Integrabilitate în sens Riemann

Fie $f:[a,b]\to \mathbb{R}$; $\Delta=(a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b)$ şi $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$;

Definiție. $\sigma_\Delta(f,\xi)=\sum_{i=0..n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$ se numeşte **sumă Riemann** asociată funcției f, divizunii Δ şi punctelor intermediare, ξ

Definiție. f s.n. integrabilă Riemann dacă $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon,\forall\|\Delta\|<\delta_\varepsilon,|\sigma_\Delta(f,\xi)-I|<\varepsilon$. Numărul I se numeşte integrala Riemann a funcției f pe intervalul $[a,b]$

Teoremă. Dacă f este integrabilă Riemann atunci este mărginită

Lemă. $\inf_\xi \sigma_\Delta(f,\xi)=s_\Delta,\ \sup_\xi \sigma_\Delta(f,\xi)=S_\Delta$

Teoremă Dacă f este mărginită, atunci este integrabilă Darboux $\Leftrightarrow$ este integrabilă Riemann

Teoremă Dacă f este mărginită, atunci este integrabilă Riemann $\Leftrightarrow$ $\forall\|\Delta_n\|\to 0\Rightarrow \lim\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n)=I$

Definiție Mulțimea $A\subset\mathbb{R}$ s.n. neglijabilă dacă $\forall\varepsilon>0,\exists\{I_n\}_{n\in J},A\subseteq\bigcup_{n\in J} I_n,\sum_{n\in J} l(I_n)<\varepsilon$

Teoremă. f este integrabilă $\Leftrightarrow$ mulțimea punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă şi f mărginită

Proprietăți ale integralei Riemann

1. $\int_a^b 1\cdot dx=b-a$

2. dacă f şi g integrabile atunci $\alpha f+\beta g$ şi $f\cdot g$ integrabile şi $\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$

3. a) $f\ge 0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\ge 0$; b) $f\le g\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$; c) $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$

4. Prima formulă de medie:

   dacă $m\le f(x)\le M$ şi g păstrează semn constant, atunci $\exists\mu,\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$

   dacă f este continuă, atunci $\exists\xi,\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

5. A doua formulă de medie:

   dacă f continuă iar g continuă şi monotonă, atunci $\exists\xi,\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$

6. Dacă f integrabilă pe $[a,b]$ atunci este integrabilă pe orice subinterval şi $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

7. f,g integrabile, $f(x)=g(x),\forall x\in[a,b]-A$, A finită, atunci $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

8. f continuă, atunci $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ este primitivă a lui f

Formula Leibnitz-Newton

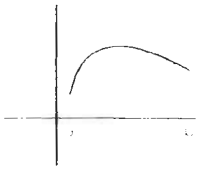
Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă şi dacă admite o primitivă F, atunci $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Aplicaţii elementare ale integralei definite

Lungimea graficului. $f:[a,b]\to \mathbb{R}$, $f\in C^1([a,b])$, $L(G_f)=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$

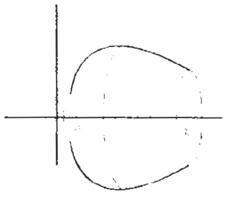
Exemplu: Lungimea arcului de parabolă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+1$, cuprins între punctele $A(0,1)$ şi $B(1,3)$ este dată de integrala $\int_0^1\sqrt{1+(2x+1)^2}dx$ în care efectuăm substituţia $2x+1=t$ şi obţinem

$$\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{1+t^2}dx=\frac{1}{4}\left(\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+t\sqrt{1+t^2}\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{3+\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}}+3\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$$

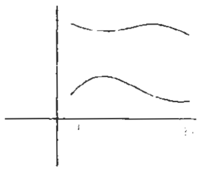


Aria cuprinsă între graficul funcţiei continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, Ox, x a şi y b: $A=\int_a^b f(x)dx$

Exemplu: Aria semicercului de rază r este $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx$ în care efectuăm substituţia $x=r\cos t$ şi obţinem $\int_0^\pi\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}\cdot r\sin t dt=r^2\int_0^\pi\sin^2 t dt=r^2\int_0^\pi\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi r^2}{2}$; aşadar, rezultă că aria cercului este πr^2



Volumul obţinut prin rotaţia graficului funcţiei continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, în jurul lui Ox: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$



Exemplu: Volumul trunchiului de con; considerăm $f:[0,h]\to\mathbb{R}_+, f(x)=r+\frac{R-r}{h}x$ iar volumul cerut este $V=\pi\int_0^h\left(r+\frac{R-r}{h}x\right)^2dx$, efectuăm schimbarea de variabilă $t=r+\frac{R-r}{h}x$, şi rezultă că volumul este $V=\frac{\pi h}{R-r}\int_r^R t^2dx=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+rR+r^2\right)$

Aria laterală a suprafeţei de rotaţie, $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, $f\in C^1([a,b])$, $A_l=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

Exemplu: Aria laterală a cilindrului circular drept; considerăm $f:[0,h]\to\mathbb{R}_+, f(x)=r$ iar aria cerută este $A_l=2\pi\int_0^h rdx=2\pi rh$

Centrul de greutate al unei plăci omogene cuprinse între graficele funcţiilor continue $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, $0\le f(x)\le g(x), \forall x\in[a,b]$

$$x_G=\frac{\int_a^b x\left(g(x)-f(x)\right)dx}{\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx},\quad y_G=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b\left(g^2(x)-f^2(x)\right)dx}{\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx}$$

Exemplu. Centrul de greutate al plăcii mărginite de parabolele $f,g:[-1,1]\to R, f(x)=x^2, g(x)=2x^2-1$; calculăm integralele din formulă: $\int_{-1}^1 x\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_{-1}^1 x\left(2x^2-1-x^2\right)dx=\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^1-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^1=0$, deci $x_G=0$, $\int_{-1}^1\left(g^2(x)-f^2(x)\right)dx=\int_{-1}^1\left(4x^4-4x^2+1-x^4\right)dx=\int_{-1}^1\left(3x^4-4x^2+1\right)dx=\frac{6}{5}-\frac{8}{3}+2=\frac{8}{15}$ şi în sfârşit $\int_{-1}^1\left(2x^2-1-x^2\right)dx=\int_{-1}^1\left(x^2-1\right)dx=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$, deci $y_G=-\frac{1}{5}$