Profesorul CORNELIU I. GEORGESCU 1896-1969

La aniversarea Centenarului Societăţii de Ştiinţe Matematice din România

Simona Miu, prof. Craiova

Profesorul Corneliu I Georgescu s-a născut la 19 august 1896 în Roşiorii de Vede, jud. Teleorman. A urmat şcoala primară în Roşiorii de Vede, cursul inferior de liceu la ,,Sf. Sava" şi cursul superior la liceul ,,Gh.Lazăr – Bucureşti.

A absolvit Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Bucureşti în anul 1924 ca şef de promoţie având coleg pe marele matematician şi poet Dan Barbilian.

S-a dedicat învăţământului liceal fiind numit profesor la Liceul ,,Fraţii Buzeşti" din Craiova începând cu 1 septembrie 1924, liceu la care a profesat peste 40 de ani.

A avut o activitate rodnică, remarcându-se prin devotamentul şi tactul pedagogic inegalabil în cadrul liceului şi al colectivităţii locale. A fost director adjunct şi director al şcolii o perioadă destul de mare. A activat pe linie sindicală şi a îndeplinit onorific sarcini în administrarea liceului.

În perioada 1933-1935 a fost îndrumătorul Comitetului de redacţie al ,,Revistei de matematică a elevilor craioveni" – prima publicaţie din Oltenia destinată promovării învăţământului matematic. După încetarea apariţiei acestei reviste a coordonat rubrica de matematică a revistei elevilor liceului.

A fost membru al Comitetului de conducere al revistei ,,Pitagora".

A colaborat permanent la Gazeta Matematică publicând 168 de probleme şi 12 note matematice. A fost preşedinte al Filialei Oltenia a Societăţii de Ştiinţe matematice în perioada 1949-1964.

S-a remarcat ca un valoros autor de manuale şcolare publicând: manuale de Aritmetică pentru clasele I, II, III; pentru gimnazii şi licee, Trigonometrie clasa a VI-a, Geometrie analitică clasa a VIII-a, Algebră clasele IV, V, VI; Algebră superioară clasele a VII-a şi a VIII-a de liceu.

În 1946 a publicat ,,Culegerea de exerciţii şi probleme de aritmetică, geometrie şi algebră pentru primele clase secundare, culegere care cuprindea 1312 probleme.

Lucrarea ,,Matematici distractive – probleme, pătrate magice, curiozităţi şi recreaţii matematice" s-a bucurat de un succes deosebit în rândul elevilor şi profesorilor de matematică.

A decedat pe 4 februarie 1969.

O inegalitate echivalentă cu inegalitatea C-B-S

D.M. Bătineţu Giurgiu şi N. Ivăşchescu

În cele ce urmează vom stabili, printr-o metodă simplă, o inegalitate echivalentă cu inegalitatea Caucy-BUniakovski-Schwarz, (C-B-S), dând totodată două aplicaţii importante ale acestei inegalităţi.

Lemă: Dacă a, b$\in\mathbf{R}_+^*$, c, d$\in\mathbf{R}$, atunci: $$(a+b)\cdot\left(\frac{c^2}{a}+\frac{d^2}{b}\right)\ge(c+d)^2 \qquad (1)$$

cu egalitate, dacă şi numai dacă există t$\in\mathbf{R}$ astfel încât c=at, d=bt.

Demonstraţie. Avem: $(a+b)\cdot\left(\frac{c^2}{a}+\frac{d^2}{b}\right)=c^2+\frac{ad^2}{b}+\frac{bc^2}{a}+d^2\ge c^2+d^2+2\sqrt{\frac{abc^2d^2}{ab}}=c^2+d^2+2\sqrt{c^2d^2}=$

$=c^2+d^2+2\cdot|c\cdot d|\ge c^2+d^2+2cd=(c+d)^2$ ceea ce era de demonstrat.

Avem egalitate dacă şi numai dacă: $(a+b)\cdot\left(\frac{c^2}{a}+\frac{d^2}{b}\right)=\left(c^2+d\right)^2\Leftrightarrow c^2+\frac{ad^2}{b}+\frac{bc^2}{a}+d^2=c^2+2cd+d^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2d^2+b^2c^2=2abcd\Leftrightarrow(ad-bc)^2=0\Leftrightarrow ad=bc\Leftrightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}=t\Leftrightarrow c=at,\ d=bt.$

Inegalitatea (1) este echivalentă cu inegalitatea: $$\frac{c^2}{a}+\frac{d^2}{b}\ge\frac{(c+d)^2}{a+b} \qquad (2)$$

Propoziţie. Dacă $x_k\in\mathbf{R}_+^*$, $y_k\in\mathbf{R}$, $\forall k=\overline{1,n}, n\ge 2$, atunci $$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\cdot\sum_{k=1}^n\frac{y_k^2}{x_k}\ge\left(\sum_{k=1}^n y_k\right)^2 \qquad (3)$$

cu egalitate dacă şi numai dacă există t$\in\mathbf{R}$, astfel încât $y_k=t\cdot x_k$, $\forall k=\overline{1,n}$.

Demonstraţie: Inegalitatea (3) este echivalentă cu: $$\sum_{k=1}^n\frac{y_k^2}{x_k}\ge\frac{\left(\sum_{k=1}^n y_k\right)^2}{\sum_{k=1}^n x_k} \qquad (4)$$

Dacă în inegalitatea (2) facem $a=x_1$, $b=x_2$, $c=y_1$, $d=y_2$ atunci obţinem: $$\frac{y_1^2}{x_1}+\frac{y_2^2}{x_2}\ge\frac{(y_1+y_2)^2}{x_1+x_2} \qquad (i_1)$$

Dacă în inegalitatea (2) facem a=x_1+x_2, b=x_3, c=y_1+y_2, d=y_3 obţinem: $\frac{(y_1+y_2)^2}{x_1+x_2}+\frac{y_3^2}{x_3}\ge\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{x_1+x_2+x_3}$ (i_2)

Dacă în inegalitatea (2) luăm a=$x_1+x_2+x_3$, b=x_4, c=$y_1+y_2+y_3$, d=y_4 rezultă: $\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{x1+x2+x3}+\frac{y_4^2}{x_4}\ge\frac{(y_1+y_2+y_3+y_4)^2}{x_1+x_2+x_3+x_4}$ (i_3)

……..

