \right|^2 .$$

Reamintim următorul rezultat din teoria funcţiilor olomorfe.

Teorema 3.2.1. *Fie D deschisă în $\mathbb{C}^m$ şi $F : D \to \mathbb{C}^m$ o aplicaţie olomorfă şi injectivă. Atunci $F(D)$ este deschisă în $\mathbb{C}^m$, iar $F^{-1} : F(D) \to D$ este olomorfă (spunem că $F : D \to F(D)$ este biolomorfă).*

Corolarul 3.2.1. *Fie $F : U \to V$ un homeomorfism, unde U şi V sunt deschise în $\mathbb{C}^m$. Dacă F este olomorfă, atunci şi F^{-1} este olomorfă.*

Notăm că rezultatul de mai sus nu este valabil în cazul real.

Putem afirma acum că două hărţi locale complexe $(U;\varphi)$ şi $(V;\psi)$ sunt compatibile dacă $\psi \circ \varphi^{-1}$ (sau $\varphi^{-1} \circ \psi$) este olomorfă.

Definiţia 3.2.2. *O structură de varietate complexă de dimensiune m* pe o varietate topologică de dimensiune $2m$ este definită de un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha;\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ de hărţi locale complexe ce satisface

i) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ formează o acoperire deschisă a lui M,

ii) oricare ar fi $(U_\alpha;\varphi_\alpha)$ şi $(U_\beta;\varphi_\beta)$ două hărţi locale din $\mathcal{A}$ cu $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, ele sunt compatibile,

iii) oricare ar fi $(V;\psi)$ o hartă locală complexă compatibilă cu orice $(U_\alpha;\varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, ea aparţine lui $\mathcal{A}$.

Condiţia iii) se numeşte condiţia de *completitudine.* La fel ca şi în cazul real se demonstrează că un atlas ce verifică i) şi ii) se extinde în mod unic la un atlas complet (ce verifică şi iii)).

Rezultă imediat

Propoziţia 3.2.1. *Dacă M este o varietate complexă de dimensiune m, atunci ea este o varietate reală de dimensiune $n = 2m$ şi este orientabilă.*

În continuare vom prezenta câteva exemple de varietăţi complexe.

Exemplul 3.2.1. Fie D un deschis din $\mathbb{C}^m$. Atunci D se poate organiza ca varietate complexă considerând atlasul $\mathcal{A} = \{(D, \mathbf{1})\}$.

Exemplul 3.2.2. Fie M o submulţime a lui $\mathbb{C}^m$ definită prin anularea unui număr de funcţii olomorfe care sunt funcţional independente, adică $M = f_{r+1}^{-1}\{0\} \cap \ldots \cap f_m^{-1}\{0\}$, unde $f_{r+1}, \ldots, f_m : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ sunt olomorfe şi rangul matricei $(\frac{\partial f_a}{\partial z^k}(z))$, peste $\mathbb{C}$, este maxim, adică $m - r$, oricare ar fi $z \in M$. Ca şi în cazul real, M se poate organiza ca varietate complexă de dimensiune r.

Din Principiul de Maxim al Modulului, forma tare, rezultă că în $\mathbb{C}^m$ nu există subvarietăţi complexe compacte.

Exemplul 3.2.3. Orice suprafaţă, adică orice varietate reală de dimensiune 2, orientabilă, se poate organiza ca varietate complexă.

Într-adevăr, fie M^2 o suprafaţă şi considerăm g o metrică riemanniană pe M. Se ştie că există coordonatele locale izoterme pe M astfel încât, în aceste coordonate, g se exprimă

$$g = \lambda^2(dx^2 + dy^2),$$

unde $\lambda = \lambda(x, y) > 0$. Presupunem acum că harta locală $(U; x, y)$ este pozitiv orientată şi scriem $dx \wedge dy > 0$. Introducem harta locală complexă $(U; z), z = x + iy$. Avem

$$g = \lambda^2(dx^2 + dy^2) = \lambda^2 dz \odot d\overline{z} \quad \text{şi} \quad dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\overline{z}.$$

Pentru alte coordonate izoterme $(V; u, v)$ pe M, $U \cap V \neq \emptyset$, $du \wedge dv > 0$, introducem în mod analog harta locală complexă $(V; w), w = u + iv$. Pe $U \cap V$ avem $w = w(z, \overline{z})$ şi vrem să demonstrăm că $\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0$, adică w este funcţie olomorfă de z. Avem

$$\begin{aligned}
\lambda^2 dz \odot d\overline{z} &= \mu^2 dw \odot d\overline{w} = \mu^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \right) \odot \left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial z} dz + \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \right) \\
&= \mu^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} dz \odot dz + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \right) dz \odot d\overline{z} + \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \odot d\overline{z} \right) \\
&= \mu^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} dz^2 + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \right)} d\overline{z}^2 + \left(\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} \right|^2 \right) dz \odot d\overline{z} \right).
\end{aligned}$$

Deci

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0. \tag{3.2.1}$$

Dar

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= \frac{i}{2} dw \wedge d\overline{w} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge \left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}dz + \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right|^2\right) dz \wedge d\overline{z} \\ &= \left(\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right|^2\right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

şi cum cele două hărţi locale sunt pozitiv orientate, obţinem

$$\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right|^2 > 0.$$

Acum, ţinând cont de (3.2.1), rezultă $\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0$, adică $w = w(z)$ este olomorfă.

Exemplul 3.2.4. Sfera $\mathbb{S}^2 = \{(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$ se poate organiza ca varietate complexă 1 dimensională.

Într-adevăr, considerăm $\mathcal{A} = \{(U_N; \varphi_N), (U_S; \varphi_S)\}$ atlasul pe $\mathbb{S}^2$ obţinut cu proiecţia stereografică. Reamintim

$$\varphi_N(\xi) = \left(\frac{\xi^1}{1-\xi^3}, \frac{\xi^2}{1-\xi^3}\right) = (x^1, x^2)$$

şi

$$\varphi_N(\xi) = \left(\frac{\xi^1}{1+\xi^3}, \frac{\xi^2}{1+\xi^3}\right) = (y^1, y^2).$$

Definim coordonatele complexe $z = x + iy$ şi $w = y^1 - iy^2$ (la w am considerat semnul " $-$ " deoarece $(U_N; \varphi_N)$ şi $(U_S; \varphi_S)$ nu sunt la fel orientate). Se verifică imediat că

$$w = w(z) = \frac{1}{z}$$

şi deci este olomorfă.

Exemplul 3.2.5. Spaţiul proiectiv complex m-dimensional $P^m(\mathbb{C})$, sau mulţimea dreptelor complexe din $\mathbb{C}^{m+1}$ care trec prin origine, se poate organiza ca varietate complexă de dimensiune m.

Într-adevăr, pe $\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\}$ definim relaţia de echivalenţă

$$\xi \sim \eta \Leftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \text{ astfel } \quad \text{încât } \xi = \rho\eta.$$

Prin definiţie $P^m(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\})/\sim$. Notăm cu $\pi : \mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\} \to P^m(\mathbb{C})$ proiecţia canonică. Pe $P^m(\mathbb{C})$ definim topologia factor, adică D este deschisă în $P^m(\mathbb{C})$ dacă contraimaginea sa $\pi^{-1}(D)$ este deschisă în $\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\}$.

Se verifică faptul că " $\sim$ " este o relaţie deschisă, adică orice deschis D din $\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\}$ are saturata $[D] = \bigcup_{\rho\in\mathbb{C}^*} \rho D$ deschisă în $\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\}$.

Cum " $\sim$ " este deschisă şi $\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\}$ are o bază numărabilă a topologiei, rezultă că şi $P^m(\mathbb{C})$ are o bază numărabilă a topologiei. $P^m(\mathbb{C})$ este separat Hausdorff, deoarece graficul relaţiei " $\sim$ ", adică $Graf\ \sim$, este închis în $(\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\}) \times (\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\})$.

Construcţia atlasului complex pe $P^m(\mathbb{C})$ se face astfel

Fie $\widetilde{U}_k = \{\xi \in \mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\} : \xi^k \neq 0\}$. Este clar că $\widetilde{U}_k$ este deschisă în $\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\}$ şi deci $U_k = \pi(\widetilde{U}_k)$ este deschisă în $P^m(\mathbb{C})$. Definim

$$\varphi_k : U_k \to \mathbb{C}^m, \quad \varphi_k([\xi]) = \left(\frac{\xi^1}{\xi^k}, \dots, \frac{\widehat{\xi^k}}{\xi^k}, \dots, \frac{\xi^{m+1}}{\xi^k}\right).$$

φ_k este bijecţie şi

$$\varphi_k^{-1}(z^1, \dots, z^m) = [(z^1, \dots, z^{k-1}, 1, z^k, \dots, z^m)].$$

Se observă că $\varphi_k : U_k \to \mathbb{C}^m$ este un homeomorfism, iar $\mathcal{A} = \{(U_k; \varphi_k) : k = 1, \dots, m+1\}$ defineşte un atlas complex.

Mai mult, $P^m(\mathbb{C})$ este compactă şi conexă.

3.3. Varietăţi aproape complexe

Noţiunile pe care le-am introdus în partea de "Preliminarii algebrice" vor fi extinse în cadrul varietăţilor.

Definiţia 3.3.1. O *varietate aproape complexă* este o varietate reală M înzestrată cu un câmp tensorial $J \in C(T_1^1(M))$ cu proprietatea $J^2 = -\mathbf{1}$.

Deci, dacă (M, J) este o varietate aproape complexă, atunci oricare ar fi un punct $p \in M$, $J(p)$ este o structură complexă pe spaţiul vectorial real T_pM.

Propoziţia 3.3.1. *Fie (M, J) o varietate aproape complexă. Atunci M este de dimensiune pară şi orientabilă.*

Demonstraţie. Fie $p \in M$ un punct fixat arbitrar. La fel ca în partea de "Preliminarii algebrice" putem considera în T_pM o bază specială de forma $\{X_1(p), \ldots, X_m(p), J(X_1(p)), \ldots, J(X_m(p))\}$ şi deci M are dimensiunea $n = 2m$. Prelungim $X_1(p), \ldots, X_m(p)$ la $X_1, \ldots, X_m \in C(TM)$. Fie $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^{2m})$ o hartă locală pe M, $p \in U$. Cum determinantul matricei de trecere de la $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{2m}}\}$ la $\{X_1, \ldots, X_m, J(X_1), \ldots, J(X_m)\}$ este diferit de zero în p, el va fi diferit de zero pe o vecinătate a lui p. Micşorând eventual U putem presupune că $\{X_1(q), \ldots, X_m(q), J(X_1(q)), \ldots,$
$J(X_m(q))\}$ este bază în T_qM, oricare ar fi $q \in U$. Prin urmare, oricare ar fi un punct $p \in M$, există U un deschis ce conţine p şi $X_1, \ldots, X_m \in C(TU)$ astfel încât $\{X_1(q), \ldots, X_m(q), J(X_1(q)), \ldots, J(X_m(q))\}$ este bază în T_qM, oricare ar fi $q \in U$.

Considerăm $(U; \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^{2m})$ o hartă locală astfel încât determinantul matricei de trecere de la $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{2m}}\}$ la $\{X_1, \ldots, X_m, J(X_1), \ldots,$ $J(X_m)\}$ să fie pozitiv pe U. Analog, considerăm $(V; \psi) = (V; y^1, \ldots, y^{2m})$ hartă locală astfel încât determinantul matricei de trecere de la $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots,$ $\frac{\partial}{\partial y^{2m}}\}$ la $\{Y_1, \ldots, Y_m, J(Y_1), \ldots, J(Y_m)\}$ să fie pozitiv pe V. Deoarece, pe $U \cap V$, matricea de trecere de la baza $\{X_1, \ldots, X_m, J(X_1), \ldots, J(X_m)\}$ la baza $\{Y_1, \ldots, Y_m, J(Y_1), \ldots, J(Y_m)\}$ este de forma

$$\left(\begin{array}{c:c} B & -C \\ \hdashline C & B \end{array}\right),$$

deci are determinantul strict pozitiv, va rezulta că şi matricea de trecere de la $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{2m}}\}$ la $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{2m}}\}$ are determinantul strict pozitiv. Prin urmare putem construi un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha; \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ pe M astfel încât $\det D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, şi deci M este orientabilă.$\square$

Propoziţia 3.3.2. *Orice varietate complexă este o varietate aproape complexă.*

Demonstraţie. Fie M o varietate complexă de dimensiune m şi fie $p \in M$ un punct fixat arbitrar. Considerăm $(U; z^1, \ldots, z^m)$ o hartă locală complexă pe M în p. Notăm $z^k = x^k + iy^k$ şi definim $J_p \in T^1_{1,p}(M)$ prin

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial}{\partial y^k} \quad \text{şi} \quad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Evident $J_p^2 = -\mathbf{1}$. Definiţia are caracter geometric, adică nu depinde de harta complexă folosită. Într-adevăr, fie $(V; w^1, \ldots, w^m)$ o altă hartă locală complexă în p. Notăm $w^k = u^k + iv^k$ şi definim $\widetilde{J}_p \in T^1_{1,p}(M)$ prin

$$\widetilde{J}_p\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \frac{\partial}{\partial v^k} \quad \text{şi} \quad \widetilde{J}_p\left(\frac{\partial}{\partial v^k}\right) = -\frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Din condiţiile Cauchy-Riemann rezultă

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_p\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \widetilde{J}_p\left(\frac{\partial u^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial v^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial v^l}\right) \\
&= \frac{\partial u^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial v^l} - \frac{\partial v^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial u^l} = \frac{\partial v^l}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial v^l} + \frac{\partial u^l}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial u^l} = \frac{\partial}{\partial y^k} \\
&= J_p\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right).
\end{aligned}$$

Analog $\widetilde{J}_p\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = J_p\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)$ şi prin urmare $\widetilde{J}_p = J_p$. Lăsând punctul p liber obţinem $J \in C(T^1_1(M))$ şi $J^2 = -\mathbf{1}$.□

Definiţia unei *aplicaţii olomorfe* între două varietăţi complexe este analoagă definiţiei unei aplicaţiei netede între două varietăţi reale.

Definiţia 3.3.2. Fie (M, J) şi (M', J') două varietăţi aproape complexe şi $\phi : M \to N$ o aplicaţie netedă. Aplicaţia ϕ se numeşte *aplicaţie aproape complexă* dacă

$$J' \circ d\phi(p) = d\phi \circ J(p), \quad \forall p \in M.$$

Propoziţia 3.3.3. *Fie M şi M' două varietăţi complexe. O aplicaţie $\phi : M \to M'$ este olomorfă dacă şi numai dacă ea este aproape complexă în raport cu structurile canonice J şi J'.*

Demonstraţie. Fie $(U;\varphi) = (U; z^1, \ldots, z^m)$ o hartă locală complexă pe M, $z^k = x^k + iy^k$, şi $(V;\psi) = (V; w^1, \ldots, w^{m'})$ o hartă locală complexă pe M', $w^\alpha = u^\alpha + iv^\alpha$. În aceste două hărţi ϕ este reprezentată de

$$\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1} = (\phi^1, \ldots, \phi^{m'}), \quad w^\alpha = \phi^\alpha(z^1, \ldots, z^m), \quad \alpha = 1, \ldots, m'.$$

Presupunem că ϕ este olomorfă. Atunci, scriind $\phi^\alpha = \phi'^\alpha + i\phi''^\alpha$, avem îndeplinite condiţiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \phi'^\alpha}{\partial x^k} = \frac{\partial \phi''^\alpha}{\partial y^k} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial \phi''^\alpha}{\partial x^k} = -\frac{\partial \phi'^\alpha}{\partial y^k}.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} J' d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= J'\left(\frac{\partial \phi'^\alpha}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial \phi''^\alpha}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right) \\ &= \frac{\partial \phi'^\alpha}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial v^\alpha} + \frac{\partial \phi''^\alpha}{\partial x^k}\left(-\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) \\ &= \frac{\partial \phi''^\alpha}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial v^\alpha} + \frac{\partial \phi'^\alpha}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial u^\alpha} = d\phi\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right) \\ &= d\phi\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right). \end{aligned}$$

Analog obţinem $J'd\phi(\frac{\partial}{\partial y^k}) = d\phi(J(\frac{\partial}{\partial y^k}))$ şi deci $J' \circ d\phi = d\phi \circ J$. Implicaţia inversă se obţine în aceeaşi manieră. □

Fie (M, J) o varietate aproape complexă şi $p \in M$ fixat arbitrar. Complexificatul spaţiului tangent T_pM, T_p^cM, admite descompunerea

$$T_p^cM = T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M,$$

unde

$$T_p^{1,0}M = \{Z \in T_p^cM : J(Z) = iZ\} = \{X - iJ(X) : X \in T_pM\},$$

iar $T_p^{0,1}M = \overline{T_p^{1,0}M}$. Local, $T^cU = T^{1,0}U \oplus T^{0,1}U$.

Fie $\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ o bază în $C(T^{1,0}U)$. Atunci $\{\overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_m\}$ este o bază în $C(T^{0,1}U)$. Considerăm $\{\theta^1, \ldots, \theta^m\}$ duala bazei $\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ şi avem că $\{\theta^1, \ldots, \theta^m\}$ este o bază în $\Lambda^{1,0}U$, iar $\{\overline{\theta}^1, \ldots, \overline{\theta}^m\}$ este o bază în $\Lambda^{0,1}U$.

Definiţia 3.3.3. O formă exterioară locală pe o varietate aproape complexă (M, J) este de tip (r, s), şi scriem $\omega \in \Lambda^{r,s}U$, dacă

$$\omega = \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_r \\ j_1<\ldots<j_s}} \omega_{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s} \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r} \wedge \overline{\theta}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\theta}^{j_s}$$

unde $\omega_{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s} \in C^\infty(U; \mathbb{C})$.

Fie $\omega \in \Lambda^{r,s}U$ şi vrem să evaluăm $d\omega$. Avem

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum \{ (d\omega_{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s}) \wedge \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r} \wedge \overline{\theta}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\theta}^{j_s} \\ &\quad \pm \sum_k \omega_{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s} (d\theta^{i_k}) \wedge \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\theta^{i_k}} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r} \wedge \overline{\theta}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\theta}^{j_s} \\ &\quad \pm \sum_l \omega_{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s} (d\overline{\theta}^{j_l}) \wedge \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r} \wedge \overline{\theta}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\overline{\theta}^{j_l}} \wedge \ldots \wedge \overline{\theta}^{j_s} \}. \end{aligned}$$

Cum $d\omega_{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_s} \in \Lambda^{1,0}U + \Lambda^{0,1}U$, $d\theta^{i_k} \in \Lambda^{2,0}U + \Lambda^{1,1}U + \Lambda^{0,2}U$ şi $d\overline{\theta}^{j_l} \in \Lambda^{2,0}U + \Lambda^{1,1}U + \Lambda^{0,2}U$, obţinem că

$$d\omega \in \Lambda^{r-1,s+2}U + \Lambda^{r,s+1}U + \Lambda^{r+1,s}U + \Lambda^{r+2,s-1}U.$$

Teorema 3.3.1. *Fie (M, J) o varietate aproape complexă. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*

i) *dacă $Z, W \in C(T^{1,0}U)$, atunci $[Z, W] \in C(T^{1,0}U)$,*

ii) *dacă $Z, W \in C(T^{0,1}U)$ atunci $[Z, W] \in C(T^{0,1}U)$,*

iii) *$d\Lambda^{1,0}U \subset \Lambda^{2,0}U + \Lambda^{1,1}U$ şi $d\Lambda^{0,1}U \subset \Lambda^{1,1}U + \Lambda^{0,2}U$,*

iv) *$d\Lambda^{r,s}U \subset \Lambda^{r+1,s}U + \Lambda^{r,s+1}U$,*

v) $N = 0$, *unde* $N \in C(T^1_2(M))$ *este definit de*

$$N(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y], \quad \forall X, Y \in C(TM).$$

Demonstraţie. Se vede uşor că condiţia i) este echivalentă cu condiţia ii) deoarece $Z \in C(T^{1,0}U) \Leftrightarrow \overline{Z} \in C(T^{0,1}U)$ şi $\overline{[Z,W]} = [\overline{Z}, \overline{W}]$ (croşetul a fost extins la T^cM prin $\mathbb{C}$-biliniaritate).

Demonstrăm "ii)$\Rightarrow$iii)". Fie $\theta \in \Lambda^{1,0}U$ şi vrem să arătăm că $d\theta$ nu are componentă în $\Lambda^{0,2}U$, adică $d\theta(Z,W) = 0$, oricare ar fi $Z, W \in C(T^{0,1}U)$. Avem

$$d\theta(Z,W) = Z(\theta(W)) - W(\theta(Z)) - \theta([Z,W]) = -\theta([Z,W]) = 0.$$

Considerăm acum $\theta \in \Lambda^{0,1}U$. Rezultă $\overline{\theta} \in \Lambda^{1,0}U$ şi tocmai am văzut că $d\overline{\theta} \in \Lambda^{2,0}U + \Lambda^{1,1}U$. Prin urmare $d\theta = \overline{d\overline{\theta}} \in \Lambda^{1,1}U + \Lambda^{0,2}U$.

Pentru "iii)$\Rightarrow$ii)", considerăm $Z, W \in C(T^{0,1}U)$. Pentru a demonstra că $[Z,W] \in C(T^{0,1}U)$ vom arăta că $\theta([Z,W]) = 0$, oricare ar fi $\theta \in \Lambda^{1,0}U$. Fie $\theta \in \Lambda^{1,0}U$. Cum $d\theta \in \Lambda^{2,0}U + \Lambda^{1,1}U$, $d\theta(Z,W) = 0$, adică $\theta([Z,W]) = 0$.

Se vede uşor că condiţia iii) este echivalentă cu condiţia iv).

Demonstrăm acum că "i)$\Leftrightarrow$v)". Mai întâi se verifică uşor că N este un câmp tensorial de tip $(1,2)$ deoarece este o aplicaţie $C^\infty(M)$-biliniară. Fie $Z = X - iJX$ şi $W = Y - iJY \in C(T^{1,0}U)$.

$$\begin{aligned} [Z,W] &= [X - iJX, Y - iJY] \\ &= [X,Y] - i[X,JY] - i[JX,Y] - [JX,JY] \\ &= [X,Y] - [JX,JY] - i\{[X,JY] + [JX,Y]\}. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} [Z,W] \in T^{1,0}U &\Leftrightarrow [X,Y] - [JX,JY] = -J([X,JY] + [JX,Y]) \\ &\Leftrightarrow N = 0. \square \end{aligned}$$

În mod analog se demonstrează următorul rezultat

Teorema 3.3.2. *Fie* (M,J) *şi* (M',J') *două varietăţi aproape complexe şi* $\phi : M \to M'$ *o aplicaţie netedă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*

i) *dacă* $Z \in T_p^{1,0}M$, *atunci* $d\phi_p(Z) \in T_{\phi(p)}^{1,0}M'$,

ii) *dacă* $Z \in T_p^{0,1}M$, *atunci* $d\phi_p(Z) \in T_{\phi(p)}^{0,1}M'$,

iii) *dacă* ω *este de tip* (r,s) *atunci* $\phi^*\omega$ *este tot de tip* (r,s).

iv) ϕ *este aproape complexă.*

Fie (M,J) o varietate aproape complexă. Vrem să ştim în ce condiţii J este *integrabilă*, adică pentru orice punct există $(U;\varphi) = (U; x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m)$ hartă locală pe M astfel încât

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right) = \frac{\partial}{\partial y^h} \quad \text{şi} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^h}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^h}.$$

În cazul în care J este integrabilă, M se poate organiza ca varietate complexă, $z^k = x^k + iy^k$, iar $\frac{\partial}{\partial z^k} \in \Lambda^{1,0}U$. Acceptăm fără demonstraţie următorul rezultat

Teorema 3.3.3. *Fie* (M,J) *o varietate aproape complexă. Atunci* J *este integrabilă dacă şi numai dacă* $N = 0$.

