

CAPITOLUL III

III.1. CURBE ÎN SPAȚIU

III.1.1. Breviar teoretic

Fie R^3 spațiul euclidian tridimensional.

O curbă în spațiu este reprezentată prin ecuația vectorială

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I \subset R, \quad (3.1.1)$$

de ecuațiile parametrice

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I \subset R, \quad (3.1.2)$$

de ecuațiile implicite

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in D \subset R^3, \quad (3.1.3)$$

sau de ecuațiile explicite

$$z = f(x, y), \quad z = g(x, y), \quad (x, y) \in D \subset R^2, \quad (3.1.4)$$

unde funcțiile x, y, z, F, G, f, g admit cel puțin derivate parțiale de ordinal doi.

Tangenta la curba (3.1.2) în punctul regulat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al curbei are ecuațiile:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} \quad (3.1.5)$$

unde t_0 este astfel că $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ și $z_0 = z(t_0)$.

Ecuația planului normal la curbă în punctul regulat M_0 este:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \quad (3.1.6)$$

Pentru o curbă dată de ecuațiile (3.1.3), tangenta și planul normal la curbă în M_0 au ecuațiile:

$$\frac{x - x_0}{\frac{D(F, G)}{D(y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{D(F, G)}{D(z_0, x_0)}} = \frac{z - z_0}{\frac{D(F, G)}{D(x_0, y_0)}}, \quad (3.1.7)$$

respectiv,

$$\frac{D(F,G)}{D(y_0,z_0)}(x-x_0) + \frac{D(F,G)}{D(z_0,x_0)}(y-y_0) + \frac{D(F,G)}{D(x_0,y_0)}(z-z_0) = 0, \quad (3.1.8)$$

unde $\frac{D(F,G)}{D(y_0,z_0)}$, $\frac{D(F,G)}{D(z_0,x_0)}$ și $\frac{D(F,G)}{D(x_0,y_0)}$ sunt determinanții funcționali ai funcțiilor F și

G .

Versorii triedrului Frenet sunt:

$$- \text{ versorul tangentei: } \vec{\tau} = \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|}, \quad (3.1.9)$$

$$- \text{ versorul binormalei: } \vec{\beta} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}, \quad (3.1.10)$$

$$- \text{ versorul normalei principale: } \vec{\gamma} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}. \quad (3.1.11)$$

Axele triedrului Frenet în punctul regulat M_0 sunt:

- tangenta la curbă în M_0 ,
- binormala la curbă în M_0 (dreapta care trece prin M_0 și de versor director $\vec{\beta}$),
- normala principală la curbă în M_0 (dreapta care trece prin M_0 și de versor director $\vec{\gamma}$).

Planele triedrului Frenet se numesc, respectiv: planul normal, Π_N (trece prin M_0 și este paralel cu direcțiile $\vec{\beta}$ și $\vec{\gamma}$), planul osculator, Π_O (trece prin M_0 și este paralel cu direcțiile $\vec{\tau}$ și $\vec{\gamma}$) și planul rectificat Π_R (trece prin M_0 și este paralel cu direcțiile $\vec{\tau}$ și $\vec{\beta}$).

Curbura unei curbe într-un punct regulat M este viteza de variație a unghiului pe care-l face tangenta la curbă cu o dreaptă fixă și are expresia:

$$K = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} \quad (3.1.12)$$

Torsiunea unei curbe într-un punct regulat M este viteza de variație a unghiului pe care-l face binormala cu o dreaptă fixă și este dată de:

$$T = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2} \quad (3.1.13)$$

Inversele $\frac{1}{K}$ și $\frac{1}{T}$ ale curburii și torsiunii se numesc raza de curbură și raza de torsiune a curbei într-un punct considerat.

Formulele lui Frenet sunt:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{\gamma}, \quad \frac{d\vec{\gamma}}{ds} = -K\vec{\tau} + \frac{1}{T}\vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\frac{1}{T}\vec{\gamma} \quad (3.1.14)$$

Elementul de arc are expresia:

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \quad (3.1.15)$$

III.1.2. Probleme rezolvate

P1. Se consideră curba $x = 2t, y = t^2, z = \ln t, t > 0$. Să se arate că această curbă trece prin punctele $P(2,1,0)$ și $Q(4,4,\ln 2)$ și să se găsească lungimea arcului între aceste puncte.

Soluție. Se observă că pentru $t=1$ se obține punctul P , iar pentru $t=2$ se obține punctul Q . Deoarece $x'(t) = 2, y'(t) = 2t, z'(t) = \frac{1}{t}$, rezultă pentru lungimea arcului între P și Q :

$$l(1,2) = \int_1^2 \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 \frac{2t^2 + 1}{t} dt$$

$$\text{Deci, } l(1,2) = t^2 \Big|_1^2 + \ln t \Big|_1^2 = 3 + \ln 2.$$

P2. Să se scrie ecuațiile tangentei și ecuația planului normal la curbele:

- $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$ în $t = 0$;
- $z = x^2 + y^2, x = y$ în $M_0(1,1,2)$;
- $x^2 + z^2 - 4 = 0, x^2 + y^2 - 4 = 0$, în $M_0(\sqrt{3},1,1)$.