Dacă în inegalitatea (2) luăm a= $\sum_{k=1}^{n-2}x_k, b=x_{n-1}, c=\sum_{k=1}^{n-2}y_k$, d=y_{n-1} obţinem: $\frac{\left(\sum_{k=1}^{n-2}y_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n-2}x_k}+\frac{y_{n-1}^2}{x_{n-1}}\ge\frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1}y_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n-1}x_k}$ (i_{n-2})

În fine luând în (2), a= $\sum_{k=1}^{n-1}x_k, b=x_n, c=\sum_{k=1}^{n-1}y_k, =y_n$ rezultă $\frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1}y_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n-1}x_k}+\frac{y_n^2}{x_n}\ge\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}x_k}$ (i_{n-1})

Adunând membru cu membru relaţiile (i_1), (i_2), …, (i_{n-1}), după reducerea termenilor asemenea, deducem că:

$k=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{x_k}\ge\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}x_k}$ adică relaţia (4) şi deci propoziţia este demonstrată. Inegalitatea (3) este echivalentă cu inegalitatea (5): dacă $u_k\in\mathbf{R}_+^*$, $v_k\in\mathbf{R}$, $\forall k=\overline{1,n}, n\ge 2$, atunci are loc inegalitatea C-B-S: $\left(\sum_{k=1}^{n}u_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}v_k^2\right)\ge\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot v_k\right)^2$ (5)

Inegalităţile (3) şi (5) sunt echivalente. Într-adevăr:

a) (3)⇒(5). Dacă în (3) luăm $x_k=u_k^2$, $y_k=u_k\cdot v_k$, $\forall k=\overline{1,n}$ obţinem:

$\left(\sum_{k=1}^{n}u_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k^2\cdot v_k^2}{u_k^2}\right)\ge\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot v_k\right)^2\Leftrightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}u_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}v_k^2\right)\ge\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot v_k\right)^2$ adică relaţia (5).

b) Reciproc, (5)⇒(3). Dacă în relaţia (5) luăm $u_k=\sqrt{x_k}, v_k=\frac{y_k}{\sqrt{x_k}}, \forall k=\overline{1,n}$, atunci obţinem:

$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{x_k}\right)\ge\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\cdot\frac{y_k}{\sqrt{x_k}}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^2$ adică relaţia (3).

Aplicaţii:

A1. Dacă în inegalitatea (3) luăm $x_k=1$, $y_k\in\mathbf{R}_+^*$, $\forall k=\overline{1,n}$ rezultă că:

$n\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k^2\ge\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^2\Leftrightarrow\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k^2\ge\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k^2}\ge\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k$ adică media pătratică Q_n a numerelor y_1, y_2, …, y_n este mai mare decât media aritmetică A_n a numerelor y_1, y_2, …, y_n.

A2. Dacă în inegalitatea (3) luăm $x_k\in\mathbf{R}_+^*$, $y_k=1$ $\forall k=\overline{1,n}$ deducem că: $\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)\ge n^2$, adică media aritmetică A_n a numerelor x_1, x_2, …, x_n este mai mare decât media armonică H_n a numerelor x_1, x_2, …, x_n.

Cercul lui Tucker*

de Ion Pătraşcu şi George Mărgineanu, prof. Craiova

Articolul îşi propune să demonstreze teorema relativă la cercul Tucker cu ajutorul a două leme accesibile elevilor din gimnaziu precum şi o modalitate de a construi un cerc Tucker într-un triunghi.

** (Robert Tucker (1832+1905) – matematician englez)*

Definiţie. Dacă ABC este un triunghi şi $A_1\in AB$, $A_2\in AC$ astfel încât $\angle AA_1A_2\equiv\angle ACB$, A_1A_2ÖBC, atunci spunem că dreapta A_1A_2 este antiparalelă cu BC.

Observația 1. Dacă A_1A_2 este antiparalelă cu BC atunci patrulaterul A_1A_2CB este inscriptibil (vezi fig.1). De asemenea dacă un cerc dus prin B şi C taie laturile ABC în A_1 şi A_2, (A_1A_2OBC) spunem că A_1A_2 şi BC sunt antiparalele.

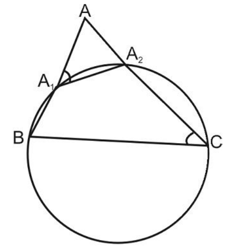


Fig.1

Lema 1. Dacă în triunghiul ABC dreapta A_1A_2 este antiparalelă cu BC, dreapta A_2B_1 este paralelă cu AB ($B_1\in BC$) şi dreapta B_1B_2 este antiparalelă cu AC ($B_2\in AB$) atunci $(A_1A_2)\equiv(B_1B_2)$ şi punctele A_1, A_2, B_1, B_2 sunt conciclice.

Demonstrație. Deoarece A_1A_2 şi B_1B_2 sunt antiparalele cu BC respectiv AC avem $\angle AA_1A_2\equiv\angle ACB$, $\angle BB_2B_1\equiv\angle ACB$. Prin urmare $\angle AA_1A_2\equiv\angle BB_2B_1$ cu consecințe $\angle A_2A_1B_2\equiv\angle B_1B_2A_1$ (1). Deoarece $A_2B_1//B_1B_2$ rezultă că patrulaterul $A_1A_2B_1B_2$ este trapez (în ipoteza $m(\angle C)\neq 90^0$). Ținând seama şi de relația (1) trapezul $A_1A_2B_1B_2$ este isoscel, deci $A_1A_2\equiv B_1B_2$. Se ştie că un trapez isoscel este patrulater inscriptibil şi prin urmare punctele A_1, A_2, B_1, B_2 sunt conciclice. Dacă $m(\angle C)=90^0$ va rezulta că $A_1A_2B_1B_2$ este dreptunghi şi concluzia rămâne adevărată.

Observația 2. Dacă antiparalelele A_1A_2 şi B_1B_2 sunt ca în figura 3 se demonstrează în mod analog că patrulaterul $A_1B_1A_2B_2$ este trapez isoscel.

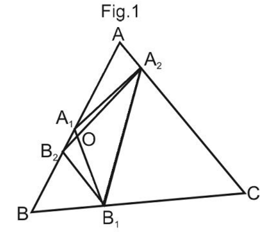


Fig.2

Lema2. Dacă în triunghiul ABC dreapta A_1A_2 este antiparalelă cu BC, dreapta B_1B_2 este antiparalelă cu AC ($B_1\in BC$, $B_2\in AB$) şi $(A_1A_2)\equiv(B_1B_2)$ atunci $A_1B_2//A_2B_1$ şi punctele A_1, A_2, B_1, B_2 sunt conciclice.