Acest rezultat a fost demonstrat de Fröhlicher pentru cazul în care M este real analitică şi de Newlander şi Nirenberg în cazul în care M este netedă.

3.4. Varietăţi kähleriene

Definiţia 3.4.1. Fie (M,J) o varietate aproape complexă. O metrică riemanniană g pe M se numeşte *hermitiană* dacă

$$g(J(X), J(Y)) = g(X,Y), \quad \forall X, Y \in C(TM).$$

În acest caz (M,J,g) se numeşte *varietate aproape hermitiană.*

Propoziţia 3.4.1. *Fie (M, J, g) o varietate aproape hermitiană. Atunci oricare ar fi $p \in M$ există un deschis U ce conţine p şi $X_1, \ldots, X_m \in C(TU)$ astfel încât $\{X_1(q), \ldots, X_m(q), J(X_1(q)), \ldots, J(X_m(q))\}$ este o bază ortonormată în T_qM, oricare ar fi $q \in U$.*

Demonstraţie. Fie U un deschis ce conţine p şi $X_1 \in C(TU)$ astfel încât $|X_1| = 1$ (de exemplu, U este un domeniu de hartă locală iar $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}/|\frac{\partial}{\partial x^1}|$). Este clar că, pe U, $|J(X_1)| = 1$ şi X_1 este ortogonal pe $J(X_1)$. Considerăm acum fibratul ortogonal fibratului generat de X_1 şi $J(X_1)$. Micşorând eventual U, putem considera X_2 o secţiune unitară în acest fibrat. Se verifică uşor că $\{X_1(q), X_2(q), J(X_1(q)), J(X_2(q))\}$ este un sistem ortonormat în T_qM, oricare ar fi $q \in U$. Continuând procedeul, după un număr finit de paşi, obţinem rezultatul dorit. $\square$

Fie (M, J, g) o varietate aproape hermitiană. Dacă $N = 0$, atunci (M, J, g) se numeşte *hermitiană*; dacă $d\Phi = 0$ (reamintim că $\Phi(X, Y) = g(X, J(Y))$, atunci (M, J, g) se numeşte *aproape kähleriană*; dacă $\nabla J = 0$, atunci (M, J, g) se numeşte *kähleriană.*

Vom prezenta fără demonstraţii (ele sunt de natură algebrică) două rezultate.

Teorema 3.4.1. *Fie (M, J, g) o varietate aproape hermitiană. Ea este kähleriană dacă şi numai dacă $N = 0$ şi $d\Phi = 0$.*

Teorema 3.4.2. *Fie (M, J, g) o varietate kähleriană. Avem*

i) $R(JX, JY)Z = R(X, Y)Z,$

ii) $\mathrm{Ricci}(JX, JY) = \mathrm{Ricci}(X, Y),$

iii) $\mathrm{Ricci}(X, Y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\{Z \to J(R(X, J(Y))Z)\}.$

În coordonate locale, relaţiile de mai sus se scriu

i′) $R^h_{kab} J^a_i J^b_j = R^h_{kij}$

ii′) $R_{ab} J^a_i J^b_j = R_{ij}$

iii′) $R_{ij} = \frac{1}{2} J^k_l R^l_{kia} J^a_j.$

Fie (M, J, g) o varietate kähleriană. Atunci (M, J) se poate organiza ca o varietate complexă. Fie $(U; \varphi) = (U; z^1, \dots, z^m)$ o hartă locală complexă pe M. Câmpurile $\{\frac{\partial}{\partial z^k}\}_{k=1,\dots,m}$ formează o bază in $C(T^{1,0}U)$, $\{\frac{\partial}{\partial \overline{z}^k}\}_{k=1,\dots,m}$ formează o bază în $C(T^{0,1}U)$, $\{dz^k\}_{k=1,\dots,m}$ este o bază în $\Lambda^{1,0}U$, $\{d\overline{z}^k\}_{k=1,\dots,m}$ este o bază în $\Lambda^{0,1}U$, iar $\{dz^1, \dots, dz^m, d\overline{z}^1, \dots, d\overline{z}^m\}$ este duala bazei $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^m}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^m}\}$.

Din partea de "Preliminarii algebrice" avem exprimările în coordonate complexe

$$g = 2g_{k\overline{h}} dz^k \odot d\overline{z}^h \quad \text{şi} \quad \Phi = -i g_{k\overline{h}} dz^k \wedge d\overline{z}^h,$$

unde $g_{k\overline{h}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^h}\right)$.

Cum (M, J, g) este kähleriană, $d\Phi$ trebuie să se anuleze. Deci, făcând antisimetrizarea, obţinem

$$\begin{aligned}
0 &= d\Phi = -id(g_{k\overline{h}} dz^k \wedge d\overline{z}^h) \\
&= -i\frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial z^l} dz^l \wedge dz^k \wedge d\overline{z}^h - i\frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial \overline{z}^l} d\overline{z}^l \wedge dz^k \wedge d\overline{z}^h \\
&= -i\sum_{l<k} \frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial z^l} dz^l \wedge dz^k \wedge d\overline{z}^h - i\sum_{l>k} \frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial z^l} dz^l \wedge dz^k \wedge d\overline{z}^h \\
&\quad + i\sum_{l<h} \frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial \overline{z}^l} d\overline{z}^l \wedge d\overline{z}^h \wedge dz^k + i\sum_{l>h} \frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial \overline{z}^l} d\overline{z}^l \wedge d\overline{z}^h \wedge dz^k \\
&= -i\sum_{l<k} \left(\frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial z^l} - \frac{\partial g_{l\overline{h}}}{\partial z^k}\right) dz^l \wedge dz^k \wedge d\overline{z}^h \\
&\quad + i\sum_{l<h} \left(\frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial \overline{z}^l} - \frac{\partial g_{k\overline{l}}}{\partial \overline{z}^h}\right) d\overline{z}^l \wedge d\overline{z}^h \wedge dz^k \\
&= -\frac{i}{2} \left(\frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial z^l} - \frac{\partial g_{l\overline{h}}}{\partial z^k}\right) dz^l \wedge dz^k \wedge d\overline{z}^h \\
&\quad + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial \overline{z}^l} - \frac{\partial g_{k\overline{l}}}{\partial \overline{z}^h}\right) dz^k \wedge d\overline{z}^l \wedge d\overline{z}^h.
\end{aligned}$$

Prin urmare $d\Phi = 0$ dacă şi numai dacă

$$\frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial z^l} = \frac{\partial g_{l\overline{h}}}{\partial z^k} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial g_{k\overline{h}}}{\partial \overline{z}^l} = \frac{\partial g_{k\overline{l}}}{\partial \overline{z}^h}.$$

Putem formula acum

Propoziţia 3.4.2. *O varietate hermitiană (M, J, g) este kähleriană dacă şi numai dacă*
$$\frac{\partial g_{k\bar{h}}}{\partial z^l} = \frac{\partial g_{l\bar{h}}}{\partial z^k} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial g_{k\bar{h}}}{\partial \bar{z}^l} = \frac{\partial g_{k\bar{l}}}{\partial \bar{z}^h}.$$

Fie (M, J, g) o varietate kähleriană şi ∇ conexiunea Levi-Civita a lui g. Extindem ∇ la T^cM prin $\mathbb{C}$-biliniaritate şi vrem să exprimăm ∇ în coordonate locale complexe. Fie $(U;\varphi) = (U; z^1, \ldots, z^m)$ o hartă locală complexă pe M. Avem

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^h}} \frac{\partial}{\partial z^k} &= \Gamma^l_{hk}\frac{\partial}{\partial z^l} + \Gamma^{\bar{l}}_{hk}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l},\\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^h}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} &= \Gamma^l_{h\bar{k}}\frac{\partial}{\partial z^l} + \Gamma^{\bar{l}}_{h\bar{k}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l},\\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^h}} \frac{\partial}{\partial z^k} &= \Gamma^l_{\bar{h}k}\frac{\partial}{\partial z^l} + \Gamma^{\bar{l}}_{\bar{h}k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l},\\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^h}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} &= \Gamma^l_{\bar{h}\bar{k}}\frac{\partial}{\partial z^l} + \Gamma^{\bar{l}}_{\bar{h}\bar{k}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}.
\end{aligned}$$

Cum $\overline{\nabla_Z W} = \nabla_{\overline{Z}}\overline{W}$, oricare ar fi $Z, W \in C(T^cM)$, rezultă

$$\overline{\Gamma^l_{hk}} = \Gamma^{\bar{l}}_{\bar{h}\bar{k}}, \quad \Gamma^{\bar{l}}_{hk} = \overline{\Gamma^l_{\bar{h}\bar{k}}}, \quad \overline{\Gamma^l_{h\bar{k}}} = \Gamma^{\bar{l}}_{\bar{h}k}, \quad \Gamma^{\bar{l}}_{h\bar{k}} = \overline{\Gamma^l_{\bar{h}k}}.$$

Prin urmare sunt esenţiale doar patru tipuri de coeficienţi. Deoarece g, ∇ şi $[,]$ au fost extinşi la T^cM prin $\mathbb{C}$-biliniaritate, avem

$$\Gamma^l_{hk} g_{l\bar{j}} = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^h}} \frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^h} + \frac{\partial g_{h\bar{j}}}{\partial z^k}\right) = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^h}$$

şi deci $\Gamma^l_{hk} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^h} g^{j\bar{l}}$, unde $(g^{j\bar{l}})$ este inversa matricei $(g_{j\bar{l}})$. Mai departe,

$$\Gamma^{\bar{l}}_{hk} g_{\bar{l}j} = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^h}} \frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = 0,$$

deci $\Gamma^{\bar{l}}_{hk} = 0$,

$$\Gamma^l_{h\bar{k}} g_{l\bar{j}} = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^h}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{h\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} - \frac{\partial g_{h\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j}\right) = 0,$$

deci $\Gamma^{l}_{h\bar{k}} = 0$,

$$\Gamma^{\bar{l}}_{h\bar{k}} g_{\bar{l}j} = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^h}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\bar{k}j}}{\partial z^h} - \frac{\partial g_{h\bar{k}}}{\partial z^j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^h} - \frac{\partial g_{h\bar{k}}}{\partial z^j}\right) = 0$$

şi prin urmare $\Gamma^{\bar{l}}_{h\bar{k}} = 0$.

Considerăm acum M o varietate complexă. Extindem operatorul diferenţială exterioară d la complexificat, $d : \Lambda^{r,s}U \to \Lambda^{r+1,s}U + \Lambda^{r,s+1}U$, iar dacă

$$\omega = \frac{1}{r!s!} w_{k_1\ldots k_r, j_1\ldots j_s} dz^{k_1} \wedge \ldots \wedge dz^{k_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_s},$$

atunci

$$\begin{aligned} d\omega \quad = \quad & \frac{1}{r!s!} \frac{\partial w_{k_1\ldots k_r, j_1\ldots j_s}}{\partial z^h} dz^h \wedge dz^{k_1} \wedge \ldots \wedge dz^{k_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_k} \\ & + \frac{1}{r!s!} \frac{\partial w_{k_1\ldots k_r, j_1\ldots j_s}}{\partial \bar{z}^h} d\bar{z}^h \wedge dz^{k_1} \wedge \ldots \wedge dz^{k_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_s}. \end{aligned}$$

Scriem $d = \partial + \overline{\partial}$, unde $\partial : \Lambda^{r,s}U \to \Lambda^{r+1,s}U$,

$$\partial\omega = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial w_{k_1\ldots k_r, j_1\ldots j_s}}{\partial z^h} dz^h \wedge dz^{k_1} \wedge \ldots \wedge dz^{k_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_s},$$

iar $\overline{\partial} : \Lambda^{r,s}U \to \Lambda^{r,s+1}U$,

$$\overline{\partial}\omega = \frac{1}{r!s!} \frac{\partial w_{k_1\ldots k_r, j_1\ldots j_s}}{\partial \bar{z}^h} d\bar{z}^h \wedge dz^{k_1} \wedge \ldots \wedge dz^{k_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_s}.$$

Cum $0 = d^2 = (\partial + \overline{\partial})(\partial + \overline{\partial})$, obţinem $\partial^2 = 0, \overline{\partial}^2 = 0$ şi $\partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial$.

În cazul real avem Lema lui Poincaré care afirmă că o formă închisă este local exactă. În cazul complex avem

Teorema 3.4.3. (**Grothendick-Dolbeault**.) *Fie $\omega \in \Lambda^{r,s}M$ astfel încât $\overline{\partial}\omega = 0$. Atunci, local, există $\theta \in \Lambda^{r,s-1}U$ ce satisface $\overline{\partial}\theta = \omega$.*

Putem da acum următorul rezultat de caracterizare a varietăţilor kähleriene

Teorema 3.4.4. *O varietate hermitiană (M, J, g) este kähleriană dacă şi numai dacă oricare ar fi $p \in M$ există U deschis în M ce conţine p şi există $f \in C^\infty(U)$ funcţie netedă reală astfel încât $\Phi = -\partial\overline{\partial}f$.*

Demonstraţie. Dacă $\Phi = -\partial\overline{\partial}f$ atunci

$$d\Phi = -i(\partial + \overline{\partial})\partial\overline{\partial}f = -i\partial^2\overline{\partial}f + i\partial\overline{\partial}^2 f = 0$$

şi deci (M, J, g) este kähleriană.

Dacă (M, J, g) este kähleriană atunci $d\Phi = 0$ şi din Lema lui Poincaré rezultă că există local $\omega \in \Lambda^1(U)$ astfel încât $\Phi = d\omega$. Trecem la complexificat şi scriem $\omega = \theta + \theta'$, unde $\theta \in \Lambda^{1,0}U$ şi $\theta' \in \Lambda^{0,1}U$. Cum $\omega = \overline{\omega}$ rezultă $\theta' = \overline{\theta}$ şi avem $\omega = \theta + \overline{\theta}$, unde $\theta \in \Lambda^{1,0}U$. Prin urmare

$$\Phi = d\omega = (\partial + \overline{\partial})(\theta + \overline{\theta}) = \partial\theta + (\partial\overline{\theta} + \overline{\partial}\theta) + \overline{\partial}\,\overline{\theta}.$$

Dar Φ este de tip $(1, 1)$ şi deci $\partial\theta = \overline{\partial}\,\overline{\theta} = 0$. Din Teorema lui Gronthendick-Dolbeault rezultă că există $h \in C^\infty(U; \mathbb{C})$ astfel încât $\overline{\theta} = \overline{\partial}h$. Avem

$$\Phi = \partial\overline{\theta} + \overline{\partial}\theta = \partial\overline{\partial}h + \overline{\partial}\partial\overline{h} = \partial\overline{\partial}(h - \overline{h}) = 2i\partial\overline{\partial}h'',$$

unde $h = h' + ih''$. Notând $f = -2h''$ demonstraţia se încheie. □

În continuare vom prezenta trei exemple de varietăţi kähleriene.

Exemplul 3.4.1. Orice varietate riemanniană (M^2, g) orientabilă se poate organiza ca varietate kähleriană.

Într-adevăr, considerăm $(U; x, y)$ hartă locală izotermă în raport cu care $g = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$. Ştim că J definit prin

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{şi} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}$$

este bine definit şi determină o structură aproape complexă integrabilă. Se verifică uşor că g este hermitiană în raport cu J şi deci (M, J, g) este o varietate hermitiană. Cum $d\Phi$ este o 3-formă pe o varietate de dimensiune 2, ea trebuie să fie nulă. Prin urmare (M, J, g) este o varietate kähleriană.

Exemplul 3.4.2. $\mathbb{C}^m$ cu metrica Euclidiană $g = \sum_{k=1}^m dz^k \odot d\overline{z}^k$ se poate organiza ca varietate kähleriană.

Într-adevăr, din

$$g = 2g_{k\bar{j}} dz^k \odot d\bar{z}^j = \sum_{k=1}^{m} dz^k \odot d\bar{z}^k$$

rezultă

$$\Phi = -ig_{k\bar{l}} dz^k \wedge d\bar{z}^l = -\frac{i}{2} \sum_k dz^k \wedge d\bar{z}^k.$$

Rămâne de demonstrat că Φ se poate scrie sub forma $\Phi = -i\partial\overline{\partial} f$, unde $f \in C^\infty(\mathbb{C}^m)$ este o funcţie reală. Considerăm

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_k |z^k|^2 = \frac{1}{2} |z|^2$$

şi se verifică uşor că $\Phi = -i\partial\overline{\partial} f$.

Exemplul 3.4.3. *Spaţiul proiectiv complex $P^m(\mathbb{C})$ se poate organiza ca varietate kähleriană.*

Reamintim că $P^m(\mathbb{C}) = \bigcup_{\alpha=1}^{m+1} U_\alpha$, unde $U_\alpha = \{[\xi] : \xi \in \mathbb{C}^{m+1}, \xi^\alpha \neq 0\}$. Pe domeniul U_α definim coordonatele

$$z_\alpha = \left(\frac{\xi^1}{\xi^\alpha}, \ldots, \frac{\widehat{\xi^\alpha}}{\xi^\alpha}, \ldots, \frac{\xi^{m+1}}{\xi^\alpha} \right) = (z_\alpha^k)_{k=1,\ldots,\alpha-1,\alpha+1,\ldots,m+1}.$$

Pe U_α definim funcţia reală strict pozitivă

$$f_\alpha([\xi]) = |z_\alpha|^2 + 1 = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\alpha}}^{m+1} z_\alpha^k \overline{z}_\alpha^k \right) + 1.$$

Analog, pe U_β definim

$$f_\beta = |z_\beta|^2 + 1.$$

Vrem să vedem legătura dintre f_α şi f_β pe $U_\alpha \cap U_\beta$. Avem

$$\begin{aligned}
f_\beta &= \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\beta}}^{m+1} z_\beta^k \overline{z}_\beta^k \right) + 1 = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\beta,\alpha}}^{m+1} \frac{\xi^k}{\xi^\alpha} \frac{\xi^\alpha}{\xi^\beta} \frac{\overline{\xi}^k}{\overline{\xi}^\alpha} \frac{\overline{\xi}^\alpha}{\overline{\xi}^\beta} \right) + z_\beta^\alpha \overline{z}_\beta^\alpha + 1 \\
&= z_\beta^\alpha \overline{z}_\beta^\alpha \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\beta,\alpha}}^{m+1} z_\alpha^k \overline{z}_\alpha^k \right) + |z_\beta^\alpha|^2 + 1 \\
&= z_\beta^\alpha \overline{z}_\beta^\alpha \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\beta,\alpha}}^{m+1} z_\alpha^k \overline{z}_\alpha^k + z_\alpha^\beta \overline{z}_\alpha^\beta \right) + |z_\beta^\alpha|^2 \\
&= |z_\beta^\alpha|^2 (f_\alpha - 1) + |z_\beta^\alpha|^2 \\
&= |z_\beta^\alpha|^2 f_\alpha,
\end{aligned}$$

nesumat după α. Dorim acum să comparăm $\partial\overline{\partial} f_\alpha$ şi $\partial\overline{\partial} f_\beta$. Avem

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} f_\beta &= \overline{\partial}(z_\beta^\alpha \overline{z}_\beta^\alpha f_\alpha) = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\beta}}^{m+1} \frac{\partial(z_\beta^\alpha \overline{z}_\beta^\alpha)}{\partial \overline{z}_\beta^k} d\overline{z}_\beta^k \right) f_\alpha + z_\beta^\alpha \overline{z}_\beta^\alpha \overline{\partial} f_\alpha \\
&= f_\alpha z_\beta^\alpha d\overline{z}_\beta^\alpha + z_\beta^\alpha \overline{z}_\beta^\alpha \overline{\partial} f_\alpha,
\end{aligned}$$

iar

$$\partial\overline{\partial} f_\beta = z_\beta^\alpha \partial f_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta^\alpha + f_\alpha dz_\beta^\alpha \wedge d\overline{z}_\beta^\alpha + \overline{z}_\beta^\alpha dz_\beta^\alpha \wedge \overline{\partial} f_\alpha + z_\beta^\alpha \overline{z}_\beta^\alpha \partial\overline{\partial} f_\alpha.$$

Prin urmare nu putem avea $\partial\overline{\partial} f_\beta = \partial\overline{\partial} f_\alpha$. Totuşi, relaţia $f_\beta = |z_\beta^\alpha|^2 f_\alpha$ sugerează să considerăm $\ln f_\alpha$ în loc de f_α, unde ln este determinarea principală a logaritmului. Pe $U_\alpha \cap U_\beta$ avem

$$\ln f_\beta = \ln |z_\beta^\alpha|^2 + \ln f_\alpha,$$

$$\overline{\partial} \ln f_\beta = \frac{1}{|z_\beta^\alpha|^2} z_\beta^\alpha d\overline{z}_\beta^\alpha + \overline{\partial} \ln f_\alpha = \frac{1}{\overline{z}_\beta^\alpha} d\overline{z}_\beta^\alpha + \overline{\partial} \ln f_\alpha,$$

iar în final

$$\partial\overline{\partial}\ln f_\beta = \partial\overline{\partial}\ln f_\alpha.$$

În concluzie, deşi $\ln f_\alpha \neq \ln f_\beta$ pe $U_\alpha \cap U_\beta$, totuşi $\partial\overline{\partial}\ln f_\alpha = \partial\overline{\partial}\ln f_\beta$ şi prin urmare avem Φ o formă de tip $(1,1)$ global definită, $\Phi = -i\partial\overline{\partial}\ln f_\alpha$. Notăm că $\ln f_\alpha$ este o funcţie netedă reală.

Din $\Phi = -i\partial\overline{\partial}\ln f_\alpha = -ig^\alpha_{k\overline{h}} dz^k_\alpha \wedge d\overline{z}^h_\alpha$ vom determina $(g^\alpha_{k\overline{h}})$. Va rămâne de demonstrat apoi că

$$(g^\alpha_{k\overline{h}}) =^T \overline{(g^\alpha_{k\overline{h}})},$$

adică $(g^\alpha_{k\overline{h}})$ este o matrice hermitiană, şi $(g^\alpha_{k\overline{h}})$ este strict pozitiv definită, adică

$$u^k g_{k\overline{h}} \overline{u}^h > 0, \quad \forall u = (u^1, \ldots, u^m) \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}.$$

Pentru comoditate, presupunem $\alpha = m+1$ şi renotăm $(z^1_\alpha, \ldots, z^m_\alpha)$ cu $(z^1, \ldots, z^m)$. Avem

$$f_\alpha = |z|^2 + 1 = \sum_{k=1}^m z^k \overline{z}^k + 1,$$

şi

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\ln f_\alpha &= \sum_{k=1}^m \frac{z^k}{|z|^2+1} d\overline{z}^k, \\
\partial\overline{\partial}\ln f_\alpha &= \sum_{k,l} \frac{\delta_{kl}(|z|^2+1) - z^k \overline{z}^l}{(|z|^2+1)^2} dz^l \wedge d\overline{z}^k = g_{k\overline{h}} dz^k \wedge d\overline{z}^h.
\end{aligned}$$

Deci

$$g_{k\overline{h}} = \frac{(1+|z|^2)\delta_{kh} - z^h \overline{z}^k}{(1+|z|^2)^2} = \overline{g_{h\overline{k}}}.$$

Fie $u = (u^1, \ldots, u^m) \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}$. Avem

$$\begin{aligned} u^k g_{k\overline{h}} \overline{u}^h &= \frac{(1+|z|^2)|u|^2 - \sum\limits_{k,h} u^k \overline{z}^k z^h \overline{u}^h}{(1+|z|^2)^2} \\ &= \frac{(1+|z|^2)|u|^2 - \langle\langle u, z\rangle\rangle\langle\langle z, u\rangle\rangle}{(1+|z|^2)^2} \\ &= \frac{|u|^2 + |z|^2|u|^2 - |\langle\langle u, z\rangle\rangle|^2}{(1+|z|^2)^2} \geq \frac{|u|^2}{(1+|z|^2)^2} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Cu aceasta demonstraţia se încheie.