Soluție. a) Pentru $t = 0$ se obține punctual $(0,0,0)$. Se utilizează ecuațiile (3.1.5) și (3.1.6) în care derivatele $x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \sin t$ și $z'(t) = 2 \cos \frac{t}{2}$ sunt calculate în

punctul $t = 0$. Rezultă: $T : \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{2}$, $\Pi_T : z = 0$;

b) Punând $x = t$, se obține reprezentarea parametrică a curbei $x = t, y = t, z = 2t^2$. Punctul $(1,1,2)$ corespunde lui $t = 1$. Prin derivare, ecuațiile (3.1.5) și (3.1.6) devin:

$$T : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4}, \quad \Pi_T : 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 4 \cdot (z-2) = 0,$$

adică, $\Pi_T : x + y + 4z - 10 = 0$;

c) Fie $F(x, y, z) = x^2 + z^2 - 4$ și $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4$. Pentru ecuațiile (3.1.7) se calculează determinanții funcționali:

$$\frac{D(F, G)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -4yz, \quad \frac{D(F, G)}{D(z, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 4xz;$$

$$\frac{D(F, G)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 4xy.$$

În punctul $(\sqrt{3}, 1, 1)$ ecuațiile tangentei și planului normal sunt:

$$T : \frac{x - \sqrt{3}}{-4} = \frac{y - 1}{4\sqrt{3}} = \frac{z - 1}{4\sqrt{3}}, \quad \Pi_T : -4(x - \sqrt{3}) + 4\sqrt{3}(y - 1) + 4\sqrt{3}(z - 1) = 0,$$

adică $x - \sqrt{3}y - \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$.

P3. Pentru curba $x = a \cos t, y = a \sin t, z = ht, t \in \mathbb{R}$, să se determine triedrul Frenet.

Soluție. Prin derivare se obține $\vec{r}'(t) = (-a \sin t)\vec{i} + a \cos t\vec{j} + h\vec{k}$. Ecuațiile tangentei sunt:

$$T : \frac{x - a \cos t}{-a \sin t} = \frac{y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{z - ht}{h},$$

versorul $\vec{\tau}$ este dat de $\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}}(-a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + h \vec{k})$.

Planul normal ($\Pi_N \perp \vec{\tau}$) are ecuația:

$$\Pi_N : -a \sin t(x - a \cos t) + a \cos t(y - a \sin t) + h(z - ht) = 0.$$

Pentru versorul $\vec{\beta}$ se calculează $\vec{r}''(t) = (-a \cos t)\vec{i} + (-a \sin t)\vec{j}$. Deci,

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin t & a \cos t & h \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = ah \sin t \vec{i} - ah \cos t \vec{j} + a^2 \vec{k}.$$

In concluzie,

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}}(h \sin t \vec{i} - h \cos t \vec{j} + \vec{k}).$$

Ecuțiile binormalei (de direcție $\vec{\beta}$) sunt:

$$B : \frac{x - a \cos t}{h \sin t} = \frac{y - a \sin t}{-h \cos t} = \frac{z - ht}{a}$$

Planul osculator ($\Pi_o \perp \vec{\beta}$) are ecuația:

$$\Pi_o : h \sin t(x - a \cos t) - h \cos t(y - a \sin t) + a(z - ht) = 0.$$

Pentru versorul normalei principale $\vec{\gamma} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$ se obține:

$$\vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{h \sin t}{\sqrt{h^2 + a^2}} & \frac{-h \cos t}{\sqrt{h^2 + a^2}} & \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}} \\ \frac{-a \sin t}{\sqrt{h^2 + a^2}} & \frac{a \cos t}{\sqrt{h^2 + a^2}} & \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} \end{vmatrix} = \cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}.$$

Ecuțiile normalei principale (de direcție $\vec{\gamma}$) sunt:

$$N_P : \frac{x - a \cos t}{\cos t} = \frac{y - a \sin t}{-\sin t} = \frac{z - ht}{0}.$$

Planul rectificanț ($\Pi_R \perp \vec{\gamma}$) este de ecuație:

$$\Pi_R : \cos t(x - a \cos t) - \sin t(y - a \sin t) = 0.$$

P4. Pentru curba $x^2 = 2az, y^2 = 2bz, a, b > 0$, să se determine triedrul Frenet.

Soluție. O reprezentare parametrică a curbei este dată de $x = \sqrt{2at}, y = \sqrt{2bt}, z = t^2, t \in \mathbb{R}$. Se obține $x' = \sqrt{2a}, y' = \sqrt{2b}, z = 2t, x'' = y'' = 0, z'' = 0$.

Ecuțiile tangentei la curbă sunt:

$$T: \frac{x - \sqrt{2at}}{\sqrt{2a}} = \frac{y - \sqrt{2bt}}{\sqrt{2b}} = \frac{z - t^2}{2t},$$

versorul $\vec{\tau}$ este dat de $\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2a + 2b + 4t^2}} (\sqrt{2a}\vec{i} + \sqrt{2b}\vec{j} + 2t\vec{k})$.

Ecuția planului normal este:

$$\Pi_N: \sqrt{2a}(x - \sqrt{2at}) + \sqrt{2b}(y - \sqrt{2bt}) + 2t(z - t^2) = 0.$$

Versorul binormalei are expresia:

$$\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2a + 2b}} (\sqrt{2a}\vec{i} - \sqrt{2b}\vec{j}).$$

Ecuțiile binormalei sunt:

$$B: \frac{x - \sqrt{2at}}{\sqrt{2a}} = \frac{y - \sqrt{2bt}}{-\sqrt{2b}} = \frac{z - t^2}{0}.$$

Pentru planul osculator se găsește:

$$\Pi_O: \sqrt{2a}(x - \sqrt{2at}) - \sqrt{2b}(y - \sqrt{2bt}) = 0.$$

Se obține versorul normalei principale:

$$\vec{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{(a+b)(2t^2 + a + b)}} (-\sqrt{2b}t\vec{i} - \sqrt{2a}t\vec{j} + (a+b)\vec{k}).$$

Deci ecuația normalei principale sunt:

$$B: \frac{x - \sqrt{2at}}{-\sqrt{2b}} = \frac{y - \sqrt{2bt}}{-\sqrt{2a}} = \frac{z - t^2}{a + b}.$$

În final, planul rectificat are ecuația:

$$\Pi_R: -\sqrt{2b}t(x - \sqrt{2at}) - \sqrt{2a}t(y - \sqrt{2bt}) + (a+b)(z - t^2) = 0.$$

P5. Să se calculeze curbura și torsiunea într-un punct al curbei $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}$.