Demonstrație. Din faptul că A_1A_2 şi B_1B_2 sunt antiparalele (vezi fig.2) cu BC respectiv AC rezultă că $\angle AA_1A_2\equiv\angle BB_2B_1$ şi de aici obținem că $\angle A_2A_1B_2\equiv B_1B_2A_1$. Notăm $\{O\}=A_1B_1\cap A_2B_2$, avem $\Delta A_2A_1B_2\equiv\Delta B_1B_2A_1$ (L.U.L.) cu consecințele:
$\angle A_2B_2A_1\equiv\angle B_1A_1B_2$ şi $(A_1B_1)\equiv(A_2B_2)$. Triunghiul OA_1B_2 este isoscel şi de asemenea triunghiul OB_1A_2 este isoscel. Avem $\angle B_2A_1O=\dfrac{180^0-A_1\hat{O}B_2}{2}$ şi $\angle A_1B_1O=\dfrac{180^0-A_2\hat{O}B_1}{2}$ prin urmare $\angle B_2A_1O\equiv A_2A_1O$ ceea ce conduce la $A_1B_2//A_2B_1$. Patrulaterul $A_1A_2B_1B_2$ este prin urmare, în general, trapez isoscel, deci $(A_1A_2)\equiv(B_1B_2)$ şi punctele A_1, A_2, B_1, B_2 sunt conciclice. Dacă $m(\angle ACB)=90^0$, patrulaterul $A_1A_2B_1B_2$ este dreptunghi şi concluzia lemei se păstrează.

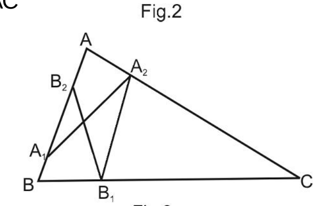


Fig.3

Observația 3. Lema 2 arată că extremitățile a două antiparalele congruente duse într-un triunghi sunt puncte conciclice.

Teoremă. Dacă ABC este un triunghi, dreapta A_1A_2 este antiparalelă cu BC, dreapta A_2B_1 este paralelă cu AB ($B\in BC$), dreapta B_1B_2 este antiparalelă cu AC ($B_2\in AB$), dreapta B_2C_1 este paralelă cu BC ($C_1\in AC$) şi dreapta C_1C_2 este antiparalelă cu AB ($C_2\in BC$), atunci:

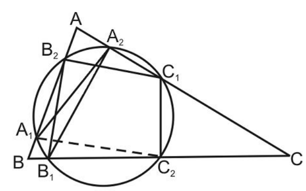


Fig.4

(i) C_1A_1 este paralelă cu AC; (ii) $(A_1A_2)\equiv(B_1B_2)\equiv(C_1C_2)$; (iii) Punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sunt conciclice (cercul lui Tucker)

Demonstrație. Din Lema 1 rezultă $(A_1A_2)\equiv(B_1B_2)$ (1) şi A_1, A_2, B_1, B_2 conciclice (2). De asemenea rezultă $(B_1B_2)\equiv(C_1C_2)$ (3) şi B_1, B_2, C_1, C_2 conciclice (4). Din relația (1) şi (3) obținem (ii). Aplicând Lema 2 pentru antiparalelele congruente A_1A_2 şi C_1C_2 obținem (i) şi faptul că punctele A_1, A_2, C_1, C_2 sunt conciclice (5). Deoarece A_2B_1 este paralelă cu AB şi C_1C_2 este antiparalelă cu AB rezultă că C_1C_2 şi A_2B_1 sunt antiparalele, prin urmare punctele C_1, C_2, B_1, A_2 sunt conciclice (6). Relațiile (2), (4), (5) şi (6) arată că punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sunt conciclice deci este adevărată relația (iii).

Observația 4. **a)** în (1) Cercul lui Tucker este definit ca cercul ce conține extremitățile a trei antiparalele egale ale triunghiului ABC. **b)** Din teorema demonstrată se deduce un mod de a construi trei antiparalele congruente într-un triunghi şi implicit cercul lui Tucker. **c)** Teorema arată de asemenea că plecând dintr-un punct situat pe o latură a triunghiului şi construind alternativ antiparalele la o latură, paralela la latura următoare ş.a.m.d. după 6 paşi hexagonul $(A_1A_2B_1B_2C_1C_2)$ se închide (ajungem în punctul din care am plecat.

Bibliografie:

[1] Traian Lalescu ,,*Geometria triunghiului*", Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.
[2] Roger A. Johnson, ,,*Advanced Euclidian Geometry*", Dover Publications, Inc. Mineola, New York

Aplicații metrice ale unei ecuații de gradul al II-lea

de Ioan Săcăleanu, prof. Liceul Teoretic ,,Ştefan cel Mare, Hîrlău

Fie ΔABC şi un punct variabil $D\in BC$. Considerăm ecuația: $a^2\cdot X^2-(a^2-c^2+b^2)\cdot X+b-AD=0$ (1)
unde AD este parametru.

1. Pentru orice poziție $D\in BC$, ecuația (1) are numai soluții reale. Discriminantul ecuației este:
$\Delta=(a^2-c^2+b^2)^2-4a^2(b^2-AD^2)=4aAD+[(a-b)^2-c^2]\cdot[(a+b)^2-c^2]=4a^2AD^2+(a-b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)(a+b+c)=4a^2AD^2-16p(p-a)\cdot(p-b)(p-c)$ unde $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul ΔABC. Folosind formula lui Heron, se obține $\Delta=4a^2AD^2-16S^2$.

Ducând AH⊥BC, H∈BC şi folosind formula ariei S=$\frac{AH\cdot a}{2}$ şi, apoi teorema lui Pitagora deducem că $\Delta=4a^2\cdot HD^2\geq 0$.
Prin urmare, ecuația (1) are numai soluții reale.

2. Analizând ordinea punctelor B, H, D, C pe dreapta BC, se obține că una din soluțiile ecuației este $x_1=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$.

Deci, dacă C∈(BD] atunci $x_1=-\frac{CD}{BC}$, iar dacă C∉(BD] atunci $x_1=\frac{CD}{BC}$.

3. Ecuația (1) are o singură soluție dacă şi numai dacă D este proiecția lui A pe dreapta BC.

………

Particularizând poziția punctului D, vom deduce unele relații metrice în triunghiul oarecare şi în cel dreptunghic.