Metrica introdusă pe $P^m(\mathbb{C})$ se numeşte *metrica Fubini-Study*.□

4

APLICAŢII ARMONICE

4.1. Definiţia şi prima formulă variaţională

Fie $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ o aplicaţie între două varietăţi riemanniene. Am văzut că diferenţiala ei $d\phi$ poate fi privită ca o secţiune în fibratul $T^*M \otimes \phi^{-1}TN = \mathrm{Hom}(TM, \phi^{-1}TN)$ şi deci norma ei este dată de

$$\begin{aligned} |d\phi|_p^2 &= \langle d\phi, d\phi\rangle_p = \sum_{i=1}^{m} \langle d\phi_p(X_i), d\phi_p(X_i)\rangle_{\phi(p)} \\ &= g^{ij}(p)\phi_i^\alpha(p)\phi_j^\beta(p)h_{\alpha\beta}(\phi(p)), \end{aligned}$$

unde $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ este o bază ortonormată în T_pM. Norma $|d\phi|_p$ se numeşte *norma Hilbert-Schmidt* a aplicaţiei liniare $d\phi(p)$.

Propoziţia 4.1.1. *Avem* $|d\phi|^2 = \langle g, \phi^*h\rangle$.

Demonstraţie. Într-adevăr, $\phi^*h \in C(\odot^2 T^*M)$ este dată de

$$(\phi^*h)_p(X, Y) = h_{\phi(p)}(d\phi_p(X), d\phi_p(Y)),$$

iar din definiţia metricii pe fibratul $\otimes^2 T^*M$ avem

$$\begin{aligned}\langle g, \phi^* h\rangle_p &= \sum_{i,j} g_p(X_i, X_j)(\phi^* h)_p(X_i, X_j) = \sum_{i,j} \delta_{ij}(\phi^* h)_p(X_i, X_j) = \\ &= \sum_i (\phi^* h)(X_i, X_i) = \\ &= |d\phi|^2_p. \square\end{aligned}$$

Definiţia 4.1.1. *Densitatea de energie* a aplicaţiei ϕ este funcţia $e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2$, iar *energia* lui ϕ este numărul $E(\phi) = \int_M e(\phi)\, \overline{v}_g$.

În definiţia anterioară am presupus M compactă. Este clar că $E(\phi) \geq 0$ şi $E(\phi) = 0$ dacă şi numai dacă $d\phi = 0$, adică ϕ este constantă.

Considerăm $\widetilde{g} = e^{2\rho} g, \rho \in C^\infty(M)$, o schimbare conformă a metricii g.

Propoziţia 4.1.2. *Avem $E(\widetilde{\phi}) = \int_M e^{(m-2)\rho} e(\phi)\, \overline{v}_g$, unde $\widetilde{\phi} : (M, \widetilde{g}) \to (N, h), \widetilde{\phi} = \phi$.*

Prin urmare, dacă $m = 2$ atunci energia este un invariant conform, adică $E(\widetilde{\phi}) = E(\phi)$.

Demonstraţie. Din $\widetilde{g}_{ij} = e^{2\rho} g_{ij}$ obţinem $e(\widetilde{\phi}) = e^{-2\rho} e(\phi)$, iar

$$v_{\widetilde{g}} = \sqrt{\det \widetilde{G}}\, d^m x = \sqrt{\det(e^{2\rho} G)}\, d^m x = \sqrt{e^{2\rho m} \det G}\, d^m x = e^{\rho m} v_g.$$

Prin urmare

$$E(\widetilde{\phi}) = \int_M e(\widetilde{\phi})\, \overline{v}_{\widetilde{g}} = \int_M e^{(m-2)\rho} e(\phi)\, \overline{v}_g. \square$$

Definiţia 4.1.2. O aplicaţie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ se numeşte *armonică* dacă ea este un punct critic pentru funcţionala energiei

$$E : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}, \quad E(\phi) = \int_M e(\phi)\, \overline{v}_g.$$

Altfel spus, ϕ este armonică dacă pentru orice variaţie $\{\phi_t\}_t$ a lui ϕ avem $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \{E(\phi_t)\} = 0$.

Cum în cazul în care varietatea de definiţie este o suprafaţă, adică $m = 2$, energia este un invariant conform, obţinem

Propoziţia 4.1.3. *Fie* $\phi : (M^2, g) \to (N, h)$ *şi* $\widetilde{\phi} : (M^2, \widetilde{g} = e^{2\rho} g) \to (N, h)$, $\widetilde{\phi} = \phi$. *Atunci* $\widetilde{\phi}$ *este armonică dacă şi numai dacă* ϕ *este armonică.*

Observaţia 4.1.1. Dacă $\{\phi_t\}_t$ este o variaţie a lui ϕ atunci ei îi corespunde câmpul variaţional $V \in C(\phi^{-1}TN)$ definit de

$$V(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{\phi_t(p)\} = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{\phi_t^\alpha(p)\} \right) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(\phi(p)).$$

Reciproc, dacă $V \in C(\phi^{-1}TN)$, atunci $\phi_t(p) = \exp_{\phi(p)} tV(p)$ reprezintă o variaţie a lui ϕ având V drept câmp variaţional corespunzător.

Teorema 4.1.1. *O aplicaţie* $\phi : (M, g) \to (N, h)$ *este armonică dacă şi numai dacă* $\tau(\phi) = \operatorname{trace} \nabla d\phi$ *se anulează.*

Demonstraţie. Fie $\{\phi_t\}_t$ o variaţie a lui ϕ, $\phi_0 = \phi$, şi definim $\Phi : \mathbb{R} \times M \to N$ prin $\Phi(t, p) = \phi_t(p)$. Notăm cu V câmpul variaţional corespunzător. Energia lui ϕ_t este dată de $E(\phi_t) = \int_M e(\phi_t)\, \overline{v}_g$, iar

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{E(\phi_t)\} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M e(\phi_t)\, \overline{v}_g = \int_M \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{e(\phi_t)\}\, \overline{v}_g.$$

Fie $p \in M$ fixat arbitrar şi $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ o bază geodezică în jurul lui p, adică $X_i \in C(TU)$, U deschisă ce conţine p, $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ pe U iar $(\nabla_{X_i} X_i)(p) = 0$. Avem

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t} \{e(\phi_t)(p)\} &= \frac{1}{2} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t} \left\{ \sum_i \langle d\phi_t(X_i), d\phi_t(X_i) \rangle_p \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,p)} \left\{ \sum_i \langle d\Phi(X_i), d\Phi(X_i) \rangle \right\} \\
&= \sum_i \langle \nabla^\Phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi(X_i), d\Phi(X_i) \rangle_{(t,p)} \\
&= \sum_i \left\langle \nabla^\Phi_{X_i} d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + d\Phi\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, X_i \right] \right), d\Phi(X_i) \right\rangle_{(t,p)}.
\end{aligned}$$

Deci

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\{e(\phi_t)(p)\} = \sum_i \langle \nabla^{\phi}_{X_i} V, d\phi(X_i)\rangle_p$$
$$= \sum_i \{X_i\langle V, d\phi(X_i)\rangle - \langle V, \nabla^{\phi}_{X_i} d\phi(X_i)\rangle\}.$$

Fie $q \in M$ şi $\{Y_i\}_{i=1,\dots,m}$ o bază ortonormată în T_qM. Atunci

$$X(q) = \sum_{i=1}^{m} \langle V, d\phi(Y_i)\rangle_q Y_i \in T_qM$$

este bine definit, adică nu depinde de baza ortonormată $\{Y_i\}$ folosită. Lăsând $q \in M$ liber obţinem $X \in C(TM)$, iar

$$(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^{m} X_i\langle V, d\phi(X_i)\rangle.$$

Prin urmare

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\{e(\phi_t)(p)\} = (\operatorname{div} X)(p) - \left\langle V, \sum_{i=1}^{m} \nabla d\phi(X_i, X_i)\right\rangle_p$$
$$= (\operatorname{div} X)(p) - \langle V, \tau(\phi)\rangle_p.$$

Lăsând punctul p liber şi integrând rezultă

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\{E(\phi_t\} = -\int_M \langle V, \tau(\phi)\rangle\, \overline{v}_g,$$

iar acum teorema rezultă imediat. $\Box$

Exprimarea în coordonate locale. Cu notaţiile obişnuite avem

$$\tau(\phi) = \operatorname{trace} \nabla d\phi = g^{ij}(\nabla d\phi)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

iar

$$\begin{aligned}
(\nabla d\phi)\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\phi\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - d\phi\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^j}\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\right) - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^k}\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\\
&= \frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) + \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^i}\left(\phi^*\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y^\beta}}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\\
&\quad -\Gamma^k_{ij}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^k}\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\\
&= \left(\frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^i\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^k} + {}^N\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\sigma}{\partial x^j}\right)\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Prin urmare

$$\tau(\phi) = g^{ij}\left(\frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^i\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^k} + {}^N\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\sigma}{\partial x^j}\right)\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right).$$

Propoziţia 4.1.4. *Fie $\phi : (M,g) \to (N,h)$ o aplicaţie netedă. Atunci ϕ este armonică dacă şi numai dacă $d\phi$ este o 1-formă armonică.*

Demonstraţie. Mai întâi să observăm că $dd\phi = 0$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
(dd\phi)(X,Y) &= (\nabla_X d\phi)(Y) - (\nabla_Y d\phi)(X) = (\nabla d\phi)(X,Y) - (\nabla d\phi)(Y,X)\\
&= \nabla_X d\phi(Y) - d\phi(\nabla_X Y) - \nabla_Y d\phi(X) + d\phi(\nabla_Y X)\\
&= \nabla_X d\phi(Y) - \nabla_Y d\phi(X) - d\phi([X,Y])\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Acum, cum M este compactă, $d\phi$ este o 1-formă armonică dacă şi numai dacă $\delta d\phi = 0$, adică $\tau(\phi) = -\delta d\phi = 0$. □

Observaţia 4.1.2. Notăm că relaţia $dd\phi = 0$ este valabilă şi în situaţia în care M nu este compactă. $\nabla d\phi$ se numeşte *a doua formă fundamentală* a aplicaţiei ϕ şi este simetrică.

Exemplul 4.1.1. Fie $\phi : (M,g) \to (N,h)$ o aplicaţie constantă, adică $\phi(p) = q$, oricare ar fi $p \in M$. Atunci $\tau(\phi) = 0$.

Exemplul 4.1.2. O curbă netedă $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to (N,h)$ este armonică dacă şi numai dacă ea este geodezică, adică

$$\ddot{\phi}^\alpha + {}^N\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}\dot{\phi}^\beta\dot{\phi}^\sigma = 0.$$

Exemplul 4.1.3. Fie $\mathbb{S}^1 = \{(\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$. Atunci $\phi : \mathbb{S}^1 \to (N,h)$ este armonică dacă şi numai dacă este geodezică.

Exemplul 4.1.4. Aplicaţia identitate $\mathbf{1} : (M,g) \to (M,g)$ este armonică.

Exemplul 4.1.5. Fie M o subvarietate a lui (N,h) şi considerăm $g = \boldsymbol{i}^*h$, unde $\boldsymbol{i} : M \to N$ este incluziunea canonică. Avem

$$\nabla d\boldsymbol{i}(X,Y) = B(X,Y) \quad \text{şi} \quad \tau(\boldsymbol{i}) = mH,$$

unde B este a doua formă fundamentală a subvarietăţii M în N, iar H este câmpul vectorial curbură medie. Prin urmare incluziunea $\boldsymbol{i}$ este armonică dacă şi numai dacă M este o subvarietate minimală în (N,h).

Exemplul 4.1.6. Fie $\phi : (M,g) \to \mathbb{R}$. Avem că $\tau(\phi) = -\Delta\phi$ şi deci ϕ este aplicaţie armonică dacă şi numai dacă ea este funcţie armonică în sensul clasic.

Propoziţia 4.1.5. *Fie (M,J,g) şi $(N,\widetilde{J},h)$ două varietăţi hähleriene şi fie $\phi : M \to N$ o aplicaţie olomorfă. Atunci $\phi : (M,g) \to (N,h)$ este armonică.*

Demonstraţie. Considerăm $\{X_1, \ldots, X_m, JX_1, \ldots, JX_m\}$ un câmp local de repere ortonormate. Avem

$$\begin{aligned} \nabla_{JX_i} d\phi(JX_i) &= \nabla_{JX_i}\widetilde{J}d\phi(X_i) = \nabla_{JX_i}\widetilde{J}\left(X_i^a\phi_a^\alpha\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\right) \\ &= \nabla_{JX_i}X_i^a\phi_a^\alpha\left(\phi^*\widetilde{J}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = (JX_i)(X_i^a\phi_a^\alpha)\left(\phi^*\widetilde{J}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +(X_i^a\phi_a^\alpha)\nabla_{JX_i}\left(\phi^*\widetilde{J}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\\
&= (JX_i)(X_i^a\phi_a^\alpha)\left(\phi^*\widetilde{J}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)+(X_i^a\phi_a^\alpha)\nabla^N_{d\phi(JX_i)}\widetilde{J}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\\
&= (JX_i)(X_i^a\phi_a^\alpha)\left(\phi^*\widetilde{J}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)+(X_i^a\phi_a^\alpha)\widetilde{J}\nabla^N_{d\phi(JX_i)}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\\
&= \widetilde{J}\nabla_{JX_i}d\phi(X_i)\\
&= \widetilde{J}(\nabla_{X_i}d\phi(JX_i)+d\phi([JX_i,X_i]))\\
&= \nabla_{X_i}d\phi(J(JX_i))+\widetilde{J}d\phi([JX_i,X_i])\\
&= -\nabla_{X_i}d\phi(X_i)+\widetilde{J}d\phi([JX_i,X_i]).
\end{aligned}
$$

Analog, obţinem

$$
\begin{aligned}
d\phi(\nabla_{JX_i}JX_i) &= d\phi(J\nabla_{JX_i}X_i)=d\phi(J(\nabla_{X_i}JX_i+[JX_i,X_i]))\\
&= -d\phi(\nabla_{X_i}X_i)+\widetilde{J}d\phi([JX_i,X_i]).
\end{aligned}
$$

Deci

$$
\sum_{i=1}^m\{\nabla_{JX_i}d\phi(JX_i)-d\phi(\nabla_{JX_i}JX_i)\}=-\sum_{i=1}^m\{\nabla_{X_i}d\phi(X_i)-d\phi(\nabla_{X_i}X_i)\}
$$

şi prin urmare

$$
\begin{aligned}
\tau(\phi) &= \sum_{i=1}^m\{\nabla_{X_i}d\phi(X_i)-d\phi(\nabla_{X_i}X_i)\}\\
&\quad +\sum_{i=1}^m\{\nabla_{JX_i}d\phi(JX_i)-d\phi(\nabla_{JX_i}JX_i)\}\\
&= 0.\Box
\end{aligned}
$$

Prin calcul direct se obţine

Propoziţia 4.1.6. *Fie M, N şi P trei varietăţi riemanniene, $\phi\in C^\infty(M,N)$ şi $\psi\in C^\infty(N,P)$. Atunci avem*

i) $\nabla d(\psi\circ\phi)=d\psi(\nabla d\phi)+(\nabla d\psi)(d\phi,d\phi)$,

ii) $\tau(\psi \circ \phi) = d\psi(\tau(\phi)) + \mathrm{trace}(\nabla d\psi)(d\phi\cdot, d\phi\cdot)$,

adică

i′) $(\nabla d(\psi \circ \phi))_p(X, Y) = d\psi_{\phi(p)}((\nabla d\phi)_p(X, Y))$
$+(\nabla d\psi)_{\phi(p)}(d\phi_p(X), d\phi_p(Y)),\ \forall X, Y \in T_pM,$

ii′) $\tau(\psi \circ \phi)_p = d\psi_{\phi(p)}(\tau(\phi)_p) + \sum_{i=1}^m (\nabla d\psi)_{\phi(p)}(d\phi_p(X_i), d\phi_p(X_i))$,

unde $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ *este o bază ortonormată în* T_pM.

Definiţia 4.1.3. O aplicaţie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ se numeşte *total geodezică* dacă forma a doua fundamentală $\nabla d\phi$ se anulează.

Observaţia 4.1.3. Compunerea a două aplicaţii total geodezice este o aplicaţie total geodezică, iar dacă ϕ este armonică şi ψ este total geodezică atunci $\psi \circ \phi$ este armonică. Compunerea a două aplicaţii armonice nu este, în general, armonică.

Propoziţia 4.1.7. *O aplicaţie* $\phi : (M, g) \to (N, h)$ *este total geodezică dacă şi numai dacă duce geodezicele lui* M *în geodezice ale lui* N.

Demonstraţie. Fie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ o curbă netedă. Atunci

$$\dot\gamma(t) = d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \dot x^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(t))$$

poate fi privit şi ca secţiune în $\gamma^{-1}TM$. Avem

$$\tau(\gamma) = (\nabla d\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,$$

iar

$$\tau(\phi \circ \gamma) = \nabla^N_{(\dot{\phi\circ\gamma})}(\dot{\phi \circ \gamma}) = d\phi(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma) + (\nabla d\phi)(\dot\gamma, \dot\gamma). \tag{4.1.1}$$

Presupunem că $\nabla d\phi = 0$. Atunci, din (4.1.1), dacă γ este geodezică rezultă $\phi \circ \gamma$ geodezică.

Reciproc, fie $p \in M$ fixat arbitrar şi $X_p \in T_pM$. Considerăm, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ geodezica ce satisface $\gamma(0) = p$ şi $\dot\gamma(0) = X_p$. Din (4.1.1) obţinem $(\nabla d\phi)_p(X_p, X_p) = 0$. Cum $(\nabla d\phi)_p$ este simetrică rezultă $(\nabla d\phi)_p = 0$. $\square$

Propoziţia 4.1.8. *Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicaţie total geodezică. Atunci $e(\phi)$ este constantă.*

Demonstraţie. Din $\nabla d\phi = 0$ rezultă $\nabla_X d\phi = 0$, oricare ar fi $X \in C(TM)$, şi atunci avem

$$Xe(\phi) = \frac{1}{2} X|d\phi|^2 = \langle \nabla_X d\phi, d\phi \rangle = 0,$$

adică $e(\phi)$ este constantă.□

Prezentăm acum un rezultat obţinut anterior

Propoziţia 4.1.9. *Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ şi f restricţia lui F la sfera unitate $\mathbb{S}^m$. Atunci*

$$\tau(f)_{x_0} = \tau(F)_{x_0} - m \frac{d}{dt}\bigg|_{t=1} F(tx_0) - \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=1} F(tx_0),$$

pentru orice $x_0 \in \mathbb{S}^m$.

Demonstraţie. Notăm cu $\boldsymbol{i} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ incluziunea canonică şi avem $f = F \circ \boldsymbol{i}$. Deci

$$\begin{aligned} \tau(f)_{x_0} &= dF_{x_0}(\tau(\boldsymbol{i})_{x_0}) + \mathrm{trace}(\nabla dF)_{x_0}(d\boldsymbol{i}\cdot, d\boldsymbol{i}\cdot) \\ &= dF_{x_0}(-mx_0) + \tau(F)_{x_0} - (\nabla dF)_{x_0}(x_0, x_0). \end{aligned}$$

Considerăm geodezica $\gamma(t) = tx_0, t \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Desigur $\gamma(1) = x_0$ şi $\dot{\gamma}(1) = x_0$. Prin urmare $dF_{x_0}(x_0) = x_0 F = \frac{d}{dt}\big|_{t=1}(F \circ \gamma)(t)$, iar

$$\begin{aligned} (\nabla dF)_{x_0}(x_0, x_0) &= \dot{\gamma}(1)(\dot{\gamma}(t)F) - (\nabla^{\mathbb{R}^{m+1}}_{\dot{\gamma}(1)} \dot{\gamma})F \\ &= \dot{\gamma}(1)(\dot{\gamma}(t)F) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=1} \left\{ \frac{d}{dt}\bigg|_t (F \circ \gamma)(t) \right\} \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=1} (F \circ \gamma)(t). \end{aligned}$$

Înlocuind obţinem concluzia dorită. □

Corolarul 4.1.1. *Dacă $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ este un polinom armonic şi omogen de grad r, atunci $\tau(f) = -\Delta f = -r(m+r-1)f$.*

Propoziţia 4.1.10. *Fie $\Phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ o imersie riemanniană astfel încât $\Delta\Phi = \lambda\Phi$, unde $\lambda \neq 0$. Atunci*

i) $\lambda > 0$,

ii) $\Phi(M) \subset \mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right)$,

iii) $\varphi : M \to \mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right)$ *este o imersie riemanniană minimală, unde* $\varphi(p) = \Phi(p)$, *oricare ar fi* $p \in M$.

Demonstraţie. Punctul i) este evident.

Notăm că dacă privim $\tau(\Phi)$ ca o aplicaţie vectorială, adică $\tau(\Phi) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{n+1})$, atunci

$$\tau(\Phi) = -\Delta\Phi = (-\Delta\Phi^1, \dots, -\Delta\Phi^{n+1}).$$

Dacă privim $\Phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ ca o secţiune în $\Phi^{-1}T\mathbb{R}^{n+1}$, adică $\Phi(p) \in T_{\Phi(p)}\mathbb{R}^{n+1}$, atunci

$$\tau(\Phi) = -\Delta^\Phi\Phi.$$

Într-adevăr, dacă notăm $x \in C(T\mathbb{R}^{n+1}), x(p) = p \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$, atunci secţiunea Φ poate fi scrisă ca $\Phi = x \circ \Phi$, şi avem

$$(\nabla^\Phi_X\Phi)_p = \nabla^\Phi_{X(p)} x \circ \Phi = \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{d\Phi_p(X)} x = d\Phi_p(X),$$

adică $\nabla^\Phi_X\Phi = d\Phi(X)$, oricare ar fi $X \in C(TM)$. Apoi,

$$\nabla^\Phi_Y\nabla^\Phi_X\Phi = \nabla^\Phi_Y d\Phi(X) = (\nabla d\Phi)(Y, X) + d\Phi(\nabla_Y X)$$

şi deci $-\Delta^\Phi\Phi = \tau(\Phi)$. Cum Φ este imersie riemanniană rezultă că $\tau(\Phi)$ este ortogonal pe $d\Phi(X) = 0$ şi deci $\langle\Delta^\Phi\Phi, d\Phi(X)\rangle = 0$, adică $\langle\Phi, d\Phi(X)\rangle = 0$, oricare ar fi $X \in C(TM)$. Acum

$$X\langle\Phi, \Phi\rangle = 2\langle\nabla^\Phi_X\Phi, \Phi\rangle = 2\langle d\Phi(X), \Phi\rangle = 0$$

şi prin urmare $|\Phi|$ este constantă. Notăm $|\Phi| = c$.

