CAPITOLUL 2

SERII FOURIER

2.1. Serii trigonometrice. Serii Fourier

Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Reamintim că punctul $x_0\in[a,b]$ se numeşte *punct de discontinuitate de prima speță* al funcției f dacă limitele laterale $f(x_0-0)$ şi $f(x_0+0)$ există şi sunt finite.

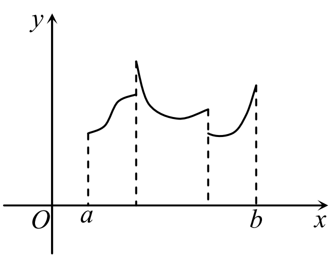

Fig. 1.1

Definiția 2.1.1. Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte *continuă pe porțiuni* dacă este continuă pe $[a,b]$ cu excepția unui număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță (fig. 1.1).

O astfel de funcție este integrabilă.

Reamintim că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este periodică de perioadă T dacă $f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Lema 2.1.1. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcție periodică de perioadă* 2π. *Atunci*

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Pentru aceasta este suficient să observăm că

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Cu schimbarea de variabilă $x=t-2\pi$, obținem

$$\int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{-\pi} f(t)\mathrm{d}t=-\int_{-\pi}^{a} f(t)\mathrm{d}t,$$

deci

$$\int_{-\pi}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

de unde rezultă lema. ■

În general, dacă f are perioada T, atunci

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x\ .$$

Definiția 2.1.2. Fie $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale. Seria de funcții

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx+\beta_n \sin nx) \tag{1}$$

se numeşte *serie trigonometrică de coeficienți* α_n, $n\geq 0$, β_n, $n\geq 0$. Sumele parțiale ale unei astfel de serii de funcții

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx+\beta_k \sin kx)$$

se numesc *polinoame trigonometrice.*

Definiția 2.1.3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, periodică de perioadă 2π, continuă pe porțiuni pe orice interval compact şi fie

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n\geq 1.$$

Atunci seria trigonometrică

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx) \tag{2}$$

se numeşte *seria Fourier ataşată funcției* f, iar coeficienții a_n, b_n se numesc *coeficienții Fourier ai funcției* f.

Definiția 2.1.4. Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte *continuu diferențiabilă pe porțiuni* (sau *netedă pe porțiuni*) pe $[a,b]$ dacă este derivabilă pe $[a,b]$ cu excepția unui număr finit de puncte şi f' este continuă pe $[a,b]$ cu excepția acestor puncte în care are limite laterale finite.

Teorema 2.1.1. (Dirichlet). *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție periodică de perioadă 2π, continuu diferențiabilă pe porțiuni pe orice interval compact $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Atunci seria Fourier* (2) *este convergentă pe $\mathbb{R}$ şi avem*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\ \forall x\in\mathbb{R},$$

unde

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N},\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Observația 2.1.1. Dacă, în plus, f este continuă pe $\mathbb{R}$, avem

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

(f se dezvoltă în serie Fourier pe $\mathbb{R}$).

Observația 2.1.2. Dacă funcția f este pară, atunci $b_n=0$, $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă funcția f este impară, atunci $a_n=0$, $n\in\mathbb{N}$.

Exemplu. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[-\pi, \pi]$ funcția $f(x) = x^2$.

Fie $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcția obținută prin prelungirea prin periodicitate, cu perioada $T = 2\pi$, a funcției f. Deoarece funcția este pară, coeficienții b_n sunt nuli. Vom calcula coeficienții a_n. Avem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2\pi^3}{3},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x = x^2 \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\infty}^{\infty} x \sin nx \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2}{n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x \right) = \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}, \ n \geq 1.$$

În consecință $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$, $a_n = 4 \cdot \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $b_n = 0$, $n \geq 1$, deci

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos nx, \ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

În particular, pentru $x = \pi$ obținem o identitate cunoscută, datorată lui *Euler*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Teorema 2.1.2. (Fejér). *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, periodică de perioadă 2π,*