1. Teorema lui Stewat:

O soluție a ecuației este $x_1=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$. Înlocuind în ecuație obținem succesiv:

$$a^2\cdot\left(\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}\right)^2-\left(a^2-c^2+b^2\right)\cdot\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}+b^2-AD^2=0\Leftrightarrow BC^2\cdot\frac{CD^2}{BC^2}-\left(BC^2-AB^2+AC^2\right)\cdot\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}+AC^2-AD^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{BC}\cdot CD^2-BC^2\cdot\overline{DC}+AB^2\cdot\overline{DC}-AC^2\cdot\overline{DC}+AC^2\cdot\overline{BC}-AD^2\cdot\overline{BC}=0\Leftrightarrow\overline{BC}\cdot\overline{DC}\cdot\left(\overline{DC}-\overline{BC}\right)+AB^2\cdot\overline{DC}+$$

$+AC^2\cdot\left(\overline{BC}-\overline{DC}\right)-AD^2\cdot\overline{BC}=0$. Cum $\overline{DC}-\overline{BC}=\overline{DB}$ obținem **teorema lui Stewart**.

$\overline{BC}\cdot\overline{DC}\cdot\overline{DB}+AB^2\cdot\overline{DC}=AC^2\cdot\overline{DB}+AD^2\cdot\overline{BC}$.

Dacă C∈(BD] atunci $AB^2\cdot DC+AD^2\cdot BC=AC^2\cdot DB+BC\cdot DC\cdot DB$ (**teorema lui Stewart** în ΔABD şi **ceviana AC**).

Dacă C∉(BD] atunci $AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD=AD^2\cdot CB+BC\cdot DC\cdot DB$ (**teorema lui Stewart** în ΔABC sau Δ ACD şi **ceviana AD**).

2. Teorema lui Pitagora generalizată

Considerăm că D este proiecția lui A pe dreapta BC. Rezultă D≡H şi că ecuația (1) are o singură soluție şi anume $x_1=x_2=\frac{a^2-c^2+b^2}{2a^2}$. Dar, soluția este $x_1=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$. Prin urmare, $\frac{a^2-c^2+b^2}{2a^2}=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}\Rightarrow BC^2-AB^2+AC^2=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}=2\cdot\overline{BC}^2$

Obținem **teorema lui Pitagora generalizată**: $AB^2=BC^2+AC^2-2\cdot\overline{HC}\cdot\overline{BC}$.

3. Teorema medianei

Luând D≡M, mijlocul segmentului BC obținem $x=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}=\frac{1}{2}$, o soluție a ecuației (1). Înlocuind în (1), deducem lungimea medianei: $a^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(a^2-c^2+b^2\right)+b^2-AM^2=0\Leftrightarrow AM^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$ (**teorema medianei**).

4. Lungimea bisectoarei interioare

Din teorema bisectoarei rezultă că D∈(BC) şi că o soluție este $x_1=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}=\frac{b}{b+c}$. Folosind relațiile lui Viette, din

$x_1\cdot x_2=\frac{b^2-AD^2}{a^2}$ obținem $x_2=\frac{b^2-AD^2}{a^2}\cdot\frac{b+c}{b}$. Înlocuind în $x_1+x_2=\frac{a^2-c^2+b^2}{a^2}$ avem succesiv:

$$\frac{b}{b+c}+\frac{b^2-AD^2}{a^2}\cdot\frac{b+c}{b}=\frac{a^2-c^2+b^2}{a^2}\Leftrightarrow b^2\cdot a^2+\left(b^2-AD^2\right)\cdot(b+c)^2=\left(a^2-c^2+b^2\right)\left(b^2+bc\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2-AD^2=\frac{bca^2-b^2c^2-bc^3+b^4+b^3c}{(b+c)^2}.$$

$$AD^2=\frac{b^4+2b^3c+b^2c^2-bca^2+b^2c^2+bc^3-b^4-b^3c}{(b+c)^2}\Leftrightarrow AD^2=\frac{b^3c+2b^2c^2-bca^2+bc^3}{(b+c)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AD^2=\frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)\Leftrightarrow AD^2=\frac{4bc\cdot p(p-a)}{(b+c)^2}$$ (**lungimea bisectoarei**).

5. Teorema catetei

Fie ΔABC dreptunghic în A. Ținând cont de teorema lui Pitagora ecuația (1) devine:

$a^2\cdot X^2-2b^2X+b^2-AD^2=0$ (2)

Luând D≡H obținem singura soluție a ecuației (2) şi anume $x_1=x_2=\frac{b^2}{a^2}$. Dar

$x=\frac{\overline{HC}}{\overline{BC}}=\frac{HC}{BC}\Rightarrow\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{HC}{BC}\Leftrightarrow AC^2=BC\cdot HC$ (**teorema catetei**).

6. Teorema a doua a înălţimii

Luând D≡H obţinem singura soluţie a ecuaţiei (2) şi anume x$=\frac{CH}{BC}=\frac{b^2}{a^2}$. Înlocuind în (2), obţinem

$a^2\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}\right)-2\frac{b^4}{a^2}+b^2-AH^2=0\Leftrightarrow AH^2=\frac{b^2\cdot\left(a^2-b^2\right)}{a^2}$. Cu teorema lui Pitagora deducem că

$\Leftrightarrow AH^2=\frac{b^2\cdot c^2}{a^2}\Leftrightarrow AH=\frac{b\cdot c}{a}$ (**teorema a II-a a înălţimii**).

O problemă şi mai multe soluţii

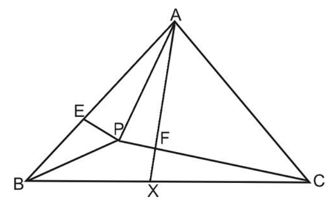
Mariana Mitea, prof. Cugir

În revista Minus nr.2/2008 a fost propusă următoarea problemă frumoasă, pornind de la premisa că elevii trebuie obişnuiţi din clasele VI-VII cu modalitatea de a executa construcţii ajutătoare în rezolvarea problemelor, voi prezenta mai multe soluţii ale problemei:

(Babis Stergiou) În interiorul unui triunghi isoscel cu $\angle A=100^0$ se consideră punctul P astfel încât $\angle PAB=20^0$ şi $\angle PCB=10^0$. Demonstraţi că PA=PB.