Soluție. Ecuația vectorială a curbei este $\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j} + t\sqrt{2}\vec{k}$.

Se calculează:

$$\vec{r}'(t) = e^t \vec{i} - e^{-t} \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$$

$$\vec{r}''(t) = e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = e^t \vec{i} - e^{-t} \vec{j}$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = e^{-t} \vec{i} + e^t \sqrt{2} \vec{j} + 2\vec{k}. \text{ Deci, pentru curbura se obține:}$$

$$K = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Pentru torsiunea T se calculează:

$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & -e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2}.$$

$$\text{Deci, } T = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

P6. Să se determine versorii triedrului Frenet, curbura și torsiunea pentru curba $\vec{r}(s) = \left(\frac{4}{5} \cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5} \cos s \right)$.

Soluție. Se observă că $v = \|\vec{r}'\| = 1$ și deci parametrul pe curba dată este chiar abscisa curbilinie. Astfel, formulele care dau elementele Frenet sunt:

$$\vec{t}(s) = \vec{r}'(s), \quad K = \|\vec{t}'(s)\|, \quad \vec{\gamma}(s) = \frac{1}{K} \vec{t}'(s), \quad \vec{\beta}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{\gamma}(s), \quad \vec{\beta}' = -\tau \vec{\gamma}.$$

Se găsește $\vec{t}'(s) = \vec{r}''(s) = \left(-\frac{4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s \right)$ și $K=1$. De asemenea,

$$\vec{\gamma}(s) = \left(-\frac{4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s \right), \quad \vec{\beta}(s) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right).$$

Deoarece câmpul binormal este paralel rezultă $T=0$. Din $K = 1 > 0$ și $T = 0, (\forall)s$, rezultă că $\vec{r}(s)$ este un cerc.

III.1.3. Probleme propuse

P1. Să se scrie ecuațiile tangentei și ecuația planului normal în punctul M_0 la curba Γ , pentru:

a) $x = e^t \cos 3t, y = e^t \sin 3t, z = e^{-2t}, M_0(1,0,1)$;

b) $x = a \cos^2 t, y = a \sin t \cos t, z = a \sin t, M_0\left(t_0 = \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $x^2 + y^2 + z + 6 = 0, x - y^2 + z^3 + 6 = 0, M_0(-1,-2,-1)$;

Indicație. a) $T : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-2}; \Pi_N : x + 3y - 2z + 1 = 0$;

b) $T : \frac{2x-a}{-2} = \frac{2y-a}{0} = \frac{2z-a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \Pi_N : -2x + \sqrt{2}z = 0$;

c) $T : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}; \Pi_N : x + 2y - 3z = 0$;

P2. Să se scrie ecuațiile fețelor triedrului Frenet al curbei $x = \frac{t}{\sqrt{2}}, y = \frac{t}{\sqrt{2}}, z = \ln|\sin t|$ în punctual $t = \frac{\pi}{2}$.

Indicație. $\Pi_N : x + y - \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 0; \Pi_O : x - y = 0; \Pi_R : z = 0$.

P3. Să se scrie ecuațiile axelor triedrului Frenet într-un punct oarecare al curbei

$$x = \frac{1}{2} \sin^2 t, y = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t), z = \sin t.$$

Indicație.

$$T : \frac{X-x}{\sin t} = \frac{Y-y}{\cos t} = \frac{Z-z}{1}; B : \frac{X-x}{\sin t} = \frac{Y-y}{\cos t} = \frac{Z-z}{-1}; N_P : \frac{X-x}{\cos t} = \frac{Y-y}{\sin t} = \frac{Z-z}{0}.$$

P4. Să se scrie ecuația planului osculator al curbei $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}$ într-un punct al ei.

Indicație. $\Pi_O : xe^{-t} - ye^t - z\sqrt{2} + 2t = 0$.

P5. Să se scrie ecuația planului osculator al curbei $y^2 = x, x^2 = z$ în punctual $M(1,1,1)$.

Indicație. Curba poate fi exprimată prin ecuațiile parametrice $x = t^2, y = t, z = t^4$. Planul osculator are ecuația $\Pi_o : 6x - 8y - z + 3 = 0$.

P6. Să se determine ecuațiile normalei principale și binormalei la curba $x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{2t^3}{3}, z = \frac{t^4}{2}$ în punctul $M\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Indicație. $t = 1; N_p : \frac{x - \frac{1}{2}}{2} = \frac{y - \frac{2}{3}}{1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-2}; B : \frac{x - \frac{1}{2}}{2} = \frac{y - \frac{2}{3}}{-2} = \frac{z - \frac{1}{2}}{1}$.

P7. Să se scrie ecuațiile normalei principale și binormalei la curba $x = y^2, z = x^2$ în punctual $M(1,1,1)$.

Indicație. O reprezentare parametrică a curbei este $x = t^2, y = t, z = t^4$;
 $N_p : \frac{x-1}{-31} = \frac{y-1}{-26} = \frac{z-1}{22}; B : \frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$.

P8. Se dă curba $\vec{r} = t\vec{i} + \frac{1}{2}t^2\vec{j} + \frac{1}{6}t^3\vec{k}$. Se cere:

- elementul de arc;
- versorii triedrului Frenet în punctul $t=1$;
- ecuația planului osculator în același punct.