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \ n \in \mathbb{N}$$

şi sumele Fejér de ordinul n,

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci şirul de funcții $(\sigma_n)_n$ converge uniform la f pe $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.3. (Weierstrass). *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, periodică de perioadă 2π. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom trigonometric T_ε astfel încât*

$$\| f - T_\varepsilon \| < \varepsilon.$$

Demonstrație. Fie $m_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\| \sigma_p - f \| < \varepsilon$, pentru orice $p \geq m_\varepsilon$. Putem alege $T_\varepsilon = \sigma_{m_\varepsilon}$, unde σ_{m_ε} este dat de Teorema lui Fejér. ■

Teorema 2.1.4. (Weierstrass). *Dacă funcția $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom algebric P_ε astfel încât $\| f - P_\varepsilon \| < \varepsilon$.*

Demonstrație. Pentru început, fie $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă care satisface $f(0)=f(2\pi)$ şi f^* prelungirea prin periodicitate pe $\mathbb{R}$ a funcției f. Conform Teoremei 2.1.3, pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom trigonometric T_ε astfel încât $\|f-T_\varepsilon\|<\frac{\varepsilon}{2}$, cu

$$T_\varepsilon=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{p}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx).$$

Dezvoltând în serie funcțiile $\cos$ şi $\sin$, rezultă că există un rang m_ε astfel încât

$$\left\|T_\varepsilon-\sum_{k=1}^{m_\varepsilon}a_kx^k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Notând $P_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^{m_\varepsilon}a_kx^k$, rezultă că

$$\|f-P_\varepsilon\|<\varepsilon.$$

Să presupunem acum că funcția f nu mai satisface condiția $f(0)=f(2\pi)$, deci $f(0)\neq f(2\pi)$. Considerăm funcția continuă

$$g:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\qquad g(x)=f(x)+\frac{f(0)-f(2\pi)}{2\pi}x.$$

Atunci $g(0)=f(0)$, $g(2\pi)=f(0)$, deci $g(0)=g(2\pi)$. Conform celor de mai sus, pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom P_ε astfel încât $\|g-P_\varepsilon\|<\varepsilon$, adică

$$\left|f(x)+\frac{f(0)-f(2\pi)}{2\pi}x-P_\varepsilon(x)\right|<\varepsilon,\ \forall x\in[0,2\pi].$$

Notând $Q_\varepsilon(x)=P_\varepsilon(x)-\frac{f(0)-f(2\pi)}{2\pi}x$, rezultă că

$$\|f-Q_\varepsilon\|<\varepsilon.$$

În sfârşit, fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi

$$h:[0,2\pi]\to[a,b],\qquad h(t)=a+\frac{b-a}{2\pi}t.$$

Evident, h este un homeomorfism. Considerăm funcția $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $g(t)=f(h(t))$, $\forall t\in[0,2\pi]$. Ținând seama de cele de mai sus, rezultă că pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom P_ε astfel încât $\|g-P_\varepsilon\|<\varepsilon$, adică

$$|f(h(t))-P_\varepsilon(t)|<\varepsilon,\ \forall t\in[0,2\pi].$$

În consecință,

$$|f(x)-P_\varepsilon(h^{-1}(x))|<\varepsilon,\ \forall x\in[a,b].$$

Notând $Q_\varepsilon=P_\varepsilon\circ h^{-1}$, rezultă că

$$\|f-Q_\varepsilon\|<\varepsilon.\ \blacksquare$$

2.2. Serii Fourier generalizate

Fie $(H, < \cdot,\cdot >)$ un spaţiu prehilbertian real şi fie $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ un sistem ortonormal de elemente din H. Aşadar avem:

$$< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases} .$$

Fie $x \in H$ oarecare. *Coeficienţii Fourier (generalizaţi) ai lui x în raport cu sistemul ortonormal* $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ se definesc astfel:

$$\xi_n =< x, e_n > ,\ n \in \mathbb{N}^* , \tag{1}$$

iar seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n , \tag{2}$$

se numeşte *seria Fourier ataşată lui x în raport cu sistemul ortonormal* $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$.