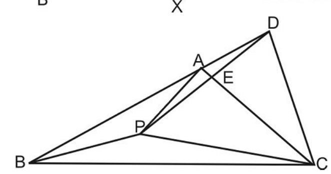
Soluţie: **Metoda I**

Fie X∈[BC] astfel încât $\angle PAX=20^0$, iar AX∩PC={F}. În ΔABC isoscel cu $\angle A=100^0$ avem $\angle ABC=\angle ACB=40^0$ de unde $\angle APC=30^0$ şi $\angle PAC=80^0$ ca apoi $\angle APC=70^0$. În ΔAPF vom avea $\angle AFP=90^0$ şi ducem PE⊥AB, atunci ΔAPE≡ΔAPF (I.U$_a$) din care AE≡AF. Dar în ΔAFC dreptunghic în F avem AF$=\frac{AC}{2}=\frac{AB}{2}=AE$. În ΔABP avem PE înălţime şi mediană deci Δ este isoscel şi deci PA=PB.



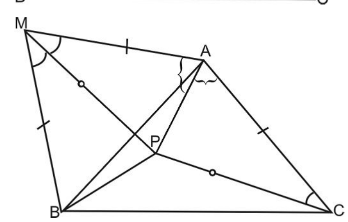
Metoda II

Fie ΔPDC echilateral (B şi C deoparte şi de alta a lui AC). Cum $\angle ACP=30^0$ obţinem EC bisectoarea $\angle PCD$, deci mediatoarea lui PD, atunci $\angle PAE=\angle EAD=80^0$ şi prin urmare găsim că punctele B, A, D sunt coliniare, respectiv $\angle APD=\angle ADP=10^0=\frac{\widehat{BAP}}{2}$ iar atunci $\angle BDC=\angle BCD=70^0$. Prin urmare ΔBDP≡ΔBCP (L.L.L), astfel $\angle DBP=\angle CBP=20^0$, ce face ca ΔABP isoscel şi PA=PB.



Metoda III

Fie ΔMAB echilateral (M şi C deoparte şi de alta a lui AB). Cum $\angle BAC=100^0$ şi $\angle BAP=20^0$ obţinem $\angle MAP=\angle PAC=80^0$ şi atunci ΔMAP≡ΔCAP (L.U.L.) de unde $\angle PMA=\angle PCA=30^0$, MP=PC şi prin urmare găsim că $\angle BMP=30^0$. Atunci ΔMBP≡ΔCAP (L.U.L.) de unde PA=PB.

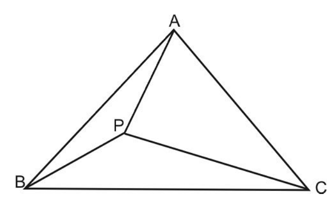


Metoda IV

Se foloseşte teorema lui Ceva scrisă trigonometric (se poate demonstra elegant şi elevilor de clasa a VII-a cu arii:

$\frac{\sin\widehat{PAB}}{\sin\widehat{PAC}}\cdot\frac{\sin\widehat{PCA}}{\sin\widehat{PCB}}\cdot\frac{\sin\widehat{PBC}}{\sin\widehat{PBA}}=1$ şi cunoscând măsurile unghiurilor, obţinem:

$\frac{\sin 20^0}{\sin 80^0}\cdot\frac{\sin 30^0}{\sin 10^0}\cdot\frac{\sin x^0}{\sin(40^0-x^0)}=1$.



Dar: $\sin 20^0=2\sin 10^0\cos 10^0$ iar $\sin 80^0=\cos 10^0$ de unde, după simplificări obţinem: $\sin x=\sin(40^0-x)$ din care $x=20^0$, ceea ce face ca ΔBAP să fie isoscel, din care PA=PB.

Asupra problemei 2 (clasa a VII-a) de la

a 60-a OLIMPIADĂ NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Andrei Răzvan Băleanu, elev, Colegiul Național ,,George Coşbuc", Motru, Gorj

În acest articol vom studia problema 2 de la clasa a VII-a propusă de Mircea Fianu la *Olimpiada Națională de Matematică* desfăşurată in județul Constanța în perioada 11-16 aprilie 2009. Enunțul problemei este:

Un pătrat de latură 5 se împarte în 25 de pătrate de latură 1. În fiecare pătrat unitate se scrie câte un număr strict pozitiv şi mai mic decât 1, astfel încât:

- *suma numerelor de pe fiecare linie este un număr natural;*
- *suma numerelor de pe fiecare coloană este un număr natural;*
- *suma celor 25 de numere este egală cu 11.*

a) Să se arate că cel puțin unul dintre cele 25 de numere este mai mare sau egal decât $\frac{3}{5}$.

b) Dacă un singur număr dintre cele 25 de numere este mai mare decât $\frac{3}{5}$, *să se arate că sumele numerelor de pe linia şi coloana ce îl conțin sunt egale.*

În baremul de corectare a fost prezentată următoarea soluție:

a) Presupunem că toate numerele sunt strict mai mici decât $\frac{3}{5}$. Atunci suma numerelor pe fiecare linie este strict mai mică decât $5\cdot\frac{3}{5}=3$, deci cel mult egală cu 2. De aici rezultă că suma tuturor numerelor este mai mică sau egală cu $5\cdot 2=10$, contradicție.

b) Suma numerelor de pe linia, respectiv coloana ce conțin numărul maxim este mai mică decât $4\cdot 0{,}6+1=3{,}4$, deci cel mult egală cu 3.

Pe celelalte 4 linii şi pe celelalte 4 coloane suma este maxim 2, iar $11>2\cdot 5$, deci există o linie şi o coloană cu suma numerelor măcar 3, anume chiar cele ce conțin numărul maxim.

În continuare prezentăm generalizarea problemei:

Un pătrat de latură n ($n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 2$) *se împarte în* n^2 *pătrate de latură 1. În fiecare pătrat unitate se scrie câte un număr strict pozitiv şi mai mic decât 1, astfel încât:*

- *suma numerelor de pe fiecare linie este un număr natural;*
- *suma numerelor de pe fiecare coloană este un număr natural;*
- *suma celor* n^2 *numere este egală cu nk+1, unde k este număr natural .*

a) Să se arate că cel puțin unul dintre cele n^2 *numere este mai mare sau egal decât* $\frac{k+1}{n}$.

b) Dacă un singur număr dintre cele n^2 *numere este mai mare decât* $\frac{k+1}{n}$, *să se arate că sumele numerelor de pe linia şi coloana ce îl conțin sunt egale.*

Demonstrația este analoagă cu precedenta:

a) Presupunem că toate numerele sunt strict mai mici decât $\frac{k+1}{n}$. Atunci suma numerelor de pe fiecare linie este strict mai mică decât $n\cdot\frac{k+1}{n}=k+1$, deci cel mult egală cu k. De aici rezultă că suma tuturor numerelor este maxim nk, contracdicție.

b) Suma numerelor de pe linia, respectiv coloana ce conține numărul maxim este mai mică decât $(n-1)\cdot\frac{k+1}{n}+1=k+2-\frac{k+1}{n}$, deci cel mult egală cu k+1.