Din formula lui Weitzenböck

$$\frac{1}{2}\Delta^\Phi|\Phi|^2 = \langle\Delta^\Phi\Phi, \Phi\rangle - |\nabla^\Phi\Phi|^2$$

obţinem $0 = \lambda|\Phi|^2 - m$, adică $c = \frac{m}{\lambda}$ (am ţinut cont că $|\nabla^\Phi \Phi|^2 = |d\Phi|^2 = m$, deoarece Φ este imersie riemanniană).

Pentru punctul iii), scriem $\Phi = \boldsymbol{i} \circ \varphi$, unde $\boldsymbol{i} : \mathbb{S}^n(\sqrt{\frac{m}{\lambda}}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ este incluziunea canonică. Cum Φ este imersie riemanniană rezultă că şi φ este imersie riemanniană, iar din

$$\tau(\Phi) = -\lambda\Phi = d\boldsymbol{i}(\tau(\varphi)) + \operatorname{trace}(\nabla d\boldsymbol{i})(d\varphi\cdot, d\varphi\cdot)$$

rezultă $\tau(\varphi) = 0$. $\square$

Aplicaţie. Printr-un calcul direct se poate verifica
1) Aplicaţia

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad \Phi(x, y) = (\cos x, \sin x, \cos y, \sin y),$$

determină o imersie riemanniană minimală $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3(\sqrt{2})$ şi o imersie riemanniană minimală $\widetilde{\varphi} : T^2 \to \mathbb{S}^3(\sqrt{2})$, unde $T^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}$ este un tor plat.
2) Aplicaţia $\Phi : \mathbb{S}^3(\sqrt{3}) \to \mathbb{R}^5$

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} x^2 x^3, \frac{1}{\sqrt{3}} x^1 x^3, \frac{1}{\sqrt{3}} x^1 x^2, \frac{1}{2\sqrt{3}}((x^1)^2 - (x^2)^2), \frac{1}{6}((x^1)^2 + (x^2)^2 - 2(x^3)^2)) \Big)$$

determină o imersie riemanniană minimală $\varphi : \mathbb{S}^2(\sqrt{3}) \to \mathbb{S}^4$ şi o imersie riemanniană minimală $\widetilde{\varphi} : P^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{S}^4$, unde $P^2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^2(\sqrt{3})/\pm 1$ este spaţiul proiectiv real 2-dimensional.

Prezentăm acum, fără demonstraţie, următorul rezultat

Teorema 4.1.2. (**Unica Prelungire**.) *Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicaţie armonică. Dacă există U deschisă în M astfel încât $\phi_{|U}$ este constantă, atunci ϕ este constantă pe întreaga varietate M.*

Propoziţia 4.1.11. *Dacă $\phi : (M, g) \to (N, h)$ este o aplicaţie armonică, atunci*

$$\operatorname{trace} \nabla^2 d\phi = \sum_{i=1}^m R^N(d\phi(X_i), d\phi\cdot)d\phi(X_i) + d\phi(\operatorname{Ricci}(\cdot)) \tag{4.1.2}$$

iar

$$\frac{1}{2}\Delta|d\phi|^2 = -|\nabla d\phi|^2 - \sum_{i,j}\langle R^N(d\phi(X_i), d\phi(X_j))d\phi(X_i), d\phi(X_j)\rangle$$
$$(4.1.3) \qquad - \sum_i \langle d\phi(\mathrm{Ricci}(X_i)), d\phi(X_i)\rangle,$$

unde $\{X_i\}_{i=1,\dots,m}$ *este o bază ortonormată.*

Demonstraţie. Rezultă din Formula lui Weitzenböck pentru 1-forme cu valori în fibratul indus $\phi^{-1}TN$.$\square$

Propoziţia 4.1.12. *Fie* $\phi : (M, g) \to (N, h)$ *o aplicaţie armonică. Presupunem că* M *este compactă,* $\mathrm{Ricci} \geq 0$ *iar* $\overset{N}{\mathrm{Riem}} \leq 0$*. Avem*

i) ϕ *este total geodezică,*

ii) *dacă există* $p \in M$ *astfel încât* $\mathrm{Ricci}(p) > 0$*, atunci* ϕ *este constantă,*

iii) *dacă* $\overset{N}{\mathrm{Riem}} < 0$*, atunci* ϕ *este constantă sau are rangul constant* 1*, caz în care imaginea ei este o geodezică închisă.*

Demonstraţie. i) Integrând relaţia 4.1.3 din Propoziţia 4.1.11 obţinem

$$\int_M |\nabla d\phi|^2 \overline{v}_g = \int_M \sum_{i,j}\langle R^N(d\phi(X_j), d\phi(X_i))d\phi(X_i), d\phi(X_j)\rangle\, \overline{v}_g$$
$$- \int_M \sum_i \langle d\phi(\mathrm{Ricci}(X_i)), d\phi(X_i)\rangle\, \overline{v}_g.$$

Deoarece membrul stâng este pozitiv iar membrul drept este negativ, obţinem că ei sunt identic nuli şi deci $\nabla d\phi = 0$.
Sau, din relaţia (4.1.3) obţinem $\Delta|d\phi|^2 \leq 0$ şi cum M este compactă rezultă că $|d\phi|$ este constantă. Dar aceasta implică toţi termenii din dreapta ai egalităţii (4.1.3) sunt nuli, în particular $\nabla d\phi = 0$.

ii) Din ipoteza suplimentară $\mathrm{Ricci}(p) > 0$ şi din faptul că

$$\sum_{i=1}^m \langle d\phi_p(\mathrm{Ricci}_p(X_i)), d\phi_p(X_i)\rangle = 0$$

rezultă $d\phi_p = 0$. Cum $|d\phi|$ este constantă, obţinem $|d\phi| = 0$, adică ϕ este constantă.

iii) Din $\overset{N}{\mathrm{Riem}} < 0$ şi

$$\sum_{i,j} \langle R^N(d\phi(X_j), d\phi(X_i))d\phi(X_i), d\phi(X_j)\rangle = 0$$

rezultă că rang $d\phi_p = 0$ sau rang $d\phi_p = 1$, oricare ar fi $p \in M$. Dacă există $p \in M$ astfel încât rang $d\phi_p = 0$, adică $d\phi_p = 0$, atunci $d\phi = 0$ pe M şi deci ϕ este constantă. În cazul în care rang $d\phi_p = 1$, oricare ar fi $p \in M$, imaginea $\phi(M)$ poate fi realizată, local, prin geodezice ale lui M. $\square$

Teorema 4.1.3. (**Ruh-Vilms**.) *Fie M^m o hipersuprafaţă orientabilă a lui $\mathbb{R}^{m+1}$. Atunci aplicaţia Gauss asociată este armonică dacă şi numai dacă $\nabla^\perp H = 0$, unde H este câmpul vectorial curbură medie.*

Demonstraţie. Vom începe demonstraţia prin a reaminti definiţia aplicaţiei Gauss sferice. Cum M este orientabilă, există şi este unică o secţiune unitară în fibratul normal la M în $\mathbb{R}^{m+1}, \eta \in C(NM)$. Într-adevăr, dacă $\{X_1(p), \ldots, X_m(p)\}$ este o bază ortonormată pozitiv orientată în T_pM, atunci $\{X_1(p), \ldots, X_m(p), \eta(p)\}$ este o bază ortonormată şi pozitiv orientată în $T_p\mathbb{R}^{m+1}$. Vom transla prin paralelism în $\mathbb{R}^{m+1}$ vectorul normal $\eta(p)$ în originea lui $\mathbb{R}^{m+1}$. Se obţine astfel aplicaţia Gauss sferică $G : M \to \mathbb{S}^m$.

Deoarece T_pM este "paralel" cu $T_{G(p)}\mathbb{S}^m$, vom identifica cele două spaţii şi atunci putem avea $dG_p : T_pM \to T_pM$. Mai mult,

$$dG_p(X_p) = -A_p(X_p),$$

unde A este operatorul Weingarten asociat subvarietăţii M a lui $\mathbb{R}^{m+1}$. Într-adevăr, fie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \gamma(0) = p$ şi $\dot\gamma(0) = X_p$. Avem

$$\begin{aligned} dG_p(X_p) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{G \circ \gamma(t)\} = \nabla^{\mathbb{R}^{m+1}}_{X_p}\eta = \nabla^\perp_{X_p}\eta - A_p(X_p) \\ &= -A_p(X_p) \end{aligned}$$

($|\eta| = 1$ implică $\nabla^\perp\eta = 0$).

Notăm $\boldsymbol{i} : M \to \mathbb{R}^{m+1}$ şi $\boldsymbol{j} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ incluziunile canonice, iar $\widetilde{G} = \boldsymbol{j} \circ G : M \to \mathbb{R}^{m+1}$. Avem

$$\begin{aligned}
\tau_p(\widetilde{G}) &= \tau_p(G) + \operatorname{trace}(\nabla d\boldsymbol{j})_{G(p)}(dG\cdot, dG\cdot) \\
&= \tau_p(G) - \sum_{i=1}^{m} \langle dG_p(X_i), dG_p(X_i)\rangle_{G(p)} \widetilde{G}(p) \\
&= \tau_p(G) - \sum_{i=1}^{m} \langle A_p(X_i), A_p(X_i)\rangle_p \widetilde{G}(p) \\
&= \tau_p(G) - |A_p|^2 \widetilde{G}(p),
\end{aligned}$$

deci

$$\tau_p(G) = \tau_p(\widetilde{G}) + |A_p|^2 \widetilde{G}(p). \tag{4.1.4}$$

Exprimăm acum $\tau_p(\widetilde{G})$

$$\begin{aligned}
(\nabla d\widetilde{G})_p(X,Y) &= \nabla^{\widetilde{G}}_X d\widetilde{G}(Y) - d\widetilde{G}(\nabla_X Y) = \nabla^{\widetilde{G}}_X d\widetilde{G}(Y) + A_p(\nabla_X Y) \\
&= \nabla^{\widetilde{G}}_X \left(Y^i dG \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) + A_p(\nabla_X Y) \\
&= -\nabla^{\widetilde{G}}_X (Y^i A^\alpha_i e_\alpha) + A_p(\nabla_X Y) \\
&= -(X(Y^i A^\alpha_i)) e_\alpha - Y^i A^\alpha_i \nabla^{\widetilde{G}}_X e_\alpha + A_p(\nabla_X Y) \\
&= -(X(Y^i A^\alpha_i)) e_\alpha + A_p(\nabla_X Y) = -\nabla^{\mathbb{R}^{m+1}}_X A(Y) + A_p(\nabla_X Y) \\
&= -\nabla_X A(Y) - B_p(X, A(Y)) + A_p(\nabla_X Y) \\
&= -\nabla_X A(Y) + A_p(\nabla_X Y) - \langle B_p(X, A(Y)), \widetilde{G}(p)\rangle \widetilde{G}(p) \\
&= -(\nabla A)(X,Y) - \langle A(X), A(Y)\rangle_p \widetilde{G}(p),
\end{aligned}$$

unde $\{e_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,m+1}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^{m+1}$. Deci

$$\tau_p(\widetilde{G}) = -\operatorname{trace}(\nabla A)_p(\cdot,\cdot) - |A_p|^2 \widetilde{G}(p). \tag{4.1.5}$$

Înlocuind (4.1.4) în (4.1.3) obţinem

$$\tau_p(G) = -\operatorname{trace}(\nabla A)_p(\cdot,\cdot). \tag{4.1.6}$$

Vom demonstra acum că

$$\langle(\nabla A)(X,Y),Z\rangle = \langle\nabla^{\perp}_{Z}B(X,Y),\eta\rangle. \tag{4.1.7}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\langle(\nabla A)(X,Y),Z\rangle &= \langle\nabla_X A(Y)-A(\nabla_X Y),Z\rangle\\ &= \langle\nabla_X A(Y),Z\rangle-\langle A(\nabla_X Y),Z\rangle\\ &= X\langle A(Y),Z\rangle-\langle A(Y),\nabla_X Z\rangle-\langle A(\nabla_X Y),Z\rangle\\ &= X\langle A(Y),Z\rangle-\langle B(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle-\langle B(\nabla_X Y,Z),\eta\rangle\\ &= X\langle B(Y,Z),\eta\rangle-\langle B(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle-\langle B(\nabla_X Y,Z),\eta\rangle\\ &= \langle\nabla^{\perp}_X B(Y,Z),\eta\rangle-\langle B(Y,\nabla_X Z)+B(\nabla_X Y,Z),\eta\rangle\\ &= \langle(\nabla^{\perp}_X B)(Y,Z),\eta\rangle.\end{aligned}$$

Folosind Ecuaţiile lui Codazzi obţinem

$$\begin{aligned}\langle(\nabla A)(X,Y),Z\rangle &= \langle(\nabla^{\perp}_X B)(Y,Z),\eta\rangle = \langle(\nabla^{\perp}_X B)(Z,Y),\eta\rangle\\ &= \langle(\nabla^{\perp}_Z B)(X,Y),\eta\rangle.\end{aligned}$$

Acum, din (4.1.6) rezultă

$$\begin{aligned}\langle\operatorname{trace}(\nabla A)(\cdot,\cdot),Z\rangle &= \left\langle\sum_i(\nabla A)(X_i,X_i),Z\right\rangle = \left\langle\sum_i\nabla^{\perp}_Z B(X_i,X_i),\eta\right\rangle\\ &= \langle m\nabla^{\perp}_Z H,\eta\rangle,\end{aligned}$$

iar (4.1.5) se rescrie sub forma

$$\begin{aligned}\tau_p(G) &= -\operatorname{trace}(\nabla A)_p(\cdot,\cdot) = -\sum_i\langle\operatorname{trace}(\nabla A)_p(\cdot,\cdot),X_i\rangle X_i\\ &= -m\langle\nabla^{\perp}_{X_i}H,\eta\rangle X_i.\end{aligned}$$

Dacă $\tau(G)=0$, atunci $\langle\nabla^{\perp}_{X_i}H,\eta\rangle=0$, oricare ar fi $i=1,\ldots,m$, adică $\nabla^{\perp}H=0$ (am folosit faptul că $\nabla^{\perp}_{X_i}H$ este paralel cu η).

Reciproca este evidentă. □

Observaţia 4.1.4. Teorema Ruh-Vilms este adevărată şi pentru subvarietăţi ale lui $\mathbb{R}^{m+1}$ de codimensiune arbitrară.

Vom încheia această secţiune prezentând celebrul rezultat de existenţă al aplicaţiilor armonice dat de Eells şi Sampson.

Teorema 4.1.4. (**Eells-Sampson.**) *Fie (M, g) şi (N, h) două varietăţi riemanniene compacte şi presupunem că* $\overset{N}{\mathrm{Riem}} \leq 0$. *Fie $\psi : M \to N$ o aplicaţie netedă arbitrară. Atunci există $\phi : M \to N$ o aplicaţie netedă astfel încât*

i) *ϕ este omotopă cu ψ,*

ii) *$\phi : (M, g) \to (N, h)$ este armonică,*

iii) *ϕ minimizează energia E în clasa sa de omotopie, adică dacă φ este omotopă cu ϕ, şi deci şi cu ψ, atunci*

$$E(\phi) \leq E(\varphi).$$

Demonstraţia acestui rezultat este complicată şi nu o vom prezenta aici. Vom da doar ideile principale.

Eells şi Sampson au considerat următoarea ecuaţie neliniară a căldurii

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} = \tau(\phi_t) \\ \phi_0 = \psi \end{cases} \tag{4.1.8}$$

pentru o familie unu-paramatrică $\{\phi_t\}_{t \geq 0} \subset C^{\infty}(M, N)$. În ipotezele teoremei ei au arătat că

i) există o unică soluţie $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$ a ecuaţiei (4.1.8)

ii) există $\lim_{t \to \infty} \phi_t = \phi$

iii) $\phi \in C^{\infty}(M, N)$ şi $\phi : (M, g) \to (N, h)$ este armonică.

Motivaţia considerării ecuaţiei (4.1.8) este următoarea. Fie $\{\psi_t\}_t$ o variaţie a lui ψ. Notând cu V câmpul variaţional asociat lui $\{\psi_t\}$ avem

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(\psi_t) = -\int_M h(V, \tau(\psi))\, \overline{v}_g = -(V, \tau(\psi)). \tag{4.1.9}$$

Dar $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(\psi_t) = dE_\psi(V)$, unde dE_ψ reprezintă diferenţiala în ψ a funcţiei E definită pe $C^\infty(M,N)$. Prin urmare (4.1.9) poate fi rescrisă sub forma

$$dE_\psi(V) = -(V, \tau(\psi)), \quad \forall V \in C(\psi^{-1}TN). \tag{4.1.10}$$

Dar aceasta implică

$$(\operatorname{grad} E)_\psi = -\tau(\psi), \quad \forall \psi \in C^\infty(M,N). \tag{4.1.11}$$

Pe de altă parte, pentru a deforma ψ astfel încât să-i scădem energia, considerăm o curbă integrală în $C^\infty(M,N)$ a lui $-\operatorname{grad} E$.

Într-adevăr, dacă (M,g) este o varietate riemanniană, f o funcţie pe M şi $\gamma(t)$ o curbă astfel încât $\dot\gamma(t) = -(\operatorname{grad} f)(\gamma(t))$, oricare ar fi t, atunci

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t \{(f\circ\gamma)(t)\} = \dot\gamma(t) f = -(\operatorname{grad} f)(\gamma(t)) f = -|\operatorname{grad} f|^2(\gamma(t)) \le 0$$

şi deci $t \to (f\circ\gamma)(t)$ este descrescătoare.

Notăm curba integrală a lui $-\operatorname{grad} E$ prin $\phi_t \in C^\infty(M,N)$. Deci

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} = -(\operatorname{grad} E)_{\phi_t} \\ \phi_0 = \psi \end{cases}. \tag{4.1.12}$$

Dar din (4.1.11), observăm că (4.1.8) este echivalent cu (4.1.12). Aplicaţia limită ϕ realizează minimul lui E în clasa sa de omotopie.

În cazul în care $M = \mathbb{S}^1$ avem

Teorema 4.1.5. *Fie (N,h) o varietate riemanniană compactă. Atunci în clasa de omotopie a oricărei curbe închise există o geodezică închisă care realizează minimul energiei în acea clasă de omotopie.*

4.2. A doua formulă variaţională

Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicaţie armonică şi presupunem că M este compactă. Considerăm o variaţie netedă $\phi_{s,t} : M \to N$ a lui ϕ cu doi parametri s şi t, adică considerăm aplicaţia netedă

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M \to N, \quad \Phi(s, t, p) = \phi_{s,t}(p),$$

cu $\Phi(0, 0, p) = \phi_{0,0}(p) = \phi(p)$, oricare ar fi $p \in M$. Câmpurile vectoriale variaţionale corespunzătoare acestei variaţii, V şi W, sunt date de

$$V(p) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_{s,0}(p) = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial s}(0, 0, p)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}(\phi(p)) = d\Phi_{0,0,p}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \in T_{\phi(p)}N,$$

iar

$$W(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_{0,t}(p) = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial t}(0, 0, p)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}(\phi(p)) = d\Phi_{0,0,p}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \in T_{\phi(p)}N.$$

Desigur, V şi W sunt secţiuni în fibratul $\phi^{-1}TN$.

Privim acum energia E ca o funcţie pe "varietatea" $C^\infty(M, N)$ şi vom identifica $T_\phi C^\infty(M, N)$ cu $C(\phi^{-1}TN)$. Hessiana lui E în punctul său critic ϕ este definită de

$$(\operatorname{Hess} E)_\phi(V, W) = \left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{(s,t)=(0,0)} E(\phi_{s,t}).$$

Dorim să găsim expresia lui $(\operatorname{Hess} E)_\phi(V, W)$. Pentru aceasta considerăm $\{X_i\}_{i=1,\dots,m}$ un câmp local de repere ortonormate, adică $X_i \in C(TU)$ şi $\langle X_i, X_j\rangle = \delta_{ij}$ pe U, U fiind un deschis din M. Avem

$$\begin{aligned} E(\phi_{s,t}) &= \frac{1}{2}\int_M |d\phi_{s,t}|^2\, \overline{v}_g = \frac{1}{2}\int_M \sum_{i=1}^m \langle d\phi_{s,t}(X_i), d\phi_{s,t}(X_i)\rangle\, \overline{v}_g \\ &= \frac{1}{2}\int_M \sum_i \langle d\Phi(X_i), d\Phi(X_i)\rangle\, \overline{v}_g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t E(\phi_{s,t}) &= \frac{1}{2}\int_M \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \sum_i \langle d\Phi(X_i), d\Phi(X_i)\rangle\, \overline{v}_g \\
&= \int_M \sum_i \langle \nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi(X_i), d\Phi(X_i)\rangle\, \overline{v}_g \\
&= \int_M \sum_i \left\langle \nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + d\Phi\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, X_i\right]\right), d\Phi(X_i)\right\rangle \overline{v}_g \\
&= \int_M \sum_i \left\langle \nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi(X_i)\right\rangle \overline{v}_g \\
&= \int_M \sum_i \left\{ X_i \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi(X_i)\right\rangle \right. \\
&\qquad \left. - \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi(X_i)\right\rangle \right\} \overline{v}_g.
\end{aligned}$$

Notăm

$$\begin{aligned}
X(q) &= \sum_i \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi(X_i)\right\rangle X_i \\
&= \sum_i \left\langle d\Phi_{(s,t,q)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), (d\phi_{s,t})_q(X_i)\right\rangle X_i(q).
\end{aligned}$$

Vectorul $X(q) \in T_qM$ este bine definit, adică nu depinde de baza ortonormată folosită. Lăsând punctul q liber se obţine $X \in C(TM)$, iar

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_i X_i \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi(X_i)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i,j} \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi(X_j)\right\rangle \langle \nabla_{X_i} X_j, X_i\rangle \\
&= \sum_i X_i \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi(X_i)\right\rangle \\
&\quad - \sum_{i,j} \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi(X_j)\right\rangle \langle X_j, \nabla_{X_i} X_i\rangle \\
&= \sum_i X_i \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi(X_i)\right\rangle - \sum_i \langle X, \nabla_{X_i} X_i\rangle.
\end{aligned}$$

Prin urmare

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t E(\phi_{s,t}) &= \int_M \left\{ \operatorname{div} X + \sum_{i,j} \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi(X_j)\right\rangle \langle X_j, \nabla_{X_i} X_i\rangle \right.\\
&\quad \left. - \sum_i \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi(X_i)\right\rangle \right\} \overline{v}_g \\
&= \int_M \left\{ \sum_{i,j} \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi(\langle X_j, \nabla_{X_i} X_i\rangle X_j)\right\rangle \right.\\
&\quad \left. - \sum_i \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi(X_i)\right\rangle \right\} \overline{v}_g \\
&= -\int_M \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_i (\nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi(X_i) - d\Phi(\nabla_{X_i} X_i))\right\rangle \overline{v}_g.
\end{aligned}
$$