Teorema 2.2.1. $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|$, $\forall c_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

Demonstraţie. Într-adevăr:

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 =< x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i , x - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j >=$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 .$$

Aşadar, avem

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 . \tag{3}$$

Evident această expresie este minimă dacă $c_i = \xi_i$, $1 \leq i \leq n$. Rezultă că

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| ,\ \forall c_i \in \mathbb{R} ,\ 1 \leq i \leq n . \ \blacksquare$$

Corolarul 1. *Dacă ξ_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sunt coeficienţii Fourier ai lui x în raport cu sistemul ortonormal* $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ *, atunci are loc inegalitatea lui Bessel*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \leq \|x\|^2 . \tag{4}$$

Demonstraţie. Din (3) rezultă că

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 ,$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \|x\|^2 .$$

Făcând $n \to \infty$, se obține (4). ■

Definiția 2.2.1. Sistemul ortonormal $\{e_n\}_{n\ge1}$ se numeşte *închis* dacă $Sp(\{e_n\}_{n\ge1})$ este dens în H, deci dacă pentru orice $x \in H$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| < \varepsilon .$$

Teorema 2.2.2. *Dacă sistemul ortonormal* $\{e_n\}_{n\ge1}$ *este închis atunci are loc identitatea lui Parseval:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 . \tag{5}$$

Demonstrație. Este suficient să arătăm că

$$\|x\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 . \tag{6}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| < \varepsilon .$$

Din (3) obținem

$$\varepsilon^2 > \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \ge \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 .$$

Aşadar

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \varepsilon^2 > \|x\|^2 .$$

Cum ε este arbitrar, făcând $n \to \infty$, rezultă (6). ■

Definiția 2.2.2. Un sistem ortonormal $\{e_n\}_{n\ge1}$ se numeşte *complet (total)* dacă orice $x \in H$ care satisface $\xi_i = < x, e_i > = 0$, pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$, coincide cu elementul nul din H, deci $x = 0_H$.

Teorema 2.2.3. *Orice sistem ortonormal închis este complet.*

Demonstrație. Deoarece $\xi_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, din egalitatea lui Parseval rezultă că $x = 0_H$. ■

Afirmația reciprocă nu este adevărată în general. Se poate arăta că într-un spațiu Hilbert cele două noțiuni coincid.

Fie $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Vom nota cu $\widetilde{C}([a,b])$ spațiul vectorial al funcțiilor continue pe porțiuni pe $[a,b]$ care satisfac

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot[f(x-0)+f(x+0)],\ \forall x\in[a,b].$$

Evident $C([a,b])\subset\widetilde{C}([a,b])$. Pe $\widetilde{C}([a,b])$ definim următorul produs scalar

$$<f,g>=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,\ \forall f,g\in\widetilde{C}([a,b]).$$

Într-adevăr, se verifică uşor că dacă $f,g,f_1,f_2\in\widetilde{C}([a,b])$, atunci:

$$<f_1+f_2,g>=<f_1,g>+<f_2,g>,$$
$$<\alpha f,g>=\alpha<f,g>,\ \forall\alpha\in\mathbb{R},$$
$$<f,g>=<g,f>,$$
$$<f,f>\geq 0.$$

Vom arăta acum că din $<f,f>=0$, rezultă că $f\equiv 0$. Să presupunem că

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0.$$

Fie $\Delta: a=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_n=b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$, astfel încât funcția f este continuă pe intervalul (x_{i-1},x_i). Considerăm funcțiile

$$g_i:[x_{i-1},x_i]\to\mathbb{R},\ 1\leq i\leq n,$$

$$g_i(x)=\begin{cases} f(x_{i-1}+0), & \text{dacă } x=x_{i-1},\\ f(x), & \text{dacă } x\in(x_{i-1},x_i),\\ f(x_i-0), & \text{dacă } x=x_i.\end{cases}$$

Funcția g_i este continuă pe $[x_{i-1},x_i]$ şi $0=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\mathrm{d}x=\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i^2(x)\mathrm{d}x$. În consecință $g_i(x)=0$, $\forall x\in[x_{i-1},x_i]$, deci $f(x)=0$, $\forall x\in(x_{i-1},x_i)$, $f(x_{i-1}+0)=0$, $f(x_i-0)=0$.