Pe celelalte $n-1$ linii şi pe celelalte $n-1$ coloane suma este maxim k, iar $nk+1>nk$, deci există o linie şi o coloană cu suma numerelor măcar k+1, anume chiar cele ce conțin numărul maxim.

Să observăm acum ca aceasta este cea mai "largă" generalizare posibilă. Într-adevăr; să studiem următoarea generalizare.

Un pătrat de latură n ($n\in\mathbb{Z}, n\geq 2$) *se împarte în* n^2 *pătrate de latură 1.În fiecare pătrat unitate se scrie câte un număr strict pozitiv şi mai mic decât p (unde p este număr real pozitiv şi* $p<\frac{n}{n-1}$*), astfel încât:*

- *suma numerelor de pe fiecare linie este un număr natural;*
- *suma numerelor de pe fiecare coloană este un număr natural;*
- *suma celor* n^2 *numere este egală cu nk+p, unde k este număr real pozitiv, cu* $k\leq n-p$.

a) Să se arate că cel puțin unul dintre cele n^2 *numere este mai mare sau egal decât* $\frac{k+p}{n}$.

b) Dacă un singur număr dintre cele n^2 numere este egal sau mai mare decât $\frac{k+p}{n}$, să se arate că sumele numerelor de pe linia şi coloana ce îl conțin sunt egale.

Să facem o demonstrație analoagă cu cele două precedente:

Presupunem că toate numerele sunt strict mai mici decât $\frac{k+p}{n}$. Atunci suma numerelor de pe fiecare linie este strict mai mică decât $n \cdot \frac{k+p}{n} = k+p$.Cum k şi p nu sunt neapărat numere naturale nu avem neapărat suma numerelor de pe fiecare linie mai mică sau egală decât k+p−1 şi să obținem contradicția pentru că $n\left(k+p-1\right) < nk+p$ (adevărat pentru că $p < \frac{n}{n-1}$). Se observă că $nk+np > nk+p$, deci trebuie pusă condiția ca p să fie întreg, si cum $o < p < \frac{n}{n-1}$ rezultă $p = 1$. Acum problema este identică cu precedenta .

Generalizarea unei probleme de la *O.N.M.*

Andrei Răzvan Băleanu, elev, Colegiul Național ,,George Coşbuc", Motru, Gorj

În această scurtă notă matematică vom prezenta generalizarea problemei 4 propusă de Dinu Şerbănescu la clasa a VIII-a la a 60-a Olimpiadă Națională de Matematică.

Enunțul problemei este:

Prin plane paralele la fețele sale, un cub se împarte în 27 de paralelipipede dreptunghice, dintre care exact două sunt cuburi. Să se arate că cele două cuburi au muchii de lungimi egale.

În continuare prezentăm generalizarea problemei:

Prin plane paralele la fețele sale, un cub se împarte în n^3 *paralelipipede dreptunghice, unde n este un număr natural prim. Dintre acestea exact n−1 sunt cuburi. Să se arate că cele n−1 cuburi au muchii de lungimi egale.*

Prezentăm în continuare soluția generalizării:

Cum n este un număr prim cubul poate fi împărțit prin plane paralele astfel: $1\times n\times n^2$, $1\times 1\times n^3$, $n\times n\times n$. Cum în fiecare din primele două cazuri rezultă n^3 paralelipipede cu o dimensiune egală cu cea a cubului dat o analizăm doar pe ultima. Fie A un vârf al cubului. Muchiile din A sunt împărțite de planele paralele la fețe în câte n segmente. Notăm cu $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_n$ şi $z_1, z_2, ..., z_n$ lungimile segmentelor generate pe muchiile din A. Observăm că:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = y_1 + y_2 + ... y_n = z_1 + z_2 + ... + z_n\ , \qquad (1)$$

sumele reprezentând lungimea muchiei cubului.

Folosim metoda reducerii la absurd. Dacă cele n−1 cuburi au dimensiunile $a_1 \neq a_2 \neq ... \neq a_{n-1}$, atunci $a_1 = x_{i_1} = y_{j_1} = z_{k_1}, ..., a_{n-1} = x_{i_{n-1}} = y_{j_{n-1}} = z_{k_{n-1}}$ cu $i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_{n-1}$, $j_1 \neq j_2 \neq ... \neq j_{n-1}$ şi $k_1 \neq k_2 \neq ... \neq k_{n-1}$. Relația (1) devine:

$$a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + x_{i_n} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + y_{j_n} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + z_{k_n}\ .$$

Atunci $x_{i_n} = y_{j_n} = z_{k_n}$, ceea ce arată că printre cele n^3 paralelipipede mai există un al n-lea cub, contradicție! Atunci cele n−1 cuburi au dimensiuni egale.

Extinderea unor probleme din plan în spațiu – probleme care au constituit obiectul unor olimpiade de matematică

Gheorghe F.Molea, prof. Curtea de Argeş

I. La olimpiada Națională Arad – 1994, la clasa a IX-a a fost propusă problema următoare:
,,Demonstrați că nu există nici un triunghi care să aibă lungimile laturilor numere prime şi aria un număr întreg."

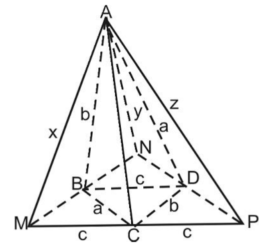
În cele ce urmează vom extinde problema anterioară în spațiu, nu înainte de a introduce şi demonstra unele chestiuni pregătitoare.

Definiția I. Tetraedrul $[ABCD]$ este echifacial dacă fiecare muchie este congruentă cu muchia opusă, adică $[AB] \equiv [CD], [AC] \equiv [BD]$ şi $[AD] \equiv [BC]$.

Definiția 2. Tetraedrul $[ABCD]$ este dreptunghic în vârful A dacă oricare două muchii $[AB], [AC], [AD]$ sunt perpendiculare.