Derivăm acum în raport cu s şi obţinem

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{(s,t)=(0,0)} E(\phi_{s,t}) = \\
&= -\int_M \left\langle \nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_i (\nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi(X_i) - d\Phi(\nabla_{X_i} X_i))\right\rangle \overline{v}_g - \\
&\quad -\int_M \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_i \nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} (\nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi(X_i) - d\Phi(\nabla_{X_i} X_i))\right\rangle \overline{v}_g \\
&= -\int_M \left\langle \nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tau(\phi)\right\rangle \overline{v}_g \\
&\quad -\int_M \left\langle W, \sum_i \nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\Phi(\nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi(X_i) - d\Phi(\nabla_{X_i} X_i))\right\rangle \overline{v}_g \qquad (4.2.1)\\
&= -\int_M \left\langle W, \sum_i \nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} (\nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi(X_i) - d\Phi(\nabla_{X_i} X_i))\right\rangle \overline{v}_g.
\end{aligned}
$$

Vom evalua acum expresiile $\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla^{\Phi}_{X_i} d\Phi(X_i)$ şi $\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\Phi(\nabla_{X_i} X_i)$ în $(s,t) =$

$(0,0)$. Avem

$$
\begin{aligned}
\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla^{\Phi}_{X_i}d\Phi(X_i) &= \nabla^{\Phi}_{X_i}\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi(X_i) + \nabla^{\Phi}_{[\frac{\partial}{\partial s},X_i]}d\Phi(X_i) \\
&\quad + R\left(\frac{\partial}{\partial s}, X_i\right)d\Phi(X_i) \\
&= \nabla^{\Phi}_{X_i}\left(\nabla^{\Phi}_{X_i}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) + d\Phi\left(\left[\frac{\partial}{\partial s}, X_i\right]\right)\right) \qquad (4.2.2)\\
&\quad + R\left(\frac{\partial}{\partial s}, X_i\right)d\Phi(X_i) \\
&= \nabla^{\Phi}_{X_i}\nabla^{\Phi}_{X_i}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) + R^N\left(d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), d\Phi(X_i)\right)d\Phi(X_i) \\
&= \nabla^{\phi}_{X_i}\nabla^{\phi}_{X_i}V + R^N(V, d\phi(X_i))d\phi(X_i),
\end{aligned}
$$

iar
(4.2.3)

$$
\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\Phi(\nabla_{X_i}X_i) = \nabla^{\Phi}_{\nabla_{X_i}X_i}d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) + d\Phi\left(\left[\frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{X_i}X_i\right]\right) = \nabla^{\phi}_{\nabla_{X_i}X_i}V.
$$

Înlocuind (4.2.2) şi (4.2.3) în (4.2.1) obţinem

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_{(s,t)=(0,0)} E(\phi_{s,t}) = \\
&= -\int_M \left\langle W, \sum_i (\nabla^{\phi}_{X_i}\nabla^{\phi}_{X_i}V - R^N(d\phi(X_i), V)d\phi(X_i) - \nabla^{\phi}_{\nabla_{X_i}X_i}V\right\rangle \overline{v}_g \\
&= \int_M \langle W, \Delta V + \operatorname{trace} R^N(d\phi\cdot, V)d\phi\cdot\rangle\, \overline{v}_g \\
&= \int_M \langle W, J(V)\rangle\, \overline{v}_g = (W, J(V)),
\end{aligned}
$$

unde

$$
J : C(\phi^{-1}TN) \to C(\phi^{-1}TN), \quad J(V) = \Delta V + \operatorname{trace} R^N(d\phi\cdot, V)d\phi\cdot .
$$

Din proprietăţile laplaceanului Δ şi ale câmpului tensorial Riemann-Christoffel asociat lui R^N obţinem

Propoziţia 4.2.1. *Operatorul* $J : C(\phi^{-1}TN) \to C(\phi^{-1}TN)$ *este* $\mathbb{R}$*-liniar, eliptic şi simetric, adică* $(J(V), W) = (J(W), V)$*, oricare ar fi* $V, W \in C(\phi^{-1}TN)$*.*

Operatorul J se numeşte *operatorul Jacobi* asociat aplicaţiei armonice ϕ.

Definiţia 4.2.1. *Indexul* unei aplicaţii armonice $\phi : (M, g) \to (N, h)$ este

$$\begin{aligned} \text{index}\,(\phi) &= \sup\{\dim(F) : F \subset C(\phi^{-1}TN) \\ &\qquad \text{şi } J \text{ este strict negativ definit pe } F\}. \end{aligned}$$

Notăm că J este strict negativ definit pe F dacă $(J(V), V) < 0$, oricare ar fi $V \in F$, $V \neq 0$.

Definiţia 4.2.2. *Nulitatea* unei aplicaţii armonice $\phi : (M, g) \to (N, h)$ este

$$\begin{aligned} \text{nullity}(\phi) &= \dim\{V \in C(\phi^{-1}TN) : J(V) = 0\} \\ &= \dim\{V \in C(\phi^{-1}TN) : (\text{Hess}\, E)_\phi(V, W) = 0, \\ &\qquad \forall W \in C(\phi^{-1}TN)\}. \end{aligned}$$

Notăm că $\{V \in C(\phi^{-1}TN) : J(V) = 0\}$ este un spaţiu liniar. De asemenea, dacă $J(V) = 0$, atunci $(\text{Hess}\, E)_\phi(V, W) = (J(V), W) = 0$, oricare ar fi $W \in C(\phi^{-1}TN)$ şi reciproc, dacă $(\text{Hess}\, E)_\phi(V, W) = 0$, oricare ar fi $W \in C(\phi^{-1}TN)$, pentru $W = J(V)$ obţinem $J(V) = 0$.

Definiţia 4.2.3. O aplicaţie armonică $\phi : (M, g) \to (N, h)$ se numeşte *slab stabilă* dacă $\text{index}\,(\phi) = 0$, adică $(\text{Hess}\, E)_\phi(V, V) = (J(V), V) \geq 0$, oricare ar fi $V \in C(\phi^{-1}TN)$. În caz contrar, ϕ se numeşte *instabilă*.

Deoarece J este un operator eliptic, simetric, iar M este compactă, spectrul lui J, notat $Spec(J)$, este format dintr-o mulţime discretă, infinită, de valori proprii, cu multiplicităţi finite, şi fără puncte de acumulare

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_i < \ldots \nearrow \infty\,.$$

Desigur, λ este *valoare proprie* pentru J dacă

$$V_\lambda = \{V \in C(\phi^{-1}TN) : J(V) = \lambda V\} \neq \emptyset.$$

V_λ se numeşte *spaţiul propriu* corespunzător valorii proprii λ, iar $\dim V_\lambda$ se numeşte *multiplicitatea* valorii proprii λ. Pentru o aplicaţie armonică $\phi : (M, g) \to (N, h)$

$$\operatorname{index}(\phi) = \sum_{\lambda<0} \dim V_\lambda,$$

iar

$$\operatorname{nullity}(\phi) = \dim V_0 = \dim \ker J.$$

Aplicaţia ϕ este slab stabilă dacă $\lambda_i \geq 0$, oricare ar fi $i \in \mathbb{N}^*$.

Propoziţia 4.2.2. *Dacă* $\overset{N}{\operatorname{Riem}} \leq 0$, *atunci orice aplicaţie armonică* $\phi : (M, g) \to (N, h)$ *este slab stabilă.*

Demonstraţie. Reamintim că $\overset{N}{\operatorname{Riem}} \leq 0$ înseamnă

$$\langle R^N(X, Y)Y, X\rangle = \mathcal{R}^N(X, Y, X, Y) \leq 0, \quad \forall X, Y \in T_pM \text{ şi } \forall p \in M.$$

Avem

$$\begin{aligned}
(J(V), V) &= \int_M \langle J(V), V\rangle\, \overline{v}_g = \int_M \langle \Delta V + \operatorname{trace} R^N(d\phi\cdot, V)d\phi\cdot, V\rangle\, \overline{v}_g \\
&= \int_M \langle \nabla V, \nabla V\rangle\, \overline{v}_g + \int_M \sum_i \langle R^N(d\phi(X_i), V)d\phi(X_i), V\rangle\, \overline{v}_g \\
&= \int_M |\nabla V|^2\, \overline{v}_g - \int_M \sum_i \mathcal{R}^N(d\phi(X_i), V, d\phi(X_i), V)\, \overline{v}_g \\
&\geq 0. \square
\end{aligned}$$

Interpretarea geometrică a nulităţii. Fie (M, g) şi (N, h) două varietăţi riemanniene compacte. Notăm

$$\operatorname{har}(M, N) = \{\phi \in C^\infty(M, N) : \phi : (M, g) \to (N, h) \text{ armonică}\}.$$

Mulţimea $\operatorname{har}(M, N)$ nu este, în general, o varietate, dar vom considera, formal, spaţiul tangent la ea într-un punct ϕ

$$T_\phi \operatorname{har}(M, N) \subset T_\phi C^\infty(M, N) \equiv C(\phi^{-1}TN)$$

astfel: spunem că un câmp vectorial variaţional $V \in C(\phi^{-1}TN)$ aparţine lui $T_\phi \operatorname{har}(M,N)$ dacă există o familie unu-parametrică $\{\phi_s\}_s$ de aplicaţii armonice, adică $\{\phi_s\}_s \subset \operatorname{har}(M,N)$, cu $\phi_0 = \phi$ şi $V(p) = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\phi_s(p)$, oricare ar fi $p \in M$. În acest caz obţinem

$$T_\phi \operatorname{har}(M,N) \subset \ker(J)$$

şi deci $\dim T_\phi \operatorname{har}(M,N) \leq \operatorname{nullity}(\phi)$. Într-adevăr, fie $V \in T_\phi \operatorname{har}(M,N)$. Conform definiţiei, $V \in C(\phi^{-1}TN)$ şi există $\{\phi_s\}_s \subset \operatorname{har}(M,N)$ astfel încât $\phi_0 = \phi$ şi $V(p) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \phi_s(p)$, oricare ar fi $p \in M$. Pentru $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ fixat arbitrar, considerăm $\{\phi_{s,t}\}_t$ o variaţie arbitrară a aplicaţiei armonice $\phi_s = \phi_{s,0}$. Definim

$$W(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_{0,t}(p), \quad \forall p \in M.$$

Deoarece ϕ_s este armonică

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} E(\phi_{s,t}) = 0, \quad \forall s$$

şi deci

$$(\operatorname{Hess} E)_\phi(V,W) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{(s,t)=(0,0)} E(\phi_{s,t}) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} E(\phi_{s,t}) \right) = 0.$$

Deoarece $W \in C(\phi^{-1}TN)$ este arbitrar obţinem că $J(V) = 0$, adică $V \in \ker(J)$.

Exemplul 4.2.1. (**Aplicaţia constantă.**) Fie $\phi : (M,g) \to (N,h)$, $\phi(p) = q$, oricare ar fi $p \in M$. Presupunem M compactă. Desigur ϕ este armonică şi

$$C(\phi^{-1}TN) = \{V : V(p) \in T_qN, \forall p \in M\}.$$

Considerăm $\{v_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,n}$ o bază în T_qN şi definim $V_\alpha \in C(\phi^{-1}TN)$ prin $V_\alpha(p) = v_\alpha$, oricare ar fi $p \in M$. Atunci

$$C(\phi^{-1}TN) = \left\{ V = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha V_\alpha : f_\alpha \in C^\infty(M), \forall \alpha = 1, \ldots, n \right\}.$$

Calculăm acum $J(V)$. Avem

$$\operatorname{trace} R^N(d\phi\cdot, V)d\phi\cdot = \sum_{i=1}^{m} R^N(d\phi(X_i), V)d\phi(X_i) = 0,$$

iar

$$\begin{aligned}\nabla_X V &= \nabla_X\left(\sum_\alpha f_\alpha V_\alpha\right) = \sum_\alpha\{(Xf_\alpha)V_\alpha + f_\alpha\nabla_X V_\alpha\}\\ &= \sum_\alpha\{(Xf_\alpha)V_\alpha + f_\alpha\nabla^N_{d\phi(X)}Y_\alpha\}\\ &= \sum_\alpha(Xf_\alpha)V_\alpha,\end{aligned}$$

unde $Y_\alpha \in C(TN)$ cu $Y_\alpha(q) = v_\alpha; V_\alpha = Y_\alpha \circ \phi$. Rezultă

$$\Delta V = \sum_\alpha(\Delta f_\alpha)V_\alpha.$$

În concluzie $J(V) = \Delta V = \sum\limits_\alpha(\Delta f_\alpha)V_\alpha$ şi putem enunţa

Propoziţia 4.2.3. *Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicaţie constantă, $\phi(p) = q$, oricare ar fi $p \in M$. Presupunem că M este compactă. Atunci*

$$Spec(J) = n \times Spec(M, g),$$

adică J are aceleaşi valori proprii ca şi laplaceanul Δ ce acţionează asupra lui $C^\infty(M)$, iar $\dim V_\lambda^J = n \dim V_\lambda^\Delta$.

Exemplul 4.2.2. (**Aplicaţia identitate.**) Considerăm $\phi = \mathbf{1} : (M, g) \to (M, g)$ aplicaţia identitate. Ea este armonică şi

$$C(\mathbf{1}^{-1}TM) = C(TM).$$

Vom nota $V = X$, iar $\Delta V = -\operatorname{trace}\nabla^2 X$. Avem şi

$$\operatorname{trace} R(d\mathbf{1}\cdot, X)d\mathbf{1}\cdot = \sum_{i=1}^{m} R(X_i, X)X_i = -\operatorname{Ricci}(X),$$

deci $J(X) = -\operatorname{trace}\nabla^2 X - \operatorname{Ricci}(X)$. Reamintim formula

$$\Delta_H(X) = -\operatorname{trace}\nabla^2 X + \operatorname{Ricci}(X).$$

Prin urmare

$$J(X) = \Delta_H(X) - 2\operatorname{Ricci}(X).$$

Teorema 4.2.1. (**Smith.**) *Fie $\mathbb{S}^m$ sfera euclidiană unitară, $m \geq 2$. Avem*

i) *dacă $m = 2$, atunci $\mathbf{1}$ este slab stabilă şi* $\operatorname{nullity}(\mathbf{1}) = 6$,

ii) *dacă $m > 2$, atunci* $\operatorname{index}(\mathbf{1}) = m + 1$ *şi* $\operatorname{nullity}(\mathbf{1}) = \frac{m(m+1)}{2}$.

Demonstraţie. Pe $\mathbb{S}^m$ tensorul Ricci are expresia $\operatorname{Ricci}(X) = (m-1)X$, oricare ar fi $X \in C(T\mathbb{S}^m)$. Prin urmare $\lambda \in Spec(J)$ dacă şi numai dacă $\lambda + 2(m-1) \in Spec(\Delta_H)$. Din discuţia anterioară asupra spectrului operatorului Δ_H, particularizată la $\mathbb{S}^m$, obţinem

$$\begin{aligned} Spec(\Delta_H) &= \{k(m+k-1)\}_{k\geq 1} \cup \{2(m-1), \ldots\} \\ &= \{m, 2(m+1), 3(m+2), \ldots\} \cup \{2(m-1), \ldots\}. \end{aligned}$$

Cum

$$\begin{aligned} \dim V_m &= \dim\{f \in C^\infty(\mathbb{S}^m) : \Delta f = mf\} \\ &= \dim\{\operatorname{grad} f : \Delta_H^{\mathrm{grad}} \operatorname{grad} f = m \operatorname{grad} f\} \\ &= m + 1 \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} \dim V_{2(m-1)} &= \dim\{X \in C(T\mathbb{S}^m), \operatorname{div} X = 0 : \Delta_H^{\mathrm{div}} X = 2(m-1)X\} \\ &= \dim\{X \in C(T\mathbb{S}^m) : X \text{ este Killing}\} \\ &= \frac{m(m+1)}{2}, \end{aligned}$$

obţinem concluziile teoremei. $\square$

Mai general putem da

Teorema 4.2.2. (**Smith**.) *Fie* (M, g) *o varietate riemanniană compactă şi presupunem că* $\mathrm{Ricci} = cg$, *unde* c *este o constantă reală, adică* (M, g) *este o varietate Einstein. Atunci*

i) *aplicaţia identitate* $\mathbf{1} : (M, g) \to (M, g)$ *este slab stabilă dacă şi numai dacă prima valoare proprie nenulă* λ_1 *a laplaceanului* Δ *ce acţionează asupra lui* $C^\infty(M)$ *satisface*

$$\lambda_1 \geq 2c,$$

ii) *avem*

$$\begin{aligned} \mathrm{nullity}(\mathbf{1}) &= \dim\{X \in C(TM) : X \textit{ este Killing}\} \\ &\quad + \dim\{f \in C^\infty(M) : \Delta f = 2cf\}. \end{aligned}$$

Demonstratie. Este la fel ca în cazul sferei $\mathbb{S}^m$. $\square$

Propoziţia 4.2.4. *Fie* $\boldsymbol{i} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ *incluziunea total geodezică,* $m < n$. *Avem*

i) *dacă* $m = 3$, *atunci* $\mathrm{index}(\boldsymbol{i}) = n - 2$ *şi* $\mathrm{nullity}(\boldsymbol{i}) = 3n$,

ii) *dacă* $m > 2$, *atunci* $\mathrm{index}(\boldsymbol{i}) = n + 1$ *şi* $\mathrm{nullity}(\boldsymbol{i}) = \frac{(m+1)(2n-m)}{2}$.

Demonstraţie. Operatorul Jacobi asociat incluziunii total geodezice $\boldsymbol{i} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ are expresia

$$\begin{aligned} J^{\boldsymbol{i}}(V) &= \Delta^{\boldsymbol{i}} V + \mathrm{trace}\, R^{\mathbb{S}^n}(d\boldsymbol{i}\cdot, V) d\boldsymbol{i}\cdot \\ &= \Delta^{\boldsymbol{i}} V + \sum_{i=1}^{m} \{\langle X_i, V\rangle X_i - \langle X_i, X_i\rangle V\} \\ &= \Delta^{\boldsymbol{i}} V - mV + \sum_{i=1}^{m} \langle X_i, V\rangle X_i, \quad \forall V \in C(\boldsymbol{i}^{-1} T\mathbb{S}^n). \end{aligned}$$

Presupunem $\mathbb{S}^m = \mathbb{S}^m \times \{(0, \ldots, 0)\}$ şi considerăm descompunerea ortogonală a lui $\boldsymbol{i}^{-1} T\mathbb{S}^n$

$$\boldsymbol{i}^{-1} T\mathbb{S}^n = T\mathbb{S}^m \oplus N\mathbb{S}^m.$$

Dacă $V = X \in C(T\mathbb{S}^m)$, atunci

$$\begin{aligned} J^{\boldsymbol{i}}(V) &= J^{\boldsymbol{i}}(X) = \Delta^{\boldsymbol{i}} X - mX + \sum_{i=1}^{m} \langle X_i, X \rangle X_i \\ &= -\operatorname{trace}\, {}^{\mathbb{S}^m}\nabla^2 X + (1-m)X \\ &= J^{\mathbf{1}}(X) \in C(T\mathbb{S}^m). \end{aligned}$$

Dacă $V \in C(N\mathbb{S}^m)$, atunci

$$J^{\boldsymbol{i}}(V) = \Delta^{\boldsymbol{i}} V - mV = \Delta^{\perp} V - mV \in C(N\mathbb{S}^m).$$

Prin urmare $J^{\boldsymbol{i}}$ invariază $C(T\mathbb{S}^m)$ şi $C(N\mathbb{S}^m)$ şi atunci vom studia restricţiile lui $J^{\boldsymbol{i}}$ la cele două subspaţii.

Operatorul $J^{\mathbf{1}}$, unde $\mathbf{1} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ este aplicaţia identitate, a fost deja studiat mai sus. Pentru cazul normal, notăm că

$$C(N\mathbb{S}^m) = \{V = f^1 e_{m+2} + \ldots + f^{n-m} e_{n+1} : f^1, \ldots, f^{n-m} \in C^\infty(\mathbb{S}^m)\},$$

unde $e_{m+2} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$. Avem

$$\begin{aligned} J^{\boldsymbol{i}}(V) &= \Delta^{\perp} V - mV \\ &= (\Delta f^1) e_{m+2} + \ldots + (\Delta f^{n-m}) e_{n+1} \\ &\quad -m(f^1 e_{m+2} + \ldots + f^{n-m} e_{n+1}) \\ &= (\Delta f^1 - m f^1) e_{m+2} + \ldots + (\Delta f^{n-m} - m f^{n-m}) e_{n+1}. \end{aligned}$$

Deci, indexul lui $J^{\boldsymbol{i}}$ restricţionat la $C(N\mathbb{S}^m)$ este $n - m$, iar nulitatea sa este $(n-m)(m+1)$. Ţinând cont de indexul şi nulitatea lui $J^{\mathbf{1}}$, obţinem rezultatul dorit. Mai mult, spaţiul care dă indexul lui $J^{\boldsymbol{i}}$ este

$$\{V = f^1 e_{m+2} + \ldots + f^{n-m} e_{n+1} : f^1, \ldots, f^{n-m} \text{ sunt constante reale}\}$$

pentru $m = 2$, şi

$$\begin{aligned} &\{X = \operatorname{grad} f \in C(T\mathbb{S}^m) : f \in C^\infty(\mathbb{S}^m) \text{ şi } \Delta f = mf\} \\ &\oplus \{V = f^1 e_{m+2} + \ldots + f^{n-m} e_{n+1} : f^1, \ldots, f^{n-m} \text{ sunt constante reale}\} \end{aligned}$$

pentru $m > 2$. Spaţiul pe care se anulează $J^{\boldsymbol{i}}$ este

$$\begin{aligned}
&\{X = \operatorname{grad} f \in C(T\mathbb{S}^m) : f \in C^\infty(\mathbb{S}^m) \text{ şi } \Delta f = mf\} \\
&\oplus\{X \in C(T\mathbb{S}^m) : X \text{ este Killing}\} \\
&\oplus\{V = f^1 e_{m+2} + \ldots + f^{n-m} e_{n+1} : f^1, \ldots, f^{n-m} \in C^\infty(\mathbb{S}^m) \text{ şi} \\
&\qquad \Delta f^1 = mf^1, \ldots, \Delta f^{n-m} = mf^{n-m}\}
\end{aligned}$$

pentru $m = 2$, şi

$$\begin{aligned}
&\{X \in C(T\mathbb{S}^m) : X \text{ este Killing}\} \\
&\oplus\{V = f^1 e_{m+2} + \ldots + f^{n-m} e_{n+1} : f^1, \ldots, f^{n-m} \in C^\infty(\mathbb{S}^m) \text{ şi} \\
&\qquad \Delta f^1 = mf^1, \ldots, \Delta f^{n-m} = mf^{n-m}\}
\end{aligned}$$

pentru $m > 2$. □

Vom prezenta în continuare două rezultate de instabilitate a aplicaţiilor armonice datorate lui Xin. Mai întâi dăm

Lema 4.2.1. *Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}, F(x) = \langle a, x\rangle$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, unde $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ este un vector nenul fixat. Notăm cu f restricţia lui F la $\mathbb{S}^m, f = F_{|\mathbb{S}^m}$. Avem*

i) $\nabla_X \operatorname{grad} f = -fX$, *oricare ar fi* $X \in C(T\mathbb{S}^m)$,

ii) $\Delta f = mf$,

iii) $\operatorname{trace} \nabla^2 \operatorname{grad} f = -\operatorname{grad} f$.