Atunci pentru orice $i, 1\leq i\leq n-1$,

$$f(x_i)=\frac{1}{2}\cdot[f(x_i-0)+f(x_i+0)]=0.$$

Prin urmare $f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$.

În concluzie, $\widetilde{C}([a,b])$ este un spațiu prehilbertian.

Fie acum spațiul prehilbertian $H=\widetilde{C}([-\pi,\pi])$ Să considerăm în acest spațiu şirul de funcții trigonometrice

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,...,\cos nx,\sin nx,.... \tag{7}$$

Se deduc cu uşurință următoarele formule importante:

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\mathrm{d}x=2\pi, \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \mathrm{d}x = 0, \ m \in \mathbb{N}^*, \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \mathrm{d}x = 0, \ m \in \mathbb{N}^*, \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \neq n \\ \pi, & \text{dacă } m = n \end{cases}, \ m, n \in \mathbb{N}^*, \tag{11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \neq n \\ \pi, & \text{dacă } m = n \end{cases}, \ m, n \in \mathbb{N}^*, \tag{12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = 0, \ m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{13}$$

Să dovedim, de exemplu, (11). Dacă $m \neq n$, atunci din egalitatea

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} \cdot [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

rezultă că

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{m+n} \cdot \sin(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m-n} \cdot \sin(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 0.$$

De asemenea

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{1}{2m} \cdot \sin 2mx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Din egalitățile (8)-(13), rezultă că şirul (7) este un sistem ortogonal. Pe de altă parte, cum $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$, din aceste egalități rezultă că

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}, \ \|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

În consecință, sistemul de funcții

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \ldots. \tag{14}$$

este un sistem ortonormal de funcții.

Fie a_n, b_n, coeficienții Fourier din Teorema lui Dirichlet. Notăm cu

$$c_0, c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_n, d_n, \ldots,$$

coeficienții Fourier generalizați în raport cu sistemul ortonormal (14). Atunci:

$$c_0 = < f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot a_0,$$

$$c_n = < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \cdot a_n, \ n \in \mathbb{N}^*,$$

$$d_n = < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \cdot b_n, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Inegalitatea lui Bessel devine

$$\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

sau

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\,. \tag{15}$$

Se poate arăta că sistemul trigonometric (14) este închis. Rezultă că are loc egalitatea lui Parseval, adică

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\,. \tag{16}$$

Exemplu. În cazul funcției $f:[-\pi,\pi]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\pi}{2sh\pi}\cdot e^x$, coeficienții Fourier sunt

$$a_0=1,\ a_n=\frac{(-1)^n}{1+n^2},\ b_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{1+n^2},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{ch\pi}{2sh\pi}.$$

Din egalitatea lui Parseval obținem

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi\,ch\pi}{2sh\pi},$$

de unde rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi\,ch\pi-sh\pi}{2sh\pi}.$$

2.3. Serii Fourier pentru funcții periodice de perioadă $T=2l$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție periodică de perioadă $2l$, continuă pe porțiuni, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(t)=\dfrac{l}{\pi}\,t$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g=f\circ h$. Funcția g este periodică de perioadă 2π.

Într-adevăr

$$g(t+2\pi)=f\big(h(t+2\pi)\big)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f(\frac{l}{\pi}t)=g(t),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Dacă f este continuu diferențiabilă pe porțiuni pe orice interval compact din $\mathbb{R}$, atunci şi g are această proprietate. Dacă, în plus, f este continuă, din Teorema lui Dirichlet rezultă că

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

unde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\,,\ n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\,,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum $t = \frac{\pi}{l}x$, obținem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

unde

$$a_n = \frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemplu. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $(-l,l)$ funcția $f(x) = x$.

Funcția fiind impară, rezultă că $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Prin calcul obținem

$$b_n = \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Atunci

$$x = \frac{2l}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,,\ x \in (-l,l).$$