Teorema 1. Volumul tetraedrului echifacial [ABCD] în care $[AD]\equiv[BC]=a$, $[AB]\equiv[CD]=b$, $[AC]\equiv[BD]=c$, este dat de formula: $V_{[ABCD]}=\dfrac{\sqrt{2\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)}}{12}$.

Demonstraţie: În planul (BCD) prin vârfurile B, C, D construim paralele la laturile $[CD]$, $[BD]$, BC care determină triunghiul [MNP]. Triunghiul [BCD] este triunghiul median al triunghiului [MNP]. În triunghiul PAM, [AC] este mediană şi $AC=\dfrac{MP}{2}$, deci triunghiul [MAP] este dreptunghic în $\sphericalangle A$, deci $AM\perp AP$. Analog rezultă $AN\perp AP$ şi $AM\perp AN$. Deci tetraedrul [AMNP] având $AM\perp AP$, $AM\perp AN$, $AN\perp AP$ este dreptunghic în vârful A.



Dacă notăm cu AM=x, AN=y, AP=z, folosind teorema lui Pitagora obţinem sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2=4b^2 \\ x^2+z^2=4c^2 \\ y^2+z^2=4a^2 \end{cases} \text{ de unde rezultă: } \begin{cases} x^2=2\left(b^2+c^2-a^2\right) \\ y^2=2\left(a^2+b^2-c^2\right) \\ z^2=2\left(a^2+c^2-b^2\right) \end{cases}.$$

Deoarece tetraedrele [ABCM], [ABDN], [ACDP], [ABCD] au bazele [BCM], [CDP], [BDN], [BDM] triunghiuri congruente şi aceeaşi înălţime din vârful A, atunci ele au acelaşi volum.

$V_{[ABCM]}=\dfrac{1}{4}\cdot V_{[AMNP]}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{AM\cdot AP\cdot AN}{6}=\dfrac{xyz}{24}$, deci $V=\dfrac{xyz}{24}\Leftrightarrow 242V^2=x^2y^2z^2\Leftrightarrow 24^2V^2=8(b^2+c^2-a^2)$.

$(a^2+b^2-c^2)\cdot(a^2+b^2-b^2)\Leftrightarrow 72V^2=(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)$ echivalentă cu formula din teoremă.

Teorema 2. (extinderea problemei de la Olimpiada Naţională, Arad – 1994)

Demonstraţi că nu există nici un tetraedru echifacial care să aibă lungimile muchiilor numere prime şi volumul un număr întreg.

Demonstraţie. Vom folosi formula: $72V^2=(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)$ (*), analizând următoarele cazuri:

1) dacă a, b, c sunt numere prime impare, atunci membrul drept al relaţiei (*) este impar iar cel stâng este par. Am ajunge la concluzia că un număr par să fie egal cu un număr impar, contradicţie!

2) dacă a=b=c=2, atunci $72V^2=64$, deci $V\notin N$.

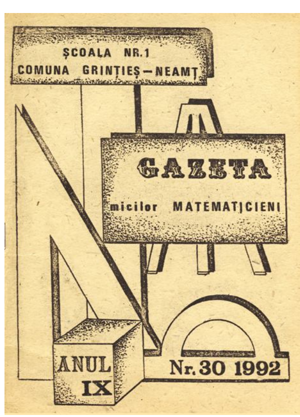
3) dacă a=b=2 iar c este număr prim impar, rezultă $72V^2$=număr impar, fals!

4) dacă a=2 iar b şi c sunt numere prime≥ 5, ţinând cont că orice număr prim ≥ 5 are una din formele $M_6\pm 1$, relaţia (*) devine: $72V^2=(4+M_6+1-M_6-1)(4+M_6+1-M_6-1)(M_6+1+M_6-1-4)\Leftrightarrow 72V^2=(M_6+4)^2(M_6-2)\Leftrightarrow 72V^2=(M_6-2)^3(M_6-2)$ $\Leftrightarrow 72V^2=(M_6-2)^2(M_6-2)\Leftrightarrow 72V^2=(M_6-2)^3\Leftrightarrow 72V^2=M_6-8\Leftrightarrow 72V^2=M_6-2$. Cum $72V^2=M_6$ pentru $V\in N$, ar rezulta că $M_6=M_6-2$, fals!

5) dacă a=2, b=c=3 rezultă $72V^2=224$, deci $V\notin N$.

6) dacă a=2, b=3, c este număr prim ≥ 5, avem: $72V^2=(c^2+5)(c^2-5)(13-c^2)\Leftrightarrow(c^2-5)(13-c^2)=\dfrac{72V^2}{c^2+5}$. Deoarece $\dfrac{72V^2}{c^2+5}>0$ rezultă că $(c^2-5)(13-c^2)>0$, deci $c^2\in(5, 13)$, de unde c=3, dar c este număr prim ≥ 5. Se ajunge la situaţia $3\geq 5$, fals!

Cu această teorema este demonstrată deoarece am epuizat toate posibilităţile. Continuare în numărul următor.



Câteva cuvinte despre o revistă care a fost ,,Gazeta micilor matematicieni”

Ştefan Ţifui, prof. Grinţieş-Neamţ

În anul 1972, mă pregăteam pentru examenul de gradul al doilea. Cu această ocazie am stabilit, cu o parte din elevi, să scoatem o mini-gazetă de matematică a şcolii, necesară şi elevilor care nu au posibilităţi de pregătire în familie (se ştie situaţia elevilor din mediul rural…).

Ne-am gândit ca primul număr să conţină probleme simple, accesibile tuturor elevilor, probleme propuse de către elevi, pentru clasele I-VII, probleme distractive, articole pe înţelesul copiilor. A apărut în format mic, circa 15-20 exemplare. Am apelat şi la colegii din cadrul catedrei de matematică din şcoală. La început a fost destul de uşor, fiindcă nu era prea mare nevoie de materiale şi nici de materiale deosebite. Colectivul de redacţie era format din câte doi elevi de la clasele I-VII, fiecare elev având misiunea lui. Treptat, conţinutul gazetei s-a îmbunătăţit, numărul elevilor participanţi a devenit din ce în ce mai mare, numărul de exemplare a ajuns până la 30-40 şi am convenit să-i dăm denumirea ,,Gazeta micilor matematicieni” G.M.M.