Demonstraţie. i) Fie $x_0 \in \mathbb{S}^m$ şi $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ un câmp local de repere ortonormate pe $\mathbb{S}^m$ în jurul lui x_0. Avem

$$\begin{aligned}
(\operatorname{grad} F)_{x_0} &= \sum_{\alpha=1}^{m+1} \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}(x_0) e_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m+1} a_\alpha e_\alpha = a \\
&= \sum_{i=1}^{m} (X_i(x_0)F) X_i(x_0) + (x_0 F) x_0 \\
&= (\operatorname{grad} f)_{x_0} + f(x_0) x_0,
\end{aligned}$$

unde $\{e_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,m+1}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^{m+1}$. Prin urmare $(\mathrm{grad}\, f)_{x_0} = a - f(x_0)x_0$.

Pentru $X \in C(T\mathbb{S}^m)$ şi din expresia formei a doua fundamentale a lui $\mathbb{S}^m$ în $\mathbb{R}^{m+1}$, adică

$$B_{x_0}(X,Y) = -\langle X,Y\rangle x_0, \quad \forall X,Y \in T_{x_0}\mathbb{S}^m,$$

avem

$$\begin{aligned}\nabla_X^{\mathbb{R}^{m+1}} \mathrm{grad}\, f &= \nabla_X \mathrm{grad}\, f - \langle X, \mathrm{grad}\, f\rangle x = \nabla_X \mathrm{grad}\, f - (Xf)x \\ &= \nabla_X^{\mathbb{R}^{m+1}}(a - fx) = -(Xf)x - fX,\end{aligned}$$

şi deci $\nabla_X \mathrm{grad}\, f = -fX$.

ii) Avem

$$\begin{aligned}\Delta f &= -\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, f) = -\,\mathrm{trace}\{X \to \nabla_X \mathrm{grad}\, f\} = \\ &= -\,\mathrm{trace}\{X \to -fX\} = -(-mf) \\ &= mf.\end{aligned}$$

iii) Din i) obţinem

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}\, \nabla^2 \mathrm{grad}\, f &= \sum_{i=1}^m \{\nabla_{X_i}\nabla_{X_i} \mathrm{grad}\, f - \nabla_{\nabla_{X_i}X_i} \mathrm{grad}\, f\} \\ &= \sum_{i=1}^m \{\nabla_{X_i}(-fX_i) - (-f\nabla_{X_i}X_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^m \{-(X_i f)X_i - f\nabla_{X_i}X_i + f\nabla_{X_i}X_i\} \\ &= -\sum_{i=1}^m (X_i f)X_i \\ &= -\,\mathrm{grad}\, f. \square\end{aligned}$$

Enunţăm acum

Teorema 4.2.3. (**Xin.**) *Fie $\phi : \mathbb{S}^m \to (N,h), m > 2$, o aplicaţie armonică slab stabilă. Atunci ϕ este constantă.*

Observaţia 4.2.1. Putem reformula: orice aplicaţie armonică $\phi : \mathbb{S}^m \to (N, h), m > 2$, neconstantă este instabilă.

Demonstraţie. Fie $Z = \operatorname{grad} f$, unde $f \in C^\infty(\mathbb{S}^m), f(x) = \langle a, x\rangle$, oricare ar fi $x \in \mathbb{S}^m$, iar $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ este un vector nenul fixat. Notăm $V = d\phi(Z) \in C(\phi^{-1}TN), (d\phi(Z))(p) = d\phi_p(Z_p) \in T_pN$, oricare ar fi $p \in \mathbb{S}^m$. Vom calcula $J(V)$. Mai întâi

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= -\sum_{i=1}^m \{\nabla_{X_i}\nabla_{X_i}V - \nabla_{\nabla_{X_i}X_i}V\} \\
&= -\sum_{i=1}^m \{\nabla_{X_i}\nabla_{X_i}d\phi(Z) - \nabla_{\nabla_{X_i}X_i}d\phi(Z)\} \\
&= -\sum_{i=1}^m \{\nabla_{X_i}((\nabla_{X_i}d\phi)(Z) + d\phi(\nabla_{X_i}Z)) - \nabla_{\nabla_{X_i}X_i}d\phi(Z)\} \\
&= -\sum_{i=1}^m \nabla_{X_i}((\nabla_{X_i}d\phi)(Z)) - \sum_{i=1}^m \nabla_{X_i}(d\phi(\nabla_{X_i}Z)) + \sum_{i=1}^m \nabla_{\nabla_{X_i}X_i}d\phi(Z) \\
&= -\sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i}\nabla_{X_i}d\phi)(Z) - \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i}d\phi)(\nabla_{X_i}Z) - \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i}d\phi)(\nabla_{X_i}Z) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m d\phi(\nabla_{X_i}\nabla_{X_i}Z) + \sum_{i=1}^m (\nabla_{\nabla_{X_i}X_i}d\phi)(Z) + \sum_{i=1}^m d\phi(\nabla_{\nabla_{X_i}X_i}Z) \\
&= -(\operatorname{trace}\nabla^2 d\phi)(Z) - 2\sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i}d\phi)(\nabla_{X_i}Z) - d\phi(\operatorname{trace}\nabla^2 Z).
\end{aligned}
$$

Cum ϕ este o aplicaţie armonică, rezultă că $d\phi$ este o 1-formă armonică, iar din formula lui Weitzenböck obţinem

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{trace}\nabla^2 d\phi)(Z) &= \sum_{i=1}^m R(X_i, Z)d\phi(X_i) + d\phi(\operatorname{Ricci}(Z)) \\
&= \sum_{i=1}^m R^N(d\phi(X_i), d\phi(Z))d\phi(X_i) + (m-1)d\phi(Z) \\
&= \operatorname{trace} R^N(d\phi\cdot, V)d\phi\, \cdot + (m-1)V.
\end{aligned}
$$

Înlocuind în expresia operatorului Jacobi $J(V)$ obţinem

$$\begin{aligned}
J(V) &= \Delta V + \operatorname{trace} R^N(d\phi\cdot, V)d\phi\,\cdot \\
&= -\operatorname{trace} R^N(d\phi\cdot, V)d\phi\cdot - (m-1)V - 2\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{X_i} d\phi)(\nabla_{X_i} Z) \\
&\quad -d\phi(\operatorname{trace}\nabla^2 Z) + \operatorname{trace} R^N(d\phi\cdot, V)d\phi\,\cdot \\
&= -(m-1)V + 2f\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{X_i} d\phi)(X_i) + V = (2-m)V + 2f\tau(\phi) \\
&= (2-m)V.
\end{aligned}$$

Cum aplicaţia ϕ este slab stabilă:

$$\begin{aligned}
(J(V), V) &= \int_M \langle J(V), V\rangle\, \overline{v}_g \geq 0 \\
&= (2-m)\int_M |V|^2\, \overline{v}_g.
\end{aligned}$$

Dar $2 - m < 0$, deci rezultă $V = 0$, adică $d\phi(Z) = 0$. Vom demonstra acum că $d\phi(Z) = 0$, oricare ar fi $Z = \operatorname{grad} f, f(x) = \langle a, x\rangle$, implică $d\phi = 0$, adică ϕ este aplicaţia constantă. Într-adevăr, fie $x_0 \in \mathbb{S}^m$ fixat arbitrar şi $\{a_1, \ldots, a_m\}$ o bază ortonormată în $T_{x_0}\mathbb{S}^m$. Privim $a_1, \ldots, a_m$ ca vectori în $\mathbb{R}^{m+1}$ şi considerăm $Z_i = \operatorname{grad} f_i = a_i - f_i x \in C(T\mathbb{S}^m), i = 1, \ldots, m$. Avem

$$Z_i(x_0) = a_i - f_i(x_0)x_0 = a_i - \langle a_i, x_0\rangle x_0 = a_i \in T_{x_0}\mathbb{S}^m,$$

oricare ar fi $i = 1, \ldots, m$, deci $\{Z_i(x_0)\}_{i=1,\ldots,m}$ este o bază ortonormată în $T_{x_0}\mathbb{S}^m$. Cum $d\phi(Z_i) = 0$ rezultă $d\phi_{x_0}(Z_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, şi deci $d\phi_{x_0} = 0$. Cum $x_0 \in \mathbb{S}^m$ a fost fixat arbitrar rezultă $d\phi = 0$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Teorema 4.2.4. (**Xin.**) *Fie $\phi : (M, g) \to \mathbb{S}^n, n > 2$, armonică şi presupunem că M este compactă. Dacă ϕ este slab stabilă atunci ϕ este constantă.*

Demonstraţie. Fie $Z = \operatorname{grad} f$, unde $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n), f(x) = \langle a, x\rangle$, oricare ar fi $x \in \mathbb{S}^n$, iar $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ este un vector nenul fixat. Fie $V = Z \circ \phi \in$

$C(\phi^{-1}T\mathbb{S}^n)$. Avem

$$\begin{aligned} J(V) &= \Delta V + \operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi\cdot, V)d\phi\cdot \\ &= \Delta V + \sum_{i=1}^{m}(\langle d\phi(X_i), V\rangle d\phi(X_i) - \langle d\phi(X_i), d\phi(X_i)\rangle V) \\ &= \Delta V - 2e(\phi)V + \sum_{i=1}^{m}\langle d\phi(X_i), V\rangle d\phi(X_i), \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} (J(V), V) &= \int_M \langle J(V), V\rangle\, \overline{v}_g \\ &= \int_M \left\{\langle \Delta V, V\rangle - 2e(\phi)|V|^2 + \sum_i (\langle d\phi(X_i), V\rangle)^2\right\} \overline{v}_g \\ &= \int_M \left\{|\nabla V|^2 - 2e(\phi)|V|^2 + \sum_i (\langle d\phi(X_i), V\rangle)^2\right\} \overline{v}_g. \end{aligned}$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} |\nabla V|^2 &= \sum_i \langle \nabla_{X_i}V, \nabla_{X_i}V\rangle = \sum_i \langle \nabla_{d\phi(X_i)}Z, \nabla_{d\phi(X_i)}Z\rangle \\ &= \sum_i (f\circ\phi)^2\langle d\phi(X_i), d\phi(X_i)\rangle \\ &= 2(f\circ\phi)^2 e(\phi), \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} |V(p)|^2 &= |Z(\phi(p))|^2 = |a - f(\phi(p))\phi(p)|^2 \\ &= |a|^2 + f^2(\phi(p)) - 2\langle a, \phi(p)\rangle f(\phi(p)) \\ &= |a|^2 - f^2(\phi(p)). \end{aligned}$$

Deci

$$(J(V), V) = \int_M \left\{2e(\phi)(2f^2\circ\phi - |a|^2) + \sum_i (\langle d\phi(X_i), V\rangle)^2\right\} \overline{v}_g.$$

Fie acum $\{a_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n+1}$ o bază ortonormată în $\mathbb{R}^{n+1}$. Considerăm

$$Z_\alpha = \operatorname{grad} f_\alpha = a_\alpha - f_\alpha x$$

şi $V_\alpha = Z_\alpha \circ \phi$. Deoarece ϕ este slab stabilă avem

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n+1}(J(V_\alpha), V_\alpha) &= \int_M \left\{ 2e(\phi)\sum_\alpha (2f_\alpha^2 \circ \phi - |a_\alpha|^2) + \sum_{i,\alpha}(\langle d\phi(X_i), V_\alpha\rangle)^2 \right\} \overline{v}_g \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Dar

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1}(f_\alpha^2 \circ \phi)(p) = \sum_\alpha (\langle a_\alpha, \phi(p)\rangle)^2 = |\phi(p)|^2 = 1, \quad \sum_\alpha |a_\alpha|^2 = n+1,$$

iar

$$\begin{aligned}\sum_{i,\alpha}(\langle d\phi(X_i), V_\alpha\rangle) &= \sum_{i,\alpha}(\langle d\phi(X_i), a_\alpha - (f_\alpha \circ \phi)\phi\rangle)^2 = \sum_{i,\alpha}(\langle d\phi(X_i), a_\alpha\rangle)^2 \\ &= \sum_i |d\phi(X_i)|^2 = 2e(\phi).\end{aligned}$$

Înlocuind, obţinem:

$$\begin{aligned}\sum_\alpha (J(V_\alpha), V_\alpha) &= \int_M \{2e(\phi)(2-n-1) + 2e(\phi)\}\,\overline{v}_g = 2(2-n)\int_M e(\phi)\,\overline{v}_g \\ &\geq 0\end{aligned}$$

şi deci $e(\phi) = 0$, adică ϕ este constantă. $\square$

Propoziţia 4.2.5. *Fie $\phi : (M, g) \to \mathbb{S}^n$ o imersie riemanniană minimală. Dacă aplicaţia identitate $\mathbf{1} : (M, g) \to (M, g)$ este slab stabilă, atunci*

$$(J^\phi(d\phi(X)), d\phi(X)) \geq 0, \quad \forall X \in C(TM).$$

Demonstraţie. Considerăm $V = d\phi(X) \in C(\phi^{-1}T\mathbb{S}^n)$, unde $X \in C(TM)$. Avem

$$\begin{aligned}
J^{\phi}(d\phi(X)) &= \Delta(d\phi(X)) + \operatorname{trace} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi\cdot, d\phi(X))d\phi\,\cdot \\
&= \Delta(d\phi(X)) + \sum_{i=1}^{m}\{\langle d\phi(X_i), d\phi(X)\rangle d\phi(X_i) \\
&\quad -\langle d\phi(X_i), d\phi(X_i)\rangle d\phi(X)\} \\
&= \Delta(d\phi(X)) + (1-m)d\phi(X).
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Vom evalua $\Delta(d\phi(X))$. Fie $p \in M$ fixat arbitrar şi $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ o bază geodezică în jurul său. Avem în p

$$\Delta(d\phi(X)) = -\sum_{i=1}^{m} \nabla_{X_i}\nabla_{X_i} d\phi(X). \tag{4.2.5}$$

Mai întâi calculăm $\nabla_{X_i} d\phi(X)$

$$\nabla_{X_i} d\phi(X) = (\nabla_{X_i} d\phi)(X) + d\phi(\nabla_{X_i} X) = (\nabla d\phi)(X_i, X) + d\phi(\nabla_{X_i} X),$$

deci

$$\nabla_{X_i}\nabla_{X_i} d\phi(X) = \nabla_{X_i}((\nabla d\phi)(X_i, X)) + \nabla_{X_i} d\phi(\nabla_{X_i} X). \tag{4.2.6}$$

Mai departe

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_i}((\nabla d\phi)(X_i, X)) &= \nabla_{X_i}((\nabla d\phi)(X, X_i)) \\
&= \nabla_{X_i}(\nabla_X d\phi(X_i) - d\phi(\nabla_X X_i)) \\
&= \nabla_{X_i}\nabla_X d\phi(X_i) - \nabla_{X_i} d\phi(\nabla_X X_i) \\
&= \nabla_X\nabla_{X_i} d\phi(X_i) + \nabla_{[X_i, X]} d\phi(X_i) \\
&\quad + R(X_i, X) d\phi(X_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad -(\nabla d\phi)(X_i, \nabla_X X_i) - d\phi(\nabla_{X_i}\nabla_X X_i) \\
&= \nabla_X \nabla_{X_i} d\phi(X_i) + \nabla_{[X_i,X]} d\phi(X_i) + R(X_i, X) d\phi(X_i) - \\
&\quad -d\phi(\nabla_X \nabla_{X_i} X_i + \nabla_{[X_i,X]} X_i + R(X_i, X) X_i) \\
&= \nabla_X \nabla_{X_i} d\phi(X_i) + \nabla_{[X_i,X]} d\phi(X_i) + R(X_i, X) d\phi(X_i) \\
&\quad +(\nabla d\phi)(X, \nabla_{X_i} X_i) - \nabla_X d\phi(\nabla_{X_i} X_i) \\
&\quad -d\phi(\nabla_{[X_i,X]} X_i) - d\phi(R(X_i, X) X_i) \\
&= \nabla_X (\nabla_{X_i} d\phi(X_i) - d\phi(\nabla_{X_i} X_i)) + (\nabla d\phi)([X_i, X], X_i) \\
&\quad +R(X_i, X) d\phi(X_i) - d\phi(R(X_i, X) X_i) \\
&= \nabla_X ((\nabla d\phi)(X_i, X_i)) + (\nabla d\phi)([X_i, X], X_i) \\
&\quad +R(X_i, X) d\phi(X_i) - d\phi(R(X_i, X) X_i).
\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} R(X_i, X) d\phi(X_i) &= \sum_{i=1}^{m} R^{\mathbb{S}^n}(d\phi(X_i), d\phi(X)) d\phi(X_i) = \\
&= (1-m) d\phi(X),
\end{aligned}$$

iar

$$\sum_{i=1}^{m} d\phi(R(X_i, X) X_i) = -d\phi(\mathrm{Ricci}(X)).$$

Înlocuind obţinem

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \nabla_{X_i}((\nabla d\phi)(X_i, X)) &= \nabla_X \tau(\phi) + \sum_{i=1}^{m} (\nabla d\phi)([X_i, X], X_i) + \\
&\quad +(1-m) d\phi(X) + d\phi(\mathrm{Ricci}(X)). \qquad (4.2.7)
\end{aligned}$$

Al doilea membru al termenului din dreapta din egalitatea (4.2.6) se exprimă astfel

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \nabla_{X_i} d\phi(\nabla_{X_i} X) &= \sum_{i=1}^{m} \{(\nabla d\phi)(X_i, \nabla_{X_i} X) + d\phi(\nabla_{X_i} \nabla_{X_i} X)\} \\
&= d\phi(\mathrm{trace}\, \nabla^2 X) + \sum_{i=1}^{m} (\nabla d\phi)(X_i, \nabla_{X_i} X). \qquad (4.2.8)
\end{aligned}$$

Din (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7) şi (4.2.8) obţinem

$$\begin{aligned}\Delta(d\phi(X)) &= -\left(\sum_{i=1}^{m}(\nabla d\phi)([X_i,X],X_i)+(1-m)d\phi(X)+d\phi(\mathrm{Ricci}(X)\right)\\ &\quad -d\phi(\mathrm{trace}\ \nabla^2 X)-\sum_{i=1}^{m}(\nabla d\phi)(X_i,\nabla_{X_i}X).\end{aligned}$$

Cum, în p, $[X_i,X]=\nabla_{X_i}X-\nabla_X X_i=\nabla_{X_i}X$,

$$\Delta(d\phi(X))=-2\sum_{i=1}^{m}(\nabla d\phi)(\nabla_{X_i}X,X_i)+d\phi((m-1)X-\mathrm{Ricci}(X)-\mathrm{trace}\,\nabla^2X).$$

Înlocuind în (4.2.4) obţinem

$$J^{\phi}(d\phi(X))=-2\,\mathrm{trace}(\nabla d\phi)(\nabla_{\cdot}X,\cdot)+d\phi(-\,\mathrm{trace}\,\nabla^2X-\mathrm{Ricci}(X))$$

şi deci

$$\begin{aligned}\langle J^{\phi}(d\phi(X)),d\phi(X)\rangle &= \langle -\,\mathrm{trace}\,\nabla^2X-\mathrm{Ricci}(X),X\rangle\\ &= \langle J^{\mathbf{1}}(X),X\rangle.\end{aligned}$$

Cu aceasta demonstraţia se încheie. □

4.2.1 Stabilitatea aplicaţiilor olomorfe

În cele ce urmează vom prezenta, fără demonstraţie, un rezultat al lui Lichnerowicz.

Teorema 4.2.5. *Fie (M,J,g) şi $(N,\widetilde{J},h)$ două varietăţi kähleriene compacte şi $\phi:M\to N$ o aplicaţie olomorfă. Avem*

i) *aplicaţia olomorfă ϕ minimizează energia E în clasa sa de omotopie,*

ii) *dacă $\{\phi_t\}_t$ este o variaţie a lui ϕ prin aplicaţii armonice atunci ϕ_t este olomorfă oricare ar fi t.*

O variantă a rezultatului de mai sus este

Teorema 4.2.6. *Fie (M, J, g) şi $(N, \widetilde{J}, h)$ două varietăţi kähleriene compacte şi $\phi : M \to N$ o aplicaţie olomorfă. Atunci*

$$\int_M \langle J^\phi(V), V\rangle \, \overline{v}_g = \frac{1}{2} \int_M \langle DV, DV\rangle \, \overline{v}_g, \quad \forall V \in C(\phi^{-1}TN),$$

unde J^ϕ este operatorul Jacobi asociat lui ϕ, iar $DV \in C(T^*M \otimes \phi^{-1}TN)$ este definit prin $DV(X) = \nabla_{JX}V - \widetilde{J}\nabla_X V$, oricare ar fi $X \in C(TM)$. În particular avem

i) *ϕ este slab stabilă,*

ii) $\ker(J^\phi) = \{V \in C(\phi^{-1}TN) : DV = 0\}$.

Definiţia 4.2.4. O secţiune $V \in C(\phi^{-1}TN)$ ce satisface $DV = 0$ se numeşte *câmp vectorial analitic în lungul lui ϕ.*

Totalitatea câmpurilor vectoriale analitice în lungul lui ϕ o notăm cu $\omega(\phi^{-1}TN)$. Avem un mod alternativ de a prezenta $\omega(\phi^{-1}TN)$. Mai întâi reamintim că

Definiţia 4.2.5. Fie E şi M varietăţi diferenţiabile reale şi $\pi : E \to M$ o aplicaţie netedă surjectivă. $\xi = (E, \pi, M)$ se numeşte *fibrat vectorial complex* dacă sunt satisfăcute condiţiile

i) oricare ar fi $p \in M, \pi^{-1}(p)$ admite o structură de spaţiu vectorial complex de dimensiune r,

ii) oricare ar fi $p \in M$, există U deschisă în $M, p \in U$, şi există $h : U \times \mathbb{C}^r \to \pi^{-1}(U)$ un difeomorfism astfel încât $\pi(h(q, w)) = q$, oricare ar fi $(q, w) \in U \times \mathbb{C}^r$ şi

$$h_q : \mathbb{C}^r \to \pi^{-1}(q), \quad h_q(w) = h(q, w)$$

este un izomorfism complex.

Dacă, în plus, E şi M sunt varietăţi complexe, $\pi : E \to M$ este olomorfă, iar $h : U \times \mathbb{C}^r \to \pi^{-1}(U)$ este de asemenea olomorfă, atunci E se numeşte *fibrat vectorial olomorf.*

Definiţia 4.2.6. O secţiune netedă σ într-un fibrat vectorial olomorf $\xi = (E, \pi, M)$ se numeşte *olomorfă* dacă $\sigma : M \to E$ este o aplicaţie olomorfă.

Totalitatea secţiunilor olomorfe într-un fibrat vectorial olomorf E o notăm cu $\Omega^0(E)$.

Pentru a obţine un exemplu de fibrat vectorial complex, considerăm (M, J) o varietate aproape complexă. Atunci $T^{1,0}M = \bigcup_p T_p^{1,0}M$ este un fibrat vectorial complex. Dacă M este o varietate complexă, atunci $T^{1,0}M$ este un fibrat vectorial olomorf, numit *fibratul tangent olomorf.* Presupunem că M este o varietate complexă şi $(U; z^1, \dots, z^m)$ este o hartă locală complexă pe M. Atunci $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^m}\}$ este un câmp local de baze în $T^{1,0}M$, iar câmpul vectorial

$$Z = \sum_{i=1}^{m} f^i \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad f^i \in C^\infty(U; \mathbb{C}),$$

este olomorf dacă $f^i = f^i(z^1, \dots, z^m)$ este funcţie olomorfă, oricare ar fi $i = 1, \dots, m$.