Indicație. a) $ds = \frac{1}{2}(2+t^2)dt$; $\vec{t} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\vec{\beta} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vec{\gamma} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$; c)

$\Pi_o : x - 2y + 2z - \frac{1}{3} = 0$.

P9. Se dă curba $\vec{r} = \cos^2 t\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{6}\sin^3 t\vec{k}$. Se cere:

- elementul de arc;

- b) versorii triedrului Frenet într-un punct oarecare al curbei;
 c) curbura.

Indicație. $ds = 3 \sin t \cos t dt$; $\vec{t}(-\cos t, 0, \sin t)$, $\vec{\beta}(0, 1, 0)$, $\vec{\gamma}(\sin t, 0, \cos t)$; c)

$$K = \frac{1}{3 \sin t \cos t}.$$

P10. Să se scrie ecuația binormalei la curba $x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{2t^3}{3}, z = \frac{t^4}{2}$ în punctul $M\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Indicație. $B: \frac{x - \frac{1}{2}}{2} = \frac{y - \frac{2}{3}}{-2} = \frac{z - \frac{1}{2}}{1}$.

P11. Să se calculeze curbura și torsiunea curbei $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos 2t$ în punctul $M(0, 1, -1)$.

Indicație. $K=17, T=0$.

P12. Se consideră curba $\vec{r} = \frac{1}{2}t^2\vec{i} + \frac{2\sqrt{3}}{2}t^{3/2}\vec{j} + t\vec{k}$. Se cere:

- a) versorii tangentei și binormalei principale precum și curbura în punctul $t=2$;
 b) ecuațiile tangentei și planului rectificat în același punct.

Indicație. a) $\vec{t}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\vec{\gamma}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; $K = \frac{1}{18}$; b) $T: \frac{x-2}{2} = \frac{y-\frac{8}{3}}{2} = \frac{z-2}{1}$;

$$\Pi_R: 2x - y - 2z + \frac{8}{3} = 0.$$

P13. Fie curba $\vec{r} = t\vec{i} + (1-t^2)\vec{j} + \frac{2}{3}t^3\vec{k}$.

- a) să se calculeze versorii triedrului Frenet în $t=1$;
 b) să se scrie ecuațiile normalei principale și ale planului osculator;

c) să se calculeze torsiunea în același punct.

Indicație. a) $\vec{\tau}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \vec{\beta}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \vec{\gamma}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right);$ b)

$$N_P : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-\frac{2}{3}}{2}; \Pi_O : 2x + 2y + z - \frac{8}{3} = 0; \text{ c) } T = \frac{2}{9}.$$

P14. Să se afle raza de curbură pentru curba $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$.

Indicație. $R = \frac{1}{K} = \frac{4}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}.$

P15. Se dă curba $x = \cos t, y = \sin t, z = -\ln|\cos t|$. Se cere:

- a) curbura într-un punct oarecare al curbei;
- b) versorii normalei principale și binormalei;
- c) ecuațiile binormalei și planului rectificat în $t=0$.

Indicație. a) $K = \cos t \sqrt{1 + \cos^2 t};$ b) $\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} (\cos t(1 + \sin^2 t)\vec{i} + \sin^3 t\vec{j} + \cos^2 t\vec{k}),$ $\vec{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} (-\cos 2t\vec{i} - \sin 2t\vec{j} + \cos t\vec{k}),$ c) $B : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$

P16. Să se calculeze lungimea curbei închise $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos^2 t$.

Indicație. $ds = \frac{5}{2} |\sin 2t| dt; s = \frac{5}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 10 \int_0^{2\pi} \sin 2t dt = 10.$

P17. Să se demonstreze că planele normale la curba $x = \sin^2 t, y = \sin t \cos t, z = \cos t$ trec prin originea sistemului de coordonate.

Indicație. $\Pi_N : (x - \sin^2 t) \sin 2t + (y - \sin t \cos t) \cos 2t - (z - \cos t) \sin t = 0.$

Ecuția nu conține termen liber rezultă că planele normale trec prin originea sistemului.

P18. Să se arate că curbura curbei $x = t \cos t, y = t \sin t, z = at$ în origine este

$$K = \frac{1}{1+a^2}.$$

P19. Să se arate că curba $x = a \sin^2 t, y = a \sin 2t, z = a \cos^2 t$ este plană. Să se stabilească planul ei.

Indicație. $\frac{1}{T} = 0$, deci curba este plană. Planul curbei este $\Pi_O : x + z = a$.

P20. Să se determine punctele de pe curba $\vec{r} = \frac{1}{t}\vec{i} + \ln t \vec{j} + t\vec{k}$ unde normala principală este paralelă cu planul $5x + 2y - 5z - 4 = 0$.

Indicație. Se pune condiția de perpendicularitate între vectorul director al normalei principale și vectorul normal la plan $(5, 2, -5)$. Se obțin patru puncte corespunzătoare valorilor $t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = 1, t_4 = 2$.

P21. Să se determine tangentele la curba $\vec{r} = \frac{1}{2}t^4\vec{i} + \frac{1}{3}t^3\vec{j} + t^2\vec{k}$ care sunt paralele cu planul $3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Indicație. Din condiția de paralelism între vectorul director al tangentei și vectorul normal la plan $(3, -2, -2)$ rezultă $t_1 = -1, t_2 = \frac{2}{3}$.

P22. Să se determine punctele curbei $\vec{r} = \frac{1}{t}\vec{i} + t\vec{j} + (2t^2 - 1)\vec{k}$ ale căror binormale sunt perpendiculare pe dreapta de ecuații $x + y = 0, z = 4x$.