G.M.M s-a făcut cunoscută şi în şcolile apropiate, fiind prezentată în cadrul ,,Cercului pedagogic” din zonă al cărui responsabil eram. Uşor, uşor, G.M.M a pătruns şi în şcolile din oraş, în judeţul Neamţ, conţinutul ei s-a îmbogăţit, au apărut noi rubrici în cadrul ei:

1) Probleme propuse, probleme compuse de către elevi. 2) Curiozități matematice. 3) Rebusuri matematice. 4) Probleme distractive. 5) Articole accesibile elevilor claselor II-VII: ,,Cum au apărut numerele”, ,,Mulțimi şi operații cu mulțimi”, etc.
6) Rubrica rezolvitorilor.

Având un succes deosebit în rândul elevilor şi profesorilor, s-a mărit numărul de exemplare şi a fost multiplicată la xerox. A apărut o rubrică nouă, ,,Probleme propuse pentru clasele IX-X, Probleme pentru concursuri, Unde este greşeala!, Cel mai bun rezolvitor.

Cu un format nou, cu un conținut deosebit, G.M.M s-a răspândit şi în alte județe, şi-a mărit numărul colaboratorilor, iar în colectivul de redacție au apărut nume noi, ca: C. Ionescu-Țiu, pe atunci redactor onorific al Gazetei Matematice-Bucureşti; Vasile Țifui (frate), prof. Piatra Neamț, Ion Diaconu, prof. Piatra Neamț, Mihaly Bencze, prof. Braşov, Lucian Tuțescu, prof. Craiova, Iulian Mazilu, prof. Urziceni, Mihai Doroftei, prof Borca-Neamț, Radu Ion, prof. Bacău, etc.

Mulți profesori şi-au exprimat dorința de a primi gazeta şi a colabora cu ea, astfel Florentin Smarandache, Nicolae Ivăşchescu, I.Pătraşcu – Craiova, Gh.Molea – Curtea de Argeş, I.Fota şi T. Băeţică – Izbiceni-Olt, D.Săvulescu, Gh. Neagu – Bacău, I. Belci – Caraş- Severin.

S-au făcut schimburi cu reviste de matematică din alte localități: ,,Alfa” din Craiova, ,,Gamma” – Braşov, ,,Caiet de informare matematică” – Câmpina (Gane Policarp), ,,Sfera” – Băileşti-Olt, ,,Penta” – Piteşti, ,,Epsilon” – Băileşti, ,,Revista matematică” – Bacău, ,,Caiet 32” – Craiova (N. Ivăşchescu, George Mărgineanu); ,,Teme şi probleme” – I.Pătraşcu – Craiova, ,,Matematica pentru elevi” – Galați, ,,Şcoala vâlceană” – Râmnicu Vâlcea, ,,Licăriri” – Craiova.

Cu acest schimb G.M.M. a intrat în circuitul revistelor de matematică din țară.

Într-un articol publicat în ziarul ,,Ateneu” din Bacău, lectorul univ. dr. Valeriu Popa, scria: ,,Colectivul de profesori de la şcoala nr.1 Grințieş a reuşit să realizeze ceea ce nici o şcoală din altă localitate din țară nu a reuşit”.

G.M.M. conține foarte multe probleme frumoase, propuse de profesori deosebiți.

Iată câteva exemple:

1. Să se arate că dacă a, b, c şi d sunt cifre diferite între ele şi diferite de zero, atunci $37 \le \overline{ab} + \overline{cd} \le 183$.

prof. C.Ionescu-Țiu, Bucureşti, pb. 3375/19-1988

2. Arătați că dacă a, b$\in$**R**, atunci $2(a^4+b^4)+9 \ge 12ab$. Când avem egalitate?

prof. Lucian Tuțescu, Craiova, pb. 2325, nr.15/1987

3. Să se rezolve în numere întregi ecuația $x^3+y^3=x+y$. *prof. Florin Smarandache, Craiova, pb. 1156, nr.9/1986*

4. Ce ani din secolul XX reprezintă pătrate perfecte? Aflați numerele $\overline{aabb}$, pătrate perfecte.

prof. N.Ivăşchescu, Craiova, pb. 2703, nr.17/1988

5. Să se determine numerele a, b, c ştiind că ab=7c şi $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{11}$. *prof. D.Săvulescu, Bacău, pb. 2703, nr.17/1988*

6. Să se afle restul împărțirii numărului $N=211^{213}+213^{211}$ prin 13. *prof. Gh.Schneider, Craiova, pb.2704, nr.17/1988*

7. Aflați numerele naturale a, b, c ştiind că $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6}$ şi $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 282$.

prof. Iulian Mazilu, Urziceni, pb.6051, nr.33/1994

8. Să se rezolve ecuația $x+\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(1-x)^2} = 3$. *prof. I.Fota, Izbiceni, pb. 2306, nr.15/1987*

9. Să se determine numărul $\overline{ab}$ ştiind că suma pătratelor cifrelor este un număr prim iar produsul pătratelor cifrelor este divizibil cu 100. *prof. Dragoş Constantinescu, Rm. Vâlcea, pb. 3418, nr.19/1988*

10. Determinați numărul prim x pentru care x^2+3x+2 nu este divizibil cu 6.

prof. Gh. Molea, Curtea de Argeş, pb.6065, nr.33/1994

11. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{-3x+2}{6}\right]=2-3x$, unde s-a notat cu [a] partea întreagă a lui a.

prof. I.Pătraşcu, Craiova, pb.3216, nr.18/1988

12. Care număr este mai mare $2^{\sqrt{5}}$ sau 5? *prof.L.Tuțescu, Craiova, pb.6123, nr.33/1994*

Din anul 1995, G.M.M. şi-a încetat activitatea din mai multe motive. În anul 2003 a luat ființă revista ,,Dialoguri matematice nemțene”, revistă semestrială de cultură matematică pentru elevi, profesori şi iubitori ai matematicii (I.S.J. Neamț)

Ultima problemă din G.M.M. a fost cu nr. 6123 a prof. Lucian Tuțescu. G.M.M. a fost apreciată de colegi, profesori şi de I.S.J. Neamț, de la care n-am primit nici un ajutor. Ea a fost ,,modestă” față de alte reviste, dar meritul nostru a fost acela că 2-3 profesori de la şcoala din Grințieş au reuşit să arate că matematica nu se dezvoltă numai la oraşe mai mici sau mai mari ci şi pe vârful unui deal, acolo unde se află Şcoala Nr.1 – Grințieş.