Fie $\phi : M \to N$ o aplicaţie olomorfă între două varietăţi complexe. Dacă E este un fibrat vectorial olomorf peste N, atunci fibratul indus $\phi^{-1}E$ este un fibrat vectorial olomorf peste M. În particular, fibratul indus al fibratului tangent olomorf $T^{1,0}N$ prin ϕ este un fibrat vectorial olomorf peste M. Totalitatea secţiunilor olomorfe în $\phi^{-1}T^{1,0}N$ o notăm cu $\Omega^0(\phi^{-1}T^{1,0}N)$, iar o astfel de secţiune o numim *câmp vectorial olomorf în lungul lui ϕ.*

Dăm fără demonstraţie

Propoziţia 4.2.6. *Fie (M, J, g) şi $(N, \widetilde{J}, h)$ două varietăţi kähleriene şi fie $\phi : M \to N$ o aplicaţie olomorfă. Atunci $\omega(\phi^{-1}TN)$ este izomorf cu $\Omega^0(\phi^{-1}T^{1,0}N)$, iar corespondenţa este dată de*

$$V \mapsto \widetilde{V} = \frac{1}{2}(V - i\widetilde{J}V).$$

Corolarul 4.2.1. *Fie (M, J, g) şi $(N, \widetilde{J}, h)$ două varietăţi kähleriene şi $\phi : M \to N$ olomorfă. Atunci*

$$\ker J^\phi = \omega(\phi^{-1}TN) \cong \Omega^0(\phi^{-1}T^{1,0}N).$$

Corolarul 4.2.2. *Aplicaţia identitate a unei varietăţi kähleriene compacte* $\mathbf{1} : (M, J, g) \to (M, J, g)$ *este slab stabilă şi*

$$\ker J^{\mathbf{1}} = \Omega^0(M),$$

unde $\Omega^0(M)$ *reprezintă spaţiul tuturor câmpurilor vectoriale olomorfe pe* M.

4.3. Submersii riemanniene armonice

Fie (M, g) şi (N, h) două varietăţi riemanniene şi $\pi : M \to N$ o submersie surjectivă, adică pentru orice $p \in M$ aplicaţia liniară tangentă $d\pi_p : T_pM \to T_{\pi(p)}N$ este un epimorfism. În acest caz, fibratul tangent TM se descompune în mod canonic sub forma

$$TM = T^V M \oplus T^H M, \tag{4.3.1}$$

unde $T^V M = \bigcup_{p \in M} T_p^V M, T_p^V M = \ker d\pi_p$, iar $T_p^H M$ este complementul ortogonal al lui $T_p^V M$ în T_pM în raport cu produsul scalar $g(p)$.

Definiţia 4.3.1. Spunem că $\pi : (M, g) \to (N, h)$ este o *submersie riemanniană* dacă, pentru orice $p \in M$, restricţia $d\pi(p) : T_p^H M \to T_{\pi(p)}N$ este o izometrie.

Fie $\pi : (M, g) \to (N, h)$ o submersie riemanniană. Un câmp vectorial X pe M se numeşte *bazic* dacă X este *orizontal*, adică $X(p) \in T_p^H M$, oricare ar fi $p \in M$, şi există $X_* \in C(TN)$ astfel încât $d\pi_p X(p) = X_*(\pi(p))$, pentru orice $p \in M$.

Fie X_* un câmp vectorial pe N. Cum $\pi : (M, g) \to (N, h)$ este o submersie riemanniană, în orice punct $p \in M$ există un unic vector $X(p) \in T_p^H M$ astfel încât $d\pi(p)X(p) = X_*(\pi(p))$. Lăsând punctul p liber obţinem $X \in C(TM)$. Câmpul vectorial X se numeşte liftul orizontal al lui X_* şi se notează X_*^H. Aplicaţia $X_* \to X_*^H$ realizează o bijecţie de la mulţimea câmpurilor vectoriale pe N la mulţimea câmpurilor vectoriale bazice pe M.

Pentru un câmp vectorial $X \in C(TM)$ arbitrar, ţinând cont de (4.3.1), avem descompunerea

$$X = X_V + X_H, \tag{4.3.2}$$

unde $X_V \in C(T^V M)$ şi $X_H \in C(T^H M)$.

Printr-un calcul direct se obţine următoarea propoziţie

Propoziţia 4.3.1. *Dacă $X, Y \in C(TM)$ sunt bazice, atunci*

i) $g(X,Y) = h(X_*, Y_*) \circ \pi$,

ii) $[X,Y]_H = [X_*, Y_*]^H$,

iii) $(\nabla_X Y)_H = (\nabla^N_{X_*} Y_*)^H$,

unde $X = X_*^H$ şi $Y = Y_*^H$.

Forma a doua fundamentală a unei submersii riemenniene are următoarele proprietăţi

Propoziţia 4.3.2. *Fie $\pi : (M,g) \to (N,h)$ o submersie riemanniană. Atunci*

i) $\nabla d\pi_{|T^H M \times T^H M} = 0$,

ii) $\nabla d\pi_{|T^V M \times T^V M} = 0$ *dacă şi numai dacă fibrele sunt subvarietăţi total geodezice,*

iii) $\nabla d\pi_{|T^H M \times T^V M} = 0$ *dacă şi numai dacă distribuţia orizontală $T^H M$ este integrabilă.*

Demonstraţie. Reamintim că dacă $\phi : (M,g) \to (N,h)$ este o aplicaţie netedă arbitrară, iar $X, Y \in C(TM)$ sunt ϕ-corelate cu $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in C(TN)$, adică $d\phi_p X(p) = \widetilde{X}(\phi(p))$ şi $d\phi_p Y(p) = \widetilde{Y}(\phi(p))$, oricare ar fi $p \in M$, atunci

$$(\nabla d\phi)_p(X,Y) = (\nabla^N_{\widetilde{X}} \widetilde{Y})_{\phi(p)} - d\phi_p(\nabla_X Y).$$

Pentru a demonstra i), considerăm $X_p, Y_p \in T_p^H M$ şi le extindem la câmpuri vectoriale bazice pe tot M (o modalitate de a realiza acest lucru este următoarea: considerăm vectorul $X_{*\pi(p)} = d\pi_p X_p \in T_{\pi(p)} N$ şi-l extindem la un câmp vectorial X_* definit pe N; apoi considerăm $X_*^H = X$ care este un câmp vectorial bazic pe M ce prelungeşte X_p). Ţinând cont de propoziţia anterioară obţinem

$$\begin{aligned}(\nabla d\pi)_p(X_p, Y_p) &= ((\nabla d\pi)(X,Y))_p = (\nabla^N_{X_*} Y_*)_{\pi(p)} - d\pi_p(\nabla_X Y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

ii) Fie $p \in M$ fixat arbitrar şi notăm cu $\boldsymbol{i}_p : \pi^{-1}(\pi(p)) \to M$ incluziunea canonică a fibrei prin p. Fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$ este o subvarietate a lui M şi pe ea considerăm metrica indusă. Cum $\pi \circ \boldsymbol{i}_p$ este o aplicaţie constantă, obţinem

$$0 = \nabla d(\pi \circ \boldsymbol{i}_p) = d\pi(\nabla d\boldsymbol{i}_p) + (\nabla d\pi)(d\boldsymbol{i}_p, d\boldsymbol{i}_p)$$

şi deci, pentru $q \in \pi^{-1}(\pi(p))$ şi $X_q, Y_q \in T_q^V M = T_q\pi^{-1}(\pi(p))$, avem

$$(\nabla d\pi)_q(X_q, Y_q) = -d\pi_q((\nabla d\boldsymbol{i}_p)_q(X_q, Y_q)).$$

Dar $(\nabla di_p)_q(X_q, Y_q) \in T_q^H M$ şi prin urmare $(\nabla d\pi)_q(X_q, Y_q) = 0$ dacă şi numai dacă $(\nabla di_p)_q(X_q, Y_q) = 0$.

Pentru a demonstra iii), considerăm mai întâi $X, Y, Z \in C(TM)$ arbitrare. Cum X_V este π-corelat cu 0, avem

$$\begin{aligned}(\nabla d\pi)_p(X_V, Y_H) &= (\nabla d\pi)_p(Y_H, X_V)\\ &= \nabla^N_{d\pi_p(Y_H(p))}0 - d\pi_p(\nabla_{Y_H} X_V)\\ &= -d\pi_p(\nabla_{Y_H} X_V) = -d\pi_p((\nabla_{Y_H} X_V)_H).\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}\langle(\nabla_{Y_H} X_V)_H, Z\rangle &= \langle(\nabla_{Y_H} X_V)_H, Z_H\rangle = \langle\nabla_{Y_H} X_V, Z_H\rangle\\ &= -\langle X_V, \nabla_{Y_H} Z_H\rangle = -\langle X_V, (\nabla_{Y_H} Z_H)_V\rangle\\ &= -\langle X, (\nabla_{Y_H} Z_H)_V\rangle.\end{aligned}$$

Prin urmare $(\nabla_{Y_H} X_V)_H = 0$, oricare ar fi $X, Y \in C(TM)$ dacă şi numai dacă $(\nabla_{Y_H} Z_H)_V = 0$ oricare ar fi $Y, Z \in C(TM)$.

Presupunem acum că $\nabla d\pi_{|T^V M \times T^H M} = 0$. Atunci $(\nabla_{Y_H} X_V)_H = 0$, oricare ar fi $X, Y \in C(TM)$ şi deci $(\nabla_{X_H} Y_H)_V = 0$, oricare ar fi $X, Y \in C(TM)$. Prin urmare

$$[X_H, Y_H]_V = (\nabla_{X_H} Y_H - \nabla_{Y_H} X_H)_V = 0$$

oricare ar fi $X, Y \in C(TM)$ şi deci distribuţia orizontală este integrabilă. Reciproc, presupunem că distribuţia orizontală este integrabilă, adică $[X_H, Y_H]_V = 0$, oricare ar fi $X, Y \in C(TM)$. Din formula lui O′Neill

$$\nabla_{X_H} Y_H = (\nabla_{X_H} Y_H)_H + \frac{1}{2}[X_H, Y_H]_V, \quad \forall X, Y \in C(TM),$$

rezultă $\nabla_{X_H} Y_H = (\nabla_{X_H} Y_H)_H$, adică $(\nabla_{X_H} Y_H)_V = 0$, oricare ar fi $X, Y \in C(TM)$, şi deci $\nabla d\pi_{|T^V M \times T^H M} = 0$. $\square$

Fie $\pi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ o submersie riemanniană şi $p \in M$ fixat arbitrar. În T_pM putem considera o bază ortonormată $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ astfel încât $\{X_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,n}$ este o bază în $T_p^H M$, iar $\{X_a\}_{a=n+1,\ldots,m}$ este o bază în $T_p^V M$. Vom spune că $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ este o *bază adaptată.*

Teorema 4.3.1. *O submersie riemanniană $\pi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ are densitatea de energie constantă şi este armonică dacă şi numai dacă toate fibrele ei sunt subvarietăţi minimale ale lui (M, g).*

Demonstraţie. Fie $p \in M$ fixat arbitrar şi $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ o bază adaptată în T_pM. Avem

$$\begin{aligned} e(\pi)(p) &= \frac{1}{2}|d\pi|^2 = \frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n} |d\pi_p(X_i)|^2 + \sum_{a=n+1}^{m} |d\pi_p(X_a)|^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} |d\pi_p(X_i)|^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} |X_i|^2 = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Cum $p \in M$ a fost fixat arbitrar rezultă $e(\pi) = \frac{n}{2}$.

Pentru partea a doua, considerăm din nou $p \in M$ fixat arbitrar şi $\boldsymbol{i}_p : \pi^{-1}(\pi(p)) \to M$ incluziunea canonică a fibrei prin p. Fie $q \in \pi^{-1}(\pi(p))$ şi $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ o bază adaptată în T_qM. Avem

$$\begin{aligned} \tau(\pi)_q &= \sum_{\alpha=1}^{n} (\nabla d\pi)_q(X_\alpha, X_\alpha) + \sum_{a=n+1}^{m} (\nabla d\pi)_q(X_a, X_a) \\ &= \sum_{a=n+1}^{m} (\nabla d\pi)_q(X_a, X_a) = -\sum_{a=n+1}^{m} d\pi_q((\nabla d\boldsymbol{i}_p)_q(X_a, X_a)) \\ &= -d\pi_q(\tau(\boldsymbol{i}_p)_q). \end{aligned}$$

Cum $\tau(\boldsymbol{i}_p)_q \in T_q^H M$, concluzia rezultă imediat. $\square$

Propoziţia 4.3.3. *Fie $\pi : M \to N$ o submersie riemanniană şi $\psi : N \to P$ o aplicaţie arbitrară. Atunci $e(\psi \circ \pi) = e(\psi) \circ \pi$ şi*

$$\tau(\psi \circ \pi) = d\psi(\tau(\pi)) + \tau(\psi) \circ \pi.$$

În particular, dacă π este armonică atunci $\psi\circ\pi$ este armonică dacă şi numai dacă ψ este armonică.

Demonstraţie. Fie $p \in M$ fixat arbitrar şi $\{X_i\}_{i=1,\ldots,m}$ o bază adaptată în T_pM. Avem

$$\begin{aligned} e(\psi\circ\pi)_p &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|d\psi_{\pi(p)}(d\pi_p(X_i))|^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}|d\psi_{\pi(p)}(d\pi_p(X_\alpha))|^2 \\ &= e(\psi)_{\pi(p)}. \end{aligned}$$

Mai departe, din formula câmpului de tensiune pentru compunerea a două aplicaţii obţinem

$$\begin{aligned} \tau(\psi\circ\pi)_p &= d\psi_{\pi(p)}(\tau(\pi)_p) + \sum_{i=1}^{m}(\nabla d\psi)_{\pi(p)}(d\pi_p(X_i), d\pi_p(X_i)) \\ &= d\psi_{\pi(p)}(\tau(\pi)_p) + \sum_{\alpha=1}^{n}(\nabla d\psi)_{\pi(p)}(d\pi_p(X_\alpha), d\pi_p(X_\alpha)) \\ &= d\psi_{\pi(p)}(\tau(\pi)_p) + \tau(\psi)_{\pi(p)}. \end{aligned}$$

Cum π este şi surjecţie, ultima parte a Propoziţiei rezultă imediat. $\Box$

Exemplul 4.3.1. Aplicaţia Hopf $\pi : \mathbb{S}^3 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 : |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\} \to \mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ dată de

$$\pi(z^1, z^2) = \frac{1}{2}(2z^1\overline{z}^2, |z^1|^2 - |z^2|^2)$$

este o submersie riemanniană armonică.

Exemplul 4.3.2. Spaţiul proiectiv complex $P^m(\mathbb{C})$ poate fi privit şi ca $\mathbb{S}^{2m+1}$ factorizat prin relaţia de echivalenţă: $\xi \sim \eta$ dacă şi numai dacă $\xi = \lambda\eta$, unde $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{2m+1}$, iar $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Proiecţia canonică $\pi : \mathbb{S}^{2m+1} \to P^m(\mathbb{C})$ este o submersie riemanniană armonică, unde pe $\mathbb{S}^{2m+1}$ am considerat metrica uzuală, iar pe $P^m(\mathbb{C})$ metrica Fubini-Study.

4.4. Suprafeţe minimale în $\mathbb{R}^3$

4.4.1 Reprezentarea Weierstrass pentru suprafeţe minimale în $\mathbb{R}^3$

Vom începe prin a prezenta câteva noţiuni şi rezultate generale despre suprafeţele minimale în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$. Mai întâi reamintim

Teorema 4.4.1. *Fie (M^2, g) o varietate riemanniană de dimensiune 2. Atunci orice punct $p \in M$ admite o hartă locală $(U; \varphi) = (U; x, y)$ astfel încât*

$$g = 2\lambda(dx^2 + dy^2),$$

unde $\lambda \in C^\infty(U)$ şi $\lambda(q) > 0, \forall q \in U$.

O astfel de hartă locală se numeşte *hartă locală izotermă*, iar x şi y se numesc *coordonate izoterme*.

Dacă (M^2, g) este o varietate riemanniană 2-dimensională şi orientată atunci ea se poate organiza ca varietate complexă 1-dimensională: dacă $(U; \varphi) = (U; x, y)$ este o hartă locală izotermă orientată pozitiv, atunci $(U; z = x+iy)$ devine hartă locală complexă pe M. O varietate riemanniană 2-dimensională şi orientată se numeşte *suprafaţă Riemann.*

Dacă (M^2, g) este o suprafaţă Riemann şi $z = x + iy$ este o coordonată locală complexă, atunci, cu notaţiile obişnuite, avem

$$\Delta f = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = -\frac{2}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}},$$

adică $\Delta = -\frac{2}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$. De aici rezultă imediat

Propoziţia 4.4.1. *Fie (M^2, g) o suprafaţă Riemann şi $\phi : (M^2, g) \to \mathbb{R}^n$ o imersie riemanniană. Atunci ϕ este minimală dacă şi numai dacă*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

Observaţia 4.4.1. Dacă schimbăm conform metrica g, atunci structura complexă a lui M nu se modifică iar aplicaţia ϕ rămâne armonică.

Definiţia 4.4.1. Fie M o suprafaţă Riemann şi $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie netedă. Spunem că ϕ este *conformă* dacă pentru orice coordonată locală complexă $z = x + iy$ avem

$$\left| d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right| = \left| d\phi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right| > 0 \quad \text{şi} \quad \left\langle d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\rangle = 0.$$

Fie M o suprafaţă Riemann şi $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie conformă. Se verifică imediat că ϕ este imersie iar metrica indusă de ϕ pe M este conformă cu metrica care a dat structura complexă pe M.

Definiţia 4.4.2. Fie M o suprafaţă Riemann. O aplicaţie $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ se numeşte *suprafaţă minimală* în $\mathbb{R}^n$ dacă ϕ este conformă şi

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

Considerăm acum D un deschis din planul complex $\mathbb{C}$ şi notăm cu z coordonata complexă uzuală. Evident, D poate fi gândit ca o suprafaţă Riemann. Fie $\phi : D \to \mathbb{R}^n$ o suprafaţă minimală. Definim $\psi : D \to \mathbb{C}^n$ prin

$$\psi(z) = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y}\right), \quad z = x + iy \in D.$$

Teorema 4.4.2. *Fie $\phi : D \to \mathbb{R}^n$ o suprafaţă minimală şi $\psi : D \to \mathbb{C}^n$ aplicaţia asociată. Avem următoarele*

i) *aplicaţia ψ este olomorfă, adică ψ^i este olomorfă oricare ar fi $i = 1, \dots, n$, unde $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$,*

ii) $\sum_{k=1}^{n} (\psi^k) = 0$,

iii) $\sum_{k=1}^{n} |\psi^k|^2 = f > 0$.

Reciproc, dacă D este un deschis din $\mathbb{C}$, conex şi simplu conex, iar $\psi : D \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie cu proprietăţile i)-iii)*, atunci $\phi : D \to \mathbb{R}^n$ definită prin*

$$\phi^k(z) = \Re e\left\{\int_{z_0}^{z} \psi^k(\xi) d\xi\right\} + c^k, \quad k = 1, \dots, n,$$

unde $z_0 \in D$ este un punct fixat iar c^k sunt constante reale, este o suprafaţă minimală. Mai mult, $\psi = 2\frac{\partial \phi}{\partial z}$.

Demonstraţie. Punctul i) rezultă imediat deoarece, cum ϕ este minimală,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z} \partial z} = 0.$$

Din $\psi^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi^k}{\partial x} - i\frac{\partial \phi^k}{\partial y}\right)$ şi din proprietatea lui ϕ de a fi conformă avem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(\psi^k)^2 &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \phi^k}{\partial x} - i\frac{\partial \phi^k}{\partial y}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \phi^k}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \phi^k}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \phi^k}{\partial x}\frac{\partial \phi^k}{\partial y} \\
&= \frac{1}{4}\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|^2 - \frac{1}{4}\left|\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|^2 - \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pentru iii) avem

$$\sum_{k=1}^{n}|\psi^k|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial \phi^k}{\partial x} - i\frac{\partial \phi^k}{\partial y}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|^2 > 0.$$

Pentru a demonstra reciproca, reamintim mai întâi următorul rezultat din teoria funcţiilor complexe

Teorema 4.4.3. *Fie D un deschis conex şi simplu conex din $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, şi $f \in D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Atunci f admite primitive pe D, iar primitiva F care se anulează în z_0 este dată de*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi.$$

Cum D este simplu conex, integrala de mai dus este bine definită, adică nu depinde de drumul ales în D pentru a uni z_0 cu z.

Revenind la problema noastră,

$$F^k(z) = \int_{z_0}^{z} \psi^k(\xi)d\xi, \quad k = 1, \ldots, n,$$

este bine definită şi reprezintă primitiva lui ψ^k care se anulează în z_0. Dar

$$F^k(z) = \Re\text{e } F^k(z) + i\Im\text{m } F^k(z) = \phi^k(z) + i\eta^k(z)$$

şi deci

$$\frac{\partial F^k}{\partial z}(z) = \psi^k(z) = 2\frac{\partial \phi^k}{\partial z}(z),$$

adică $\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{2}\psi$. Cum ψ este olomorfă,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} = 0$$

şi deci $\phi : D \to \mathbb{R}^n$ este armonică. Mai departe, din ii), avem

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \phi^k}{\partial z}\right)^2 &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\psi^k)^2 = 0\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \phi^k}{\partial x} - i\frac{\partial \phi^k}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial \phi^k}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi^k}{\partial y}\right)^2\right.\\ &\quad \left.-2i\frac{\partial \phi^k}{\partial x}\frac{\partial \phi^k}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

şi deci $|\frac{\partial \phi}{\partial x}|^2 = |\frac{\partial \phi}{\partial y}|^2$, iar $\langle \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\rangle = 0$. Mai rămâne de demonstrat că $|\frac{\partial \phi}{\partial x}| > 0$. Dar, din iii),

$$\sum_{k=1}^{n}|\psi^k|^2 = 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left|\frac{\partial \phi^k}{\partial x} - i\frac{\partial \phi^k}{\partial y}\right|^2 = 2\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|^2 > 0.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.□

Din teorema anterioară rezultă că pentru a găsi exemple de suprafeţe minimale în $\mathbb{R}^n$ este necesar să determinăm aplicaţii $\psi : D \to \mathbb{C}^n$ care satisfac i)-iii).

Teorema 4.4.4. *Fie D un deschis conex în $\mathbb{C}$. Considerăm $f, h : D \to \mathbb{C}$ astfel încât h este meromorfă iar f este olomorfă. Dacă se verifică condiţia*

a) *În orice punct din* D *în care* h *are un pol de ordin* m, f *are un zero de ordin cel puţin* $2m$, *atunci*

$$\psi^1 = \frac{1}{2}f(1-h^2), \;\; \psi^2 = \frac{1}{2}if(1+h^2), \;\; \psi^3 = fh \tag{4.4.1}$$

definesc o aplicaţie $\psi : D \to \mathbb{C}^3$, $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$, *care verifică* i) *şi* ii), *pentru* $n = 3$. *Mai mult, toate aplicaţiile* $\psi : D \to \mathbb{C}^3$ *ce satisfac* i) *şi* ii) *pot fi reprezentate în forma de mai sus, cu excepţia cazului* $\psi^3 = 0$.

b) *Zerourile lui* f *coincid cu polii lui* h, *iar ordinul lor este exact de două ori ordinul polilor lui* h, *atunci* ψ *verifică şi* iii).