Indicație. $t_1 = -1, t_2 = 2$.

P23. Fiind dată curba $\vec{r} = t \cos(a \ln t) \vec{i} + t \sin(a \ln t) \vec{j} + b t \vec{k}, t > 0$, să se demonstreze că raportul între K și $\frac{1}{T}$ în orice punct al curbei este constant.

Indicație. $K = \frac{a\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2+b^2)t}, \frac{1}{T} = \frac{ab}{(1+a^2+b^2)t}, \frac{K}{\frac{1}{T}} = \frac{a\sqrt{1+a^2}}{b}.$

III.2. CONICE

III.2.1. Breviar theoretic

Nucleul unei forme pătratice afine f pe un plan E_2 se numește conică sau curbă de ordinul doi, adică

$$\Gamma = \text{Ker}f = f^{-1}(0) = \{P \in E_2 / f(P) = 0\} \quad (3.2.1)$$

Dacă forma pătratică afină este dată prin

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2(a_{10}x + a_{20}y) + a_{00} \quad (3.2.2)$$

atunci relația $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2(a_{10}x + a_{20}y) + a_{00} = 0$ se numește *ecuația generală* a conicei Γ .

Se poate demonstra că Γ este echivalentă cu una din următoarele mulțimi:

$$1) x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{cerc}) \quad (3.2.3)$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (\text{elipsă}) \quad (3.2.4)$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (\text{hiperbolă}) \quad (3.2.5)$$

$$4) y^2 = 2px \quad (\text{parabolă}) \quad (3.2.6)$$

$$5) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (\text{pereche de drepte concurente}) \quad (3.2.7)$$

$$6) x^2 - a^2 = 0 \quad (\text{pereche de drepte paralele}) \quad (3.2.8)$$

$$7) x^2 = 0, \quad (\text{pereche de drepte confundate}) \quad (3.2.9)$$

$$8) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (\text{mulțime cu un singur element } \{0\}) \quad (3.2.10)$$

$$9) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad \text{sau} \quad x^2 + a^2 = 0 \quad (\text{mulțimea vidă}) \quad (3.2.11)$$

Trecerea de la reperul cartezian $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ la un reper cartezian orientat pozitiv (numit reper canonic) față de care ecuația lui Γ să aibă forma cea mai simplă posibilă (numită ecuația redusă sau canonică) se realizează cu ajutorul unei roto-translații. Față de aceste roto-translații ecuația $f(x, y) = 0$ are următorii invarianți:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I = a_{11} + a_{22} \quad (3.2.12)$$

Pentru reducerea unei conice la forma canonică se procedează astfel:

- 1) se efectuează mai întâi o translație dacă $a_{12} = 0$;
- 2) se efectuează mai întâi o rotație folosind metoda valorilor proprii sau formulele rotației și apoi o translație (dacă este cazul).

a) *Metoda valorilor proprii.* Se consideră forma pătratică $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$.

Se determină valorile proprii λ_1, λ_2 (reale, distincte) și versorii proprii \vec{e}_1, \vec{e}_2 (ortogonali)

ai matricei simetrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ atașată formei pătratice. Se notează $R = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$,

$\det R = +1$ (în cazul în care $\det R = -1$, se renumerează valorile proprii). Rotația:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ reduce forma pătratică la expresia $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Versorii \vec{e}_1, \vec{e}_2 fixează

noul reper $x'Oy'$.

b) *Formulele rotației.* Dacă $a_{11} \neq 0$, atunci prin rotația plană:

$$R : \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (3.2.13)$$

de unghi θ dat de ecuația $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12} \cos 2\theta$ (3.2.14) ecuația conice devine:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2(a'_{10}x' + a'_{20}y') + a'_{00} = 0.$$

Se formează pătrate și se efectuează translația $T : x'' = x' + \frac{a'_{10}}{a'_{11}}, y'' = y' + \frac{a'_{20}}{a'_{22}}$ și se obține ecuația canonică.

Dacă o conică are centru de simetrie, atunci coordonatele sale sunt soluția

$$\text{sistemului: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{ sau, } \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases} \quad (3.2.15)$$

$$\text{Natura unei conice: } \begin{cases} \Delta = 0, & \text{conice degenerate (5-8)} \\ \Delta \neq 0, & \text{conicene degenerate (1-4 și 9)} \end{cases}$$

$$\text{Genul unei conice: } \begin{cases} \delta > 0, & \text{gen eliptic,} \\ \delta = 0, & \text{gen parabolic,} \\ \delta < 0, & \text{gen hiperbolic.} \end{cases}$$

Ecuația tangentei la Γ într-un punct $P_0(x_0, y_0)$ este:

$$T : (x - x_0)f_{x_0} + (y - y_0)f_{y_0} = 0. \quad (3.2.16)$$

Normala la Γ în $P_0(x_0, y_0)$ are ecuația:

$$N : (x - x_0)f_{x_0} + (y - y_0)f_{y_0} = 0. \quad (3.2.17)$$

Ecuația care determină direcțiile asimptotice este

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0, \quad (3.2.18)$$

iar ecuația unei asimptote este $lf_x + mf_y = 0$. (3.2.19)

Polara lui $P_0(x_0, y_0)$ în raport cu Γ are ecuația

$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{00} = 0. \quad (3.2.20)$$

Ecuația diametrului conjugat cu direcția (l, m) este: $lf_x + mf_y = 0$ (3.2.21)

Direcțiile axelor unei conice sunt date de:

$$(a_{11} - a_{22})lm + a_{12}(m^2 - l^2) = 0. \quad (3.2.22)$$

III.2.2. Probleme rezolvate

P1. Se dă conica $\Gamma : 3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$.

- a) să se determine natura și genul conice
 b) să se reducă ecuația la forma canonică.

Soluție. a) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -4 < 0$, $\delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$. Astfel Γ este o

conică de tip hiperbolic; b) Matricea formei pătratice a acestei matrice este $3x^2 - 4xy$

este $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristică a acestei matrice este $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ sau

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. Rădăcinile ecuației caracteristice sunt valorile proprii $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 4$.

Coordonatele (u_1, v_1) ale vectorului propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = -1$, constituie soluția sistemului $4u_1 - 2v_1 = 0, -2u_1 + v_1 = 0$ adică $(t, 2t), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Prin

normalizare se obține versorul propriu $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Analog, pentru $\lambda_2 = 4$ se găsește

$\vec{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$. Deoarece $\det R = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = -1$ (rotație și simetrie), pentru a avea

numai rotație se renumerează $\lambda'_1 = \lambda_2$, $\lambda'_2 = \lambda_1$, de unde rezultă $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1$.

Rotația $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sau $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') \end{cases}$ conduce la

$4x'^2 - y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0$. Se completează pătratele în x' și y' și se obține

$4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0$.

Se efectuează o translație a sistemului $x'Oy'$ în punctul $C_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ dată de

$$x' = X - \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y' = Y + \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ Se obține ecuația canonică a hiperbolei } \frac{X^2}{\frac{1}{2}} - \frac{Y^2}{2} - 1 = 0$$

care are vârfurile pe axa C_1x .

P2. Să se stabilească natura și genul conicei $\Gamma: 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$. Să se reducă la forma canonică folosind metoda roto-translației.

Soluție. Se calculează invarianții:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -100, \quad \delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Astfel } \Gamma \text{ este o conică nedegenerată de}$$

gen parabolic. Intrucât $a_{12} \neq 0$, se efectuează o rotație al cărei unghi θ este soluția ecuației $(a_{11} - a_{22})\sin 2\theta - 2a_{12} \cos 2\theta = 0$. Pentru conica dată, ecuația devine $3\text{tg}^2\theta - 8\text{tg}\theta - 3 = 0$, cu soluțiile $\text{tg}\theta_1 = 3, \text{tg}\theta_2 = -\frac{1}{3}$. Pentru $\text{tg}\theta_1 = 3$ se obține

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ și } \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}; \text{ formulele care dau rotația sistemului } xOy \text{ sunt}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y'). \text{ Față de sistemul rotit } x'Oy', \text{ ecuația conicei}$$

devine $y'^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{6}{\sqrt{10}}y' = 0$. Se completează pătratele și se obține

$$\left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10} - \frac{2}{\sqrt{10}}x'. \text{ Se efectuează translația } x' = X, y' = Y + \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ și se găsește}$$

ecuația canonică a parabolei $Y^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}X + \frac{9}{10}$. Pentru $\text{tg}\theta_2 = -\frac{1}{3}$ se obține

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ și } \cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}. \text{ Ecuația conicei devine } x'^2 - \frac{6}{\sqrt{10}}x' + \frac{2}{\sqrt{10}}y' = 0 \text{ prin}$$

rotația $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' - y'), y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y')$. Se completează pătratele și se efectuează

translația $x' = X + \frac{3}{\sqrt{10}}, y' = Y$ și se găsește ecuația canonică $X^2 = \frac{2}{\sqrt{10}}Y + \frac{9}{10}$ a parabolei raportată la sistemul canonic obținut prin roto-translație.

P3. Se dau punctul $A(1,-1)$, dreapta $D: 3x + 3y - 5 = 0$ și conica $\Gamma: x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0$. Se cer:

- polara punctului A în raport cu conica Γ ;
- Tangentele în A la conică;
- Centrul conice;
- Axele conice;
- Asimptotele conice;
- Polul dreptei D în raport cu Γ ;
- Tangentele la conică paralele cu dreapta D ;
- Diametrul conjugat direcției lui D .

Soluție a) Ecuația polarei punctului A în raport cu conica se obține prin dedublare (3.2.20). Se găsește astfel

$$1 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{2}(1 \cdot y - 1 \cdot x) + 2 \cdot \frac{1}{2}(x+1) + 4 \cdot \frac{1}{2}(y-1) - 2 = 0, \text{ adică } x + 3y - 3 = 0.$$

b) Intersecția dintre polară și conică este dată de

$$\begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ x^2 + 2xy + x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 8x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 + \sqrt{10} \\ x_1 = -4 - \sqrt{10} \end{cases}.$$

Punctele de tangență obținute sunt $B\left(-4 + \sqrt{10}, \frac{7 - \sqrt{10}}{3}\right)$, $C\left(-4 - \sqrt{10}, \frac{7 + \sqrt{10}}{3}\right)$.

Tangentele vor avea, astfel, ecuațiile:

$$AB: \frac{x-1}{\sqrt{10}-5} = \frac{y+1}{\frac{10-\sqrt{10}}{3}}; AC: \frac{x-1}{-\sqrt{10}-5} = \frac{y+1}{\frac{10+\sqrt{10}}{3}}.$$

c) Coordonatele centrului conice sunt soluțiile sistemului (3.2.15), $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$. Se

obține $C(-2,1)$. d) Dacă (l,m) este o direcție oarecare, $k = \frac{l}{m}$ este panta unei drepte

paralele cu direcția considerată. Ecuația (3.2.22) se scrie $(a_{11} - a_{22})k + a_{12}(k^2 - 1) = 0$, adică, $a_{11}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$. În acest caz avem $k^2 + k - 1 = 0$ cu soluția

$k_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ și $k_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Deoarece axele trec prin C , rezultă că ecuațiile celor

două axe sunt $\begin{cases} (1 + \sqrt{5})x + 2y + 2\sqrt{5} = 0 \\ (1 - \sqrt{5})x + 2y - 2\sqrt{5} = 0 \end{cases}$. e) Asimptotele conice sunt date de ecuațiile

(3.2.18) și (3.2.19), $l^2 + 2lm = 0$. Din $l = 0$ și $l + 2m = 0$ se găsesc direcțiile $(0, m)$ și $(-2, 1)$ și deci $0 \cdot (x + y + 1) + m(x + 2) = 0$, respectiv, $-2(x + y + 1) + 1 \cdot (x + 2) = 0$. Deci asimptotele lui Γ sunt $x + 2 = 0$ și $x + 2y = 0$. f) Fie $M_0(x_0, y_0)$ polul dreptei D . Prin

urmare, polara lui M_0 în raport cu Γ este D , adică

$$x(x_0 + y_0 + 1) + y(x_0 + 2) + x_0 + 2y_0 - 2 = 0.$$

Din condiția ca această dreaptă să fie D se obține sistemul

$$\frac{x_0 + y_0 + 1}{3} = \frac{x_0 + 2}{3} = \frac{x_0 + 2y_0 - 2}{-5}. \text{ Rezultă } M_0\left(-\frac{5}{4}, 1\right).$$

g) Orice dreaptă paralelă cu dreapta D are ecuația $x + y + \lambda = 0$. Se intersectează cu conica și se pune condiția ca

ecuația găsită să aibă rădăcina dublă. Se obține $\begin{cases} x + y + \lambda = 0 \\ x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$. Din

$(\lambda + 1)^2 - (4\lambda + 2) = 0$ rezultă $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ cu $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Tangentele

căutate au ecuațiile $x + y + 1 \pm \sqrt{2} = 0$. h) Panta dreptei D este $\frac{m}{l} = -1$. Diametrul

conjugat direcției lui D are ecuația (3.2.21), adică, $2x + 2y + 2 - (2x + 4) = 0$, sau, $y - 1 = 0$.

P4. Să se discute natura conice $\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2x + 2y + 3 = 0, \lambda \in R$.

Soluție. Relativ la reducerea la forma canonică se mai pot formula teoreme ce se rezumă în următorul tabel:

	r'	r	$sig\delta$	Ecuția normală	Denumirea conice
$\Delta \neq 0$ conice nedegenerate	3	2	$\delta > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; I\Delta < 0$	Elipsă
				$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0; I\Delta > 0$	$\Gamma = \emptyset$, elipsă vidă (imaginară)
			$\delta < 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$	hiperbolă
	1	$\delta = 0$	$y^2 = 2px$	parabolă	
$\Delta = 0$ conice degenerate	2	2	$\delta > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\Gamma = \{(0,0)\}$, conică nulă
			$\delta < 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Pereche de drepte concurente
		1	$\delta = 0$	$x^2 - a^2 = 0$	Pereche de drepte paralele
				$x^2 + a^2 = 0$	$\Gamma = \emptyset$, perechea vidă de drepte paralele
	1	1	$\delta = 0$	$x^2 = 0$	Dreapta dublă

$\delta = \lambda^2 - 1$, $\Delta = (3\lambda + 1)(\lambda - 1)$, $I = 2\lambda$. Studiind semnul acestor invarianți,

λ	$-\infty$	-1	-1/3	0	1	$+\infty$
Δ	+++++	0	-----	0	+++++	+++++
δ	+++++	0	-----	0	+++++	+++++
I	-----	0	+++++	+++++	+++++	+++++
$\delta I \Delta$	-----	0	+++++	0	-----	0

rezultă:

- $\lambda \in (-\infty, -1)$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $I < 0$, $I\Delta < 0$, elipse reale

- $\lambda = -1$, $\Delta > 0$, $\delta = 0$, parabolă

- $\lambda \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$, $\Delta > 0$, $\delta < 0$, hiperbolă

- $\lambda = -\frac{1}{3}$, $\Delta = 0$, $\delta < 0$, pereche de drepte concurente

- $\lambda \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, $\Delta < 0$, $\delta < 0$, hiperbolă
- $\lambda = 0$, $\Delta < 0$, $\delta < 0$, hiperbolă ($I\Delta = 0$, hiperbolă echilaterală)
- $\lambda \in (0, 1)$, $\Delta < 0$, $\delta < 0$, hiperbole
- $\lambda = 1$, $\Delta = 0$, $\delta = 0$, pereche de drepte paralele
- $\lambda \in (1, \infty)$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $I > 0$, $I\Delta > 0$, elipsă imaginară

P5. Să se determine α astfel încât ecuația $2x^2 - xy - y^2 + \alpha x - 5y + 14 = 0$ să reprezinte două drepte.

Soluție. Din $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1/2 & \alpha/2 \\ -1/2 & -1 & -5/2 \\ \alpha/2 & -5/2 & 14 \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{5\alpha}{4} - 44 = 0$ se obțin

$\alpha_1 = 11, \alpha_2 = -16$. Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 2 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{vmatrix} = -9/4 < 0$ conica este de tip hiperbolă.

Pentru $\alpha = 11$ se obțin dreptele $x - y + 2 = 0$, $2x + y + 7 = 0$.

III.2.3. Probleme propuse

P1. Să se studieze natura și genul conicelor și să se reducă la forma canonică:

- a) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$;
- b) $2x^2 - 6xy + 10y^2 - 8x + 12y + 2 = 0$;
- c) $x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0$;
- d) $7x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 6y + 1 = 0$;
- e) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x - 10y + 5 = 0$;
- f) $x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;

Soluție. a) conică nedegenerată ($\Delta < 0$) de tip eliptic ($\delta > 0$), $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{4} - 1 = 0$;

b) conică nedegenerată ($\Delta < 0$) de tip eliptic ($\delta > 0$), $\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{6} - 1 = 0$; c) conică

nedegenerată ($\Delta < 0$) de tip hiperbolic ($\delta < 0$), $\frac{X^2}{\frac{1}{2}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{6}} - 1 = 0$; d) conică nedegenerată

($\Delta < 0$), de tip hiperbolic ($\delta < 0$), $\frac{X^2}{\frac{1}{1}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{1}} + 1 = 0$; e) conică nedegenerată de tip

parabolic ($\delta = 0$), $Y^2 = \frac{22}{25}X$; f) conică nedegenerată de tip parabolic ($\delta = 0$), $Y^2 = 2X$.

P2. Ce conică reprezintă ecuația $4x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y + 3 = 0$?

Indicație. $\Delta = 6 \neq 0$, $\delta = 3 > 0$, $I = 5$, $I\Delta = 30 > 0$, elipsă imaginară.

P3. Să se determine coeficienții λ și μ din ecuația $2x^2 + \lambda xy + 2y^2 - 7x + \mu y + 3 = 0$, astfel încât această ecuație să reprezinte două drepte paralele.

Indicație. Se impun condițiile $\Delta = 0$, $\delta = 0$. Se obține $\lambda = 4$, $\mu = -7$ sau $\lambda = -4$, $\mu = 7$.

P4. Să se discute natura conicei $\alpha x^2 + 4xy + (\alpha - 3)y^2 + 10x + 3 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indicație. $\alpha \in (-\infty, -1)$, elipse reale; $\alpha = -1$, parabolă; $\alpha \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)$, hiperbole; $\alpha = \frac{3}{2}$, hiperbolă echilaterală; $\alpha \in \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$, hiperbole; $\alpha = \frac{7}{3}$, perche de drepte concurente; $\alpha \in \left(\frac{7}{3}, 4\right)$, hiperbole; $\alpha = 4$, parabolă; $\alpha \in (4, 9)$, elipse reale; $\alpha = 9$, perche de drepte secante imaginare; $\alpha \in (9, \infty)$, elipse imaginare.

P5. Să se studieze conica $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$.

Indicație. Două drepte confundate, $(x - 3y + 2)^2 = 0$.

P6. Pentru ce valori ale lui λ și μ conicele din familia $\lambda x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + \mu y - 13 = 0$ sunt a) conice cu centru, b) conice nedegenerate fără centru.

Indicație. a) $\lambda \neq 4$; $\lambda = 4$ și $\mu \neq 6$.

P7. Să se găsească centrul și asimptotele conicei $4xy - 3y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$.

Indicație. $C(1,1)$; Din $4lm - 3m^2 = 0$ se găsesc direcțiile $(0,l)$ și $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$, deci, $y = 1$ și $4x - 3y - 1 = 0$.

P8. În punctele de intersecție ale conicei $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$ cu dreapta $3x - y + 6 = 0$ se duc tangentele la această conică. Să se găsească punctul de intersecție al acestor tangente.

Indicație. Punctele de intersecție ale conicei cu dreapta sunt $(0,6)$ și $(-2,0)$. Tangentele în aceste puncte au ecuațiile $-5x + 3y = 18$, respectiv, $-2x - 2y = 4$. Se obține punctul $(-3,1)$ de intersecție al celor două tangente.

P9. Se dau conicele $\Gamma_1 : 6x^2 - 5xy + y^2 - 22x + 9y - 4 = 0$, $\Gamma_2 : 3x^2 - 2xy - y^2 - 10x - 2y + 12 = 0$ și se cere:

- Să se arate că au același centru
- Să se determine diametrii lui Γ_1 care sunt conjugate direcțiilor asimptotice ale lui Γ_2 .
- Să se determine ecuațiile axelor conicei Γ_1 .

Indicație. a) $C(1,-2)$; b) $3l^2 - 2lm - m^2 = 0 \Rightarrow (1,1), (1,-3)$. Diametrii conjugate au ecuațiile $7x - 3y - 13 = 0, 27x - 11y - 49 = 0$, corespunzător direcțiilor (l,m) ale direcțiilor asimptotice ale lui Γ_2 . c) Pantele axelor $k = \frac{m}{l}$ sunt rădăcinile ecuației $-k^2 + 2k + 1 = 0$. Se obține $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Ecuațiile axelor sunt $y + 2 = (1 \pm \sqrt{2})(x - 1)$.

P10. Să se scrie ecuația conicei care trece prin punctul $A(0,-1)$, are centrul în $B(1,1)$ și admite dreapta $x + 2y + 1 = 0$ drept directoare.

Indicație. $(5x - 1)^2 + (5y + 3)^2 = 5(x + 2y + 1)^2$ sau $(4x + 1)^2 + (4y + 6)^2 = 5(x + 2y + 1)^2$.

P11. Să se scrie ecuația parabolei care trece prin punctele $A(0,0)$, $B(0,1)$ și care admite dreapta $x + y + 1 = 0$ drept axă.

Indicație. $(x + y)^2 + 5x - y = 0$.

P12. Să se scrie ecuația elipsei cu semiaxele 2 și 1 și care admite dreptele $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ drept diametrii conjugăți.

Indicație. $(x - y + 1)^2 + 4(x + y - 1)^2 = 8$.

P13. Se dă conica $3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$. Să se scrie diametrii conjugăți care fac între ei un unghi de 45° .

Indicație $2y - 5 = 0$ și $3x - 3y - 2 = 0$; $6x - 12y + 11 = 0$ și $3x - y - 7 = 0$.