În sfârşit, toate aplicaţiile $\psi : D \to \mathbb{C}^3$ *cu* $\psi^3 = 0$, *ce satisfac* i) *şi* ii), *sunt date de* $\psi^2 = i\psi^1$, *unde* $\psi^1 : D \to \mathbb{C}$ *este o funcţie olomorfă arbitrară;* $\psi : D \to \mathbb{C}^3$ *cu* $\psi^3 = 0$ *satisface* i), ii) *si* iii) *dacă şi numai dacă* $\psi^1(z) \neq 0$, *oricare ar fi* $z \in D$.

Înainte de a trece la demonstraţia teoremei vom reaminti câteva noţiuni şi rezultate din teoria funcţiilor complexe (vezi [35]).

Definiţia 4.4.3. Fie D un deschis din $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, şi $f : D \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Vom spune în acest caz că z_0 este *punct singular izolat* pentru funcţia f.

Dacă z_0 este un punct singular izolat pentru f, atunci avem dezvoltarea în serie Laurent a lui f pe $0 < |z - z_0| < R$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \;\; \forall 0 < |z - z_0| < R.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ se numeşte *partea principală* a dezvoltării, iar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ se numeşte *partea analitică.*

Punctele singulare izolate se clasifică astfel

1) *Punct singular aparent*, dacă pentru orice $n \geq 1$ avem $a_{-n} = 0$, adică partea principală are toţi coeficienţii nuli. Un exemplu îl constituie funcţia $z \to \frac{\sin z}{z}$ care are singularitate aparentă în $z_0 = 0$. Într-adevăr, dezvoltarea în serie Laurent este

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

2) *Pol (de ordin n)* dacă $a_{-n} \neq 0$, iar $a_{-n-k} = 0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Un exemplu îl constituie funcţia $z \to \frac{1}{z^n}$ care are pol de ordin n în $z_0 = 0$.
3) *Punct singular esenţial* în restul cazurilor, deci când mulţimea $\{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} : a_{-n} \neq 0\}$ este infinită. Un exemplu îl constituie funcţia $z \to e^{\frac{1}{z}}$ a cărei dezvoltare în serie Laurent este

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Teorema 4.4.5. *z_0 este punct singular aparent pentru funcţia f dacă şi numai dacă există* $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

Teorema 4.4.6. (**Riemann.**) *z_0 este punct singular aparent pentru funcţia f dacă şi numai dacă* $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$.

Teorema 4.4.7. *z_0 este pol de ordin n pentru funcţia f dacă şi numai dacă există $h : D \to \mathbb{C}$ olomorfă astfel încât $h(z_0) \neq 0$ şi*

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z), \quad \forall z \in D\backslash\{z_0\}.$$

Teorema 4.4.8. *z_0 este pol pentru funcţia f dacă şi numai dacă* $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Definiţia 4.4.4. Fie D un deschis din $\mathbb{C}$. Spunem că f este *funcţie meromorfă* pe D dacă există $A \subset D$, fără puncte de acumulare în D, astfel încât $f : D\backslash A \to \mathbb{C}$ este funcţie olomorfă, iar fiecare $a \in A$ este pol pentru f.

Teorema 4.4.9. *Fie $f : D \to \mathbb{C}$ continuă şi olomorfă pe $D\backslash\{z_0\}$. Atunci f este olomorfă pe D.*

Revenim acum la demonstraţia Teoremei 4.4.4 şi presupunem că condiţia a) este îndeplinită. Demonstrăm că $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ verifică i), adică ψ^1, ψ^2 şi ψ^3 sunt olomorfe. Fie $z_0 \in D$ fixat arbitrar.

Dacă h este definită şi olomorfă în z_0, atunci este clar că ψ^1, ψ^2 şi ψ^3 sunt olomorfe în z_0.

Presupunem că z_0 este un punct singular izolat al lui h de tip pol, de ordin m. Din condiţia a), punctul z_0 este un zero de ordin $k \geq 2m$ pentru funcţia f.

Am văzut că există $\delta_1 > 0$ şi o funcţie olomorfă h_1 definită pe discul $D(z_0;\delta_1) \subset D$ cu $h_1(z_0) \neq 0$ şi

$$h(z) = (z - z_0)^{-m} h_1(z), \quad \forall z \in D(z_0;\delta_1) \backslash \{z_0\}.$$

Pe de altă parte, există $\delta_2 > 0$ şi o funcţie olomorfă f_1 pe $D(z_0;\delta_2) \subset D$ astfel încât $f_1(z_0) \neq 0$ şi

$$f(z) = (z - z_0)^k f_1(z), \quad \forall z \in D(z_0;\delta_2).$$

Considerăm $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pe $D(z_0;\delta) \backslash \{z_0\}$ avem

$$\begin{aligned} \psi^1(z) &= \frac{1}{2}(z - z_0)^k f_1(z) \left(1 - \frac{1}{(z - z_0)^{2m}} h_1^2(z)\right) \\ &= \frac{1}{2} f_1(z) \left((z - z_0)^k - (z - z_0)^{k-2m} h_1^2(z)\right). \end{aligned}$$

Evident, ψ^1 este olomorfă pe $D(z_0;\delta) \backslash \{z_0\}$ şi

$$\lim_{z \to z_0} \psi^1(z) = \begin{cases} 0, & k > 2m \\ -\frac{1}{2} f_1(z_0) h_1^2(z_0), & k = 2m \end{cases} \in \mathbb{C}.$$

Prin urmare z_0 este un punct singular aparent pentru ψ^1 şi deci putem prelungi prin continuitate ψ^1 în z_0. Rezultă că ψ^1 este olomorfă pe $D(z_0;\delta)$. Cum $z_0 \in D$ a fost fixat arbitrar rezultă că ψ^1 este olomorfă pe D. Analog, ψ^2 şi ψ^3 sunt olomorfe pe D.

Condiţia ii) se verifică prin calcul direct deosebindu-se cazurile: funcţia h este definită şi olomorfă în z_0, z_0 este pol de ordin m pentru h şi zero de ordin $k = 2m$ pentru f, z_0 este pol de ordin m pentru h şi zero de ordin $k > 2m$ pentru f.

Presupunem acum că condiţia b) este îndeplinită. Evident, ψ verifică i) şi ii). Pentru a demonstra iii), considerăm două cazuri.

Dacă h este definită şi olomorfă în z_0, atunci $f(z_0) \neq 0$ şi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} |\psi^k(z_0)|^2 &= \frac{1}{4}|f(z_0)|^2|1-h^2(z_0)|^2 \\ &\quad +\frac{1}{4}|f(z_0)|^2|1+h^2(z_0)|^2 + |f(z_0)|^2|h(z_0)|^2 \\ &= \frac{1}{4}|f(z_0)|^2(|1-h^2(z_0)|^2 + |1+h^2(z_0)|^2 + 4|h(z_0)|^2) \\ &= \frac{1}{4}|f(z_0)|^2(2+2|h(z_0)|^4 + 4|h(z_0)|^2) \\ &= \frac{1}{2}|f(z_0)|^2(1+|h(z_0)|^2)^2 \\ &> 0.\end{aligned}$$

Dacă z_0 este pol de ordin m pentru h şi zero de ordinul $k = 2m$ pentru f, atunci

$$\psi^1(z_0) = -\frac{1}{2}f_1(z_0)h_1^2(z_0), \quad \psi^2(z_0) = \frac{i}{2}f_1(z_0)h_1^2(z_0), \quad \psi^3(z_0) = 0$$

şi deci

$$\sum_{k=1}^{3} |\psi^k(z_0)|^2 = \frac{1}{2}|f_1(z_0)|^2|h_1(z_0)|^4 > 0.$$

Reciproc, fie $\psi : D \to \mathbb{C}^3$ o aplicaţie ce îndeplineşte i) şi ii), iar $\psi^3 \neq 0$. Definim $f = \psi^1 - i\psi^2$ şi $h = \frac{\psi^3}{\psi^1 - i\psi^2}$. Funcţia f este olomorfă, h este meromorfă, iar ψ se scrie sub forma (4.4.1). $\square$

Din Teorema 4.4.2 şi Teorema 4.4.4 putem concluziona

Teorema 4.4.10. *Fie D un deschis conex şi simplu conex din $\mathbb{C}$, iar $z_0 \in D$ un punct fixat. Atunci orice suprafaţă minimală $\phi : D \to \mathbb{R}^3$ se poate reprezenta sub forma*

$$\phi^k(z) = \Re e\left\{\int_{z_0}^{z} \psi^k(\xi)d\xi\right\} + c^k, \quad k = 1,2,3, \tag{4.4.2}$$

unde c^k sunt constante reale iar funcţiile ψ^k sunt date de (4.4.1) *cu f olomorfă pe D, h meromorfă pe D şi satisfăcând* b), *Teorema 4.4.4, sau $\psi^3 = 0$*

şi $\psi^2 = i\psi^1$, *unde* $\psi^1 : D \to \mathbb{C}$ *este olomorfă cu* $\psi^1(z) \neq 0$, *oricare ar fi* $z \in D$.

Exemplul 4.4.1. Fie $D = \mathbb{C}, h(z) = -e^z$ şi $f(z) = -e^{-z}$. Funcţiile f şi h fiind olomorfe, condiţia b) din Teorema 4.4.4 este îndeplinită automat. Formulele (4.4.1) dau

$$\begin{aligned}
\psi^1(z) &= \frac{1}{2}f(1-h^2) = -\frac{1}{2}e^{-z}(1-e^{2z}) = -\frac{1}{2}(e^{-z}-e^z) = \sinh z\\
\psi^2(z) &= \frac{i}{2}f(1+h^2) = -\frac{i}{2}e^{-z}(1+e^{2z}) = -\frac{i}{2}(e^{-z}+e^z) = -i\cosh z\\
\psi^3(z) &= fh = 1.
\end{aligned}$$

Prin urmare

$$\psi(z) = (\sinh z, -i\cosh z, 1)$$

şi înlocuind în (4.4.2) obţinem

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= (\Re\mathrm{e}\{\cosh z\}, -\Re\mathrm{e}\{i\sinh z\}, \Re\mathrm{e}\{z\}) + (c^1, c^2, c^3)\\
&= (\cos y\cosh x, \sin y\cosh x, x) + (c^1, c^2, c^3),
\end{aligned}$$

unde $z = x + iy$ şi c^1, c^2, c^3 sunt constante reale. Dacă notăm

$$X = \cos y\cosh x, \quad Y = \sin y\cosh x, \quad Z = x,$$

obţinem ecuaţiile parametrice ale suprafeţei minimale; ecuaţia implicită este

$$X^2 + Y^2 = (\cosh Z)^2$$

care reprezintă ecuaţia *catenoidului.*

Exemplul 4.4.2. Fie $D = \mathbb{C}, h(z) = -ie^z$ şi $f(z) = e^{-z}$. La fel ca mai sus obţinem suprafaţa minimală

$$\psi(x,y) = (\cos y\sinh x, \sin y\sinh x, y).$$

Dacă notăm $\rho = \sinh x$, ecuaţiile parametrice ale suprafeţei minimale devin

$$X = \rho\cos y, \quad Y = \rho\sin y, \quad Z = y$$

care reprezintă o suprafaţă minimală riglată.

4.4.2 Aplicaţia Gauss asociată unei suprafeţe minimale

Fie M o suprafaţă Riemann şi $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie conformă. Considerăm $(U; z = x + iy)$ o hartă locală complexă pe M şi presupunem că deschisul U este conex şi simplu conex. Metrica indusă de ϕ pe M se scrie sub forma

$$g = 2\lambda dz \odot d\overline{z},$$

unde $\lambda \in C^\infty(U)$ şi $\lambda(q) > 0$, oricare ar fi $q \in U$. La fel ca în secţiunea anterioară, definim $\psi_U : U \to \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ prin

$$\psi_U(z) = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y}\right).$$

Dacă $(V; w)$ este o altă hartă locală complexă, pe $U \cap V$ avem

$$\psi_V = \frac{\partial \phi}{\partial w} = \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial w}\psi_U.$$

Cum $\frac{\partial z}{\partial w} \neq 0$, rezultă că ψ_V şi ψ_U determină acelaşi element în $P^{n-1}(\mathbb{C})$. Prin urmare nu putem defini o aplicaţie $\psi : M \to \mathbb{C}^n, \psi_{|U} = \psi_U$, dar în schimb putem defini

$$G : M \to P^{n-1}(\mathbb{C}), \ \ G_{|U}(z) = [\psi_U(z)].$$

Aplicaţia G se numeşte *aplicaţia Gauss.*

Vom da fără demonstraţie următorul rezultat

Teorema 4.4.11. *Fie M o suprafaţă Riemann şi $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie conformă. Considerăm $G : M \to P^{n-1}(\mathbb{C})$ aplicaţia Gauss asociată. Atunci ϕ este o suprafaţă minimală dacă şi numai dacă G este o aplicaţie olomorfă.*

Deoarece $\sum_{k=1}^n (\psi_U^k(z))^2 = 0$, obţinem

Corolarul 4.4.1. *Fie M o suprafaţă Riemann şi $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ o aplicaţie conformă. Considerăm $G : M \to P^{n-1}(\mathbb{C})$ aplicaţia Gauss. Atunci*

$$G(M) \subset Q_{n-2} = \left\{[w^1, \ldots, w^n] \in P^{n-1}(\mathbb{C}) : \sum_{k=1}^n (w^k)^2 = 0\right\}$$

şi ϕ este o suprafaţă minimală dacă şi numai dacă $G : M \to Q_{n-2}$ este olomorfă.

În continuare vom prezenta o interpretare geometrică a aplicaţiei Gauss. Notăm cu $G_2(\mathbb{R}^n)$ varietatea Grassmann a 2-planelor reale orientate din $\mathbb{R}^n$. Fie $\sigma \in G_2(\mathbb{R}^n)$ şi (u,v) o bază pozitiv orientată a lui σ cu $|u| = |v| > 0$ şi $\langle u, v\rangle = 0$, $u = (u^1, \ldots, u^n)$, $v = (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Notăm

$$w = u + iv = (u^1 + iv^1, \ldots, u^n + iv^n) \in \mathbb{C}^n.$$

Aplicaţia

$$G_2(\mathbb{R}^n) \ni \sigma \mapsto [w] \in P^{n-1}(\mathbb{C})$$

este corect definită (se verifică uşor că $[w]$ nu depinde de baza (u,v) aleasă). Mai mult,

$$\sum_{k=1}^{n}(w^k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(u^k + iv^k)^2 = |u|^2 - |v|^2 + 2i\langle u, v\rangle = 0$$

şi prin urmare avem

$$F : G_2(\mathbb{R}^n) \to Q_{n-2}, \quad F(\sigma) = [w]$$

corect definită şi bijecţie. Interpretarea geometrică a aplicaţiei Gauss este dată de

$$F^{-1} \circ \overline{G} = F^{-1}\left(\left[\overline{\frac{\partial \phi}{\partial z}}\right]\right) = F^{-1}\left(\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \phi}{\partial y}\right]\right),$$

adică $F^{-1} \circ \overline{G}(z)$ este 2-planul cu orientarea dată de $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$.

Fie $\phi : M \to \mathbb{R}^3$ o suprafaţă minimală. Am văzut că reprezentarea Weierstrass este dată de

$$\phi(z) = \Re\mathrm{e}\left\{\int_{z_0}^{z} \psi(\xi)d\xi\right\} + (c^1, c^2, c^3),$$

unde

$$\psi(z) = 2\frac{\partial \phi}{\partial z} = 2f(z)\left(\frac{1}{2}(1 - h^2(z)), \frac{i}{2}(1 + h^2(z)), h(z)\right).$$

Prin urmare aplicaţia Gauss $G : U \to Q_1 \subset P^2(\mathbb{C})$ este dată de

$$G(z) = \left[\frac{1}{2}(1 - h^2(z)), \frac{i}{2}(1 + h^2(z)), h(z)\right].$$

Se observă că G depinde numai de h.

În continuare vom prezenta o interpretare geometrică a funcţiei h. Fie $N : M \to \mathbb{S}^2$ *aplicaţia Gauss sferică* a lui ϕ definită de

$$N(z) = \frac{\phi_x \times \phi_y}{|\phi_x \times \phi_y|},$$

unde $z = x + iy$ şi $\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$. Din

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{2}\phi_x - \frac{i}{2}\phi_y \quad \text{şi} \quad \psi = 2\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

rezultă că

$$\phi_x = 2\Re\mathrm{e}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial z}\right\} = \Re\mathrm{e}\left\{(\psi^1, \psi^2, \psi^3)\right\},$$

$$\phi_y = -2\Im\mathrm{m}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial z}\right\} = -\Im\mathrm{m}\left\{(\psi^1, \psi^2, \psi^3)\right\}.$$

Printr-un calcul direct se obţine

$$N(z) = \left(\frac{2\Re\mathrm{e}\{h\}}{|h|^2+1}, \frac{2\Im\mathrm{m}\{h\}}{|h|^2+1}, \frac{|h|^2-1}{|h|^2+1}\right).$$

Reamintim că proiecţia stereografică din polul Nord, $\varphi_N : \mathbb{S}^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ are inversa dată de

$$\varphi_N^{-1}(z) = \left(\frac{2\Re\mathrm{e}\{z\}}{|z|^2+1}, \frac{2\Im\mathrm{m}\{z\}}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).$$

Prin urmare funcţia h este reprezentarea locală a lui N în raport cu proiecţia stereografică a lui $\mathbb{S}^2$. Mai mult, cum $\mathbb{S}^2 = G_1(\mathbb{R}^3) = G_2(\mathbb{R}^3)$,

$$F^{-1} \circ \overline{G} = N.$$

Încheiem cu enunţarea unui rezultat celebru al lui Robert Osserman

Teorema 4.4.12. (**Osserman.**) *Fie $\phi : M \to \mathbb{R}^3$ o suprafaţă minimală completă. Dacă există D un deschis în $\mathbb{S}^2$ astfel încât aplicaţia Gauss sferică $N : M \to \mathbb{S}^2$ are proprietatea $N(M) \subset \mathbb{S}^2 \backslash D$, atunci suprafaţa este un plan.*

Bibliografie

[1] A.C. Albu, D.I. Papuc. *Elemente de geometrie diferenţială globală*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[2] M. Anastasiei. *Geometrie: curbe şi suprafeţe*, Editura tehnică, ştiinţifică şi didactică, Cermi, 2003.

[3] T. Aubin. *A Course in Differential Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, 27, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[4] P. Baird, C.L. Bejan. *Quasi-harmonic maps between almost symplectic manifolds,* Harmonic morphisms, harmonic maps, and related topics (Brest, 1997), 75–95, Chapman and Hall/CRC Res. Notes Math., 413, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.

[5] P. Baird, C.J. Wood. *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, London Mathematical Society Monographs, No. 29, Oxford University Press, 2003.

[6] A. Balmuş, C. Oniciuc, N. Papaghiuc. *Harmonic properties on the tangent bundle*, An. Univ. Timişoara Ser. Mat.-Inform. 42 (2004), no. 1, 17–27.

[7] C.L. Bejan, H. Urakawa. *Yang-Mills fields analogue of biharmonic maps*, Topics in almost Hermitian geometry and related fields, 41–49, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.

[8] M. Berger, B. Gostiaux. *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, 115. Springer-Verlag, New York, 1988.

[9] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet. *Le spectre d′une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[10] R. Bott, L.W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology,* Springer-Verlag, New York Inc., 1982.

[11] R. Caddeo, A. Gray. *Lezioni di Geometria Differenziale su Curve e Superfici*, Vol. I-II, Cooperativa Universitaria Editrice Cagliaritana, Cagliari, 2001.

[12] M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry*, Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[13] M. Craioveanu, M. Puta. *Introducere în geometria spectrală*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1988.

[14] M. Craioveanu, M. Puta, T.M. Rassias. *Old and New Aspects in Spectral Geometry*, Mathematics and its Applications, 534. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[15] M. Crâşmăreanu. *Geometrie: curbe şi suprafeţe. Culegere de probleme*, Editura tehnică, ştiinţifică şi didactică, Cermi, 2003.

[16] S. Dragomir, J.C. Wood. *Sottovarietà Minimali ed Applicazioni Armoniche*, Quad. dell′Unione Matematica Italiana, Pitagora, 1989.

[17] J. Eells, L. Lemaire. *A report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. 10 (1978), no. 1, 1–68.

[18] J. Eells, L. Lemaire. *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board Math. Sci. 50, 1983.

[19] J. Eells, L. Lemaire. *Another report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), no. 5, 385–524.

[20] J. Eells, A. Ratto. *Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries: Methods of Ordinary Differential Equations Applied to Elliptic Variational Problems*, Princeton University Press, 1993.

[21] J. Eells, J.H. Sampson. *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109–160.

[22] D. Fetcu. *Properties of Harmonic Mappings and Morphisms*, DGDS. Differential Geometry—Dynamical Systems. Monographs, 5. Geometry Balkan Press, Bucharest, 2005.

[23] Gh. Gheorghiev, V. Oproiu. *Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale*, Vol. II, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1979.

[24] C. Gherghe, S. Ianuş, A.M. Pastore. *CR-manifolds, harmonic maps and stability*, J. Geom. 71 (2001), no. 1-2, 42–53.

[25] C. Gherghe, S. Ianuş, A.M. Pastore. *Harmonic maps, harmonic morphisms and stability*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 43(91) (2000), no. 3-4, 247–254.

[26] C. Godbillon. *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.

[27] S. Ianuş. *Geometrie diferenţială cu aplicaţii în teoria relativităţii*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1983.

[28] B. O′Neill. *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. 13 (1966), 459–469.

[29] C. Oniciuc. *Tangency and Harmonicity Properties*, DGDS. Differential Geometry—Dynamical Systems. Monographs, 3. Geometry Balkan Press, Bucharest, 2003.

[30] V. Oproiu. *Geometrie diferenţială*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2002.

[31] V. Oproiu. *Harmonic maps between tangent bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 47 (1989), no. 1, 47–55 (1991).

[32] V. Oproiu. *On the harmonic sections of cotangent bundles*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 59 (1989), no. 2, 177–184.

[33] V. Oproiu, N. Papaghiuc. *Some results on harmonic sections of cotangent bundles*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.) 45 (1999), no. 2, 275–290 (2000).

[34] L. Ornea, A. Turtoi. *O introducere în geometrie*, Fundaţia Theta, Bucureşti, 2000.

[35] E. Popa. *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Editura Universităţii "Al.I. Cuza", Iaşi, 1997.

[36] L. Răileanu. *Varietăţi topologice şi diferenţiale. O introducere în topologia diferenţială,* Editura Universităţii "Al.I. Cuza", Iaşi, 1983.

[37] J. Simons. *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) 88 (1968), 62–105.

[38] H. Urakawa. *Calculus of Variations and Harmonic Maps*, Translations of Mathematical Monographs, 132. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[39] J.L. Weiner. *On a problem of Chen, Willmore, et al.*, Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), no. 1, 19–35.

[40] Y.L. Xin. *Geometry of Harmonic Maps,* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 23. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